Krótki kurs historii matematyki
Wojciech Domitrz
MiNI PW

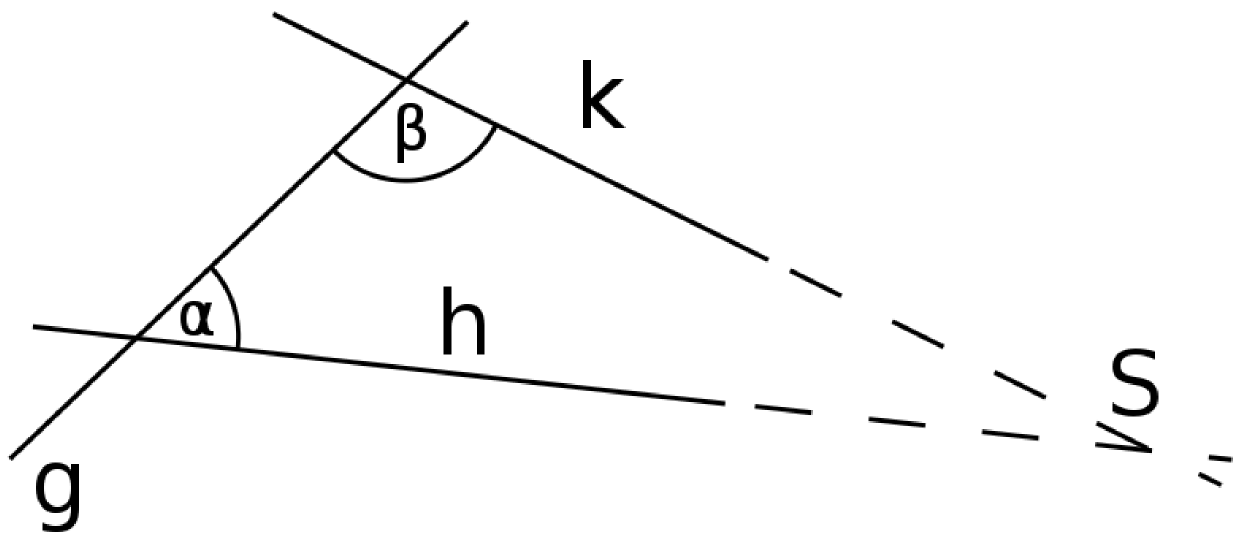
Wykład 11

nowa geometria, Poincare, problemy Hilberta

Elementy, Księga I – Postulaty
http://www.matematycy.interklasa.pl/euklides/

- Postulat 1. Można poprowadzić prostą od któregokolwiek punktu do któregokolwiek punktu.
- Postulat 2. Ograniczoną prostą można przedłużyć nieskończenie.
- Postulat 3. Można zakreślić okrąg z któregokolwiek punktu jako środka dowolną odległością.
- Postulat 4. Wszystkie kąty proste są między sobą równe.
- Postulat 5. Jeżeli prosta przecinająca dwie proste tworzy z nimi kąty jednostronnie wewnętrzne o sumie mniejszej niż dwa kąty proste, to te dwie proste przedłużone nieskończenie przecinają się po tej stronie, po której znajdują się kąty o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych.

Piąty Postulat Euklidesa

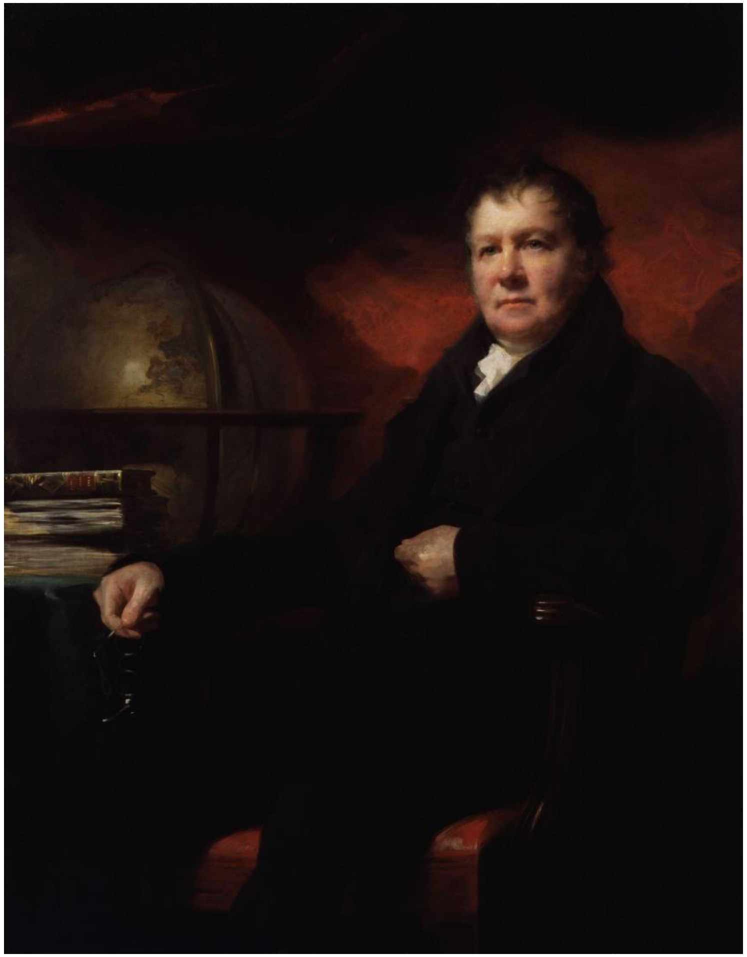


Autor: Harkonnen, wikipedia

Równoważne warunki V postulatowi (z wcześniejszymi czterema)

- Odległość punktów prostej od prostej z nią rozłącznej na płaszczyźnie jest ograniczona (Proklos)
- Suma kątów w trójkącie wynosi 180˚
- Istnieje (chociaż jeden) prostokąt
- Punkty równo oddalone od prostej i leżące po jednej stronie są współliniowe

John Playfair
(10.03.1748 – 20.07.1819)



Postulat Playfaira (1795)

- Na płaszczyźnie przez punkt poza prostą przechodzi co najwyżej jedna prosta rozłączna z daną

Adrien-Marie Legendre
(18.09.1752 – 10.01.1833)

Louis Legendre (Z. Belliard)

Adrien-Marie Legendre

Adrien-Marie Legendre and Joseph Fourier (Julien-Leopold Boilly , 1820)

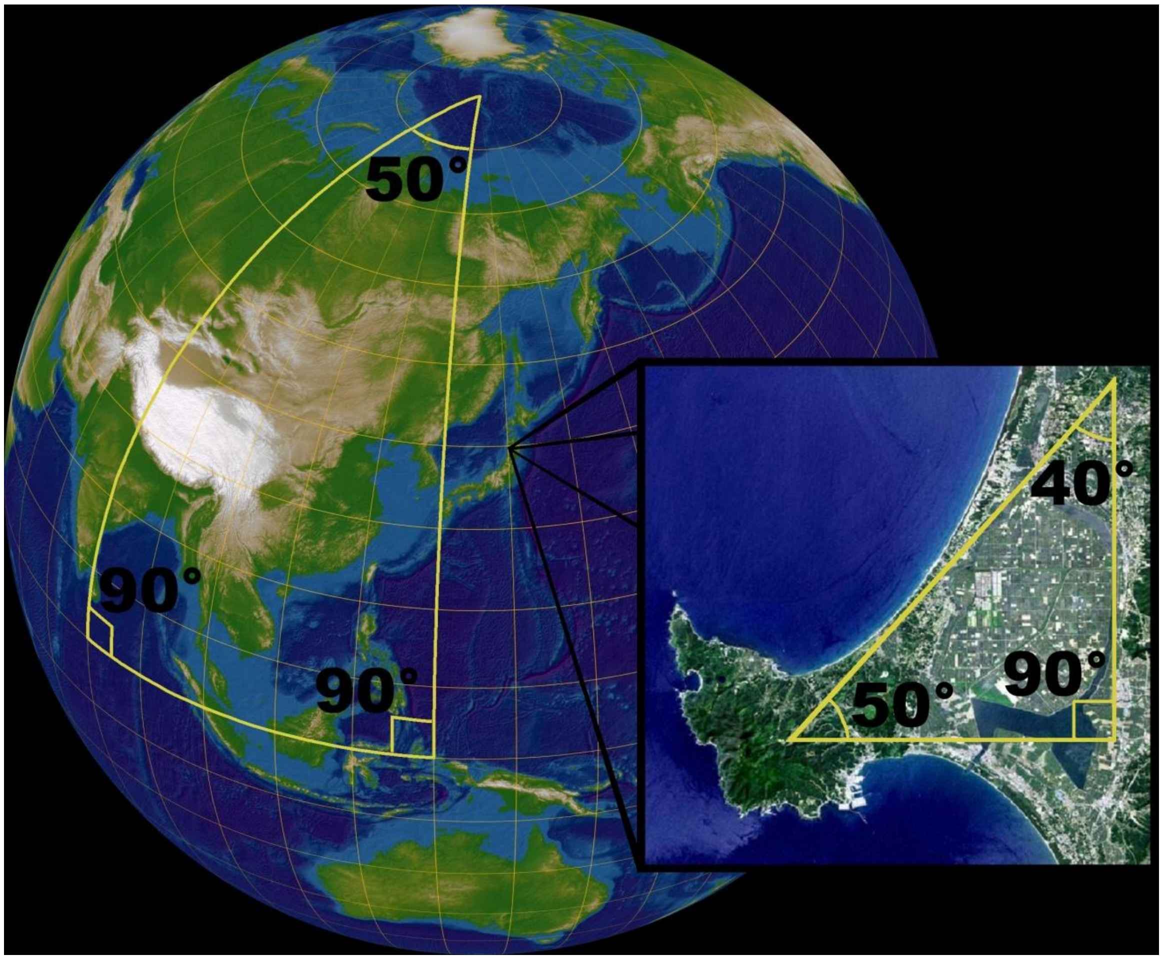
Postulat Legendre’a

Przez punkt wewnętrzny kąta ostrego można poprowadzić prostą przecinającą oba jego ramiona.

Trzy możliwe przypadki przy odrzuceniu V postulatu:

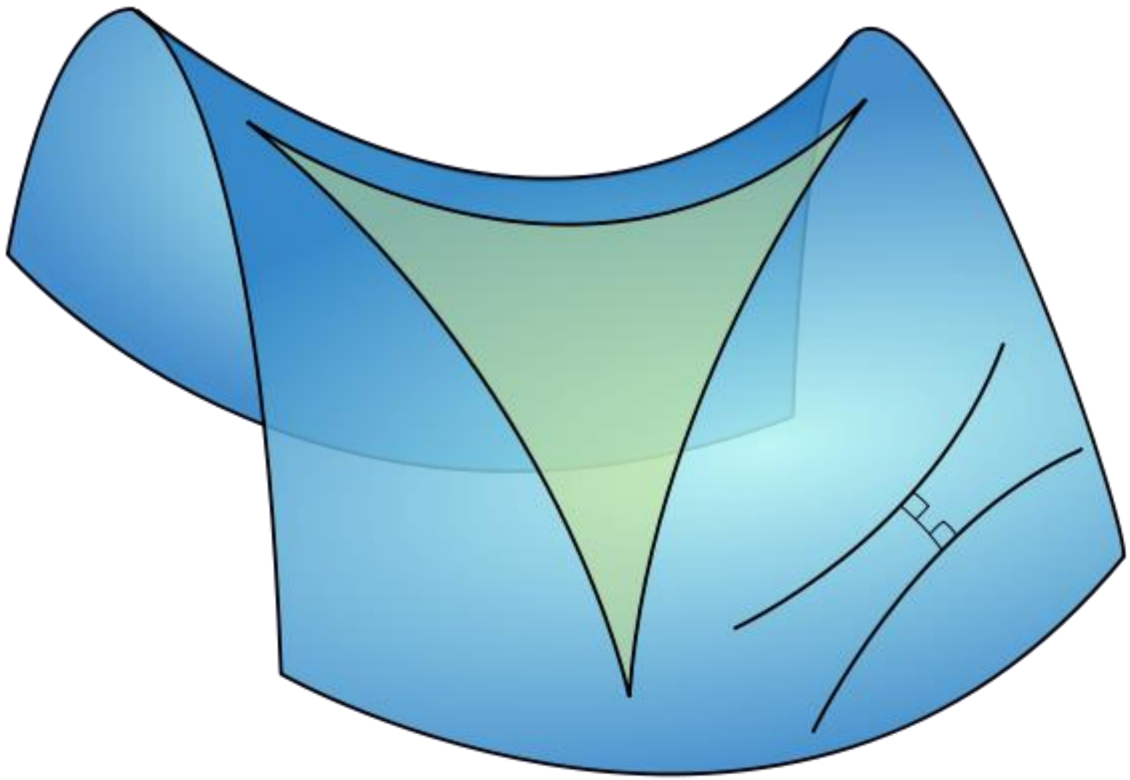
- Suma kątów w trójkącie jest równa 180°
- Suma kątów w trójkącie jest większa niż 180°
- Suma kątów w trójkącie jest mniejsza niż 180°

Trójkąt w geometrii sferycznej



Autor: Lars H. Rohwedder, Sarregouset na wikipedia

Trójkąt w geometrii hiperbolicznej



Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733)
Euklides oczyszczony z wszelkich wad(1733)

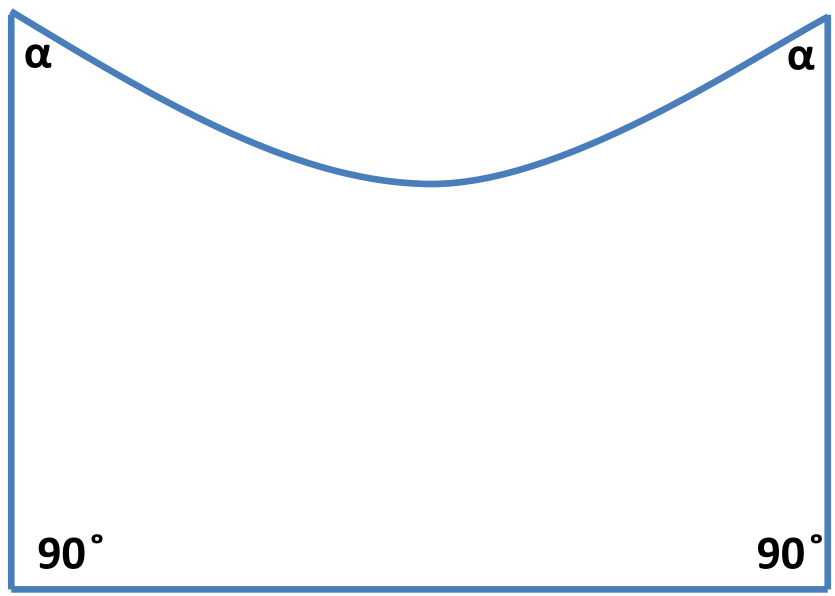
EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipſa univerſæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.
OPUSCULUM
EX.^{MO} SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.

Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permiſſu*

Czworokąt Saccheriego

Geometria absolutna – bez V postulatu



Hipoteza kąta ostrego
$\alpha < 90^\circ$

Hipoteza kąta rozwartego
$\alpha > 90^\circ$

Wniosek z hipotezy kąta ostrego

Istnieją proste asymptotyczne

tzn. zbliżające się do siebie nieograniczenie,

ale nie przecinające się.

Wniosek Saccheriego:

Co przeczy samej istocie linii prostej.

Immanuel Kant
(1724-1804)

Krytyka czystego rozumu

Kant zauważył, że matematyka to logiczna analiza stosunków czasowych (arytmetyka) lub przestrzennych (geometria).

Czas i przestrzeń to *aprioryczne* formy zmysłowości.

Jedyna możliwa geometria to geometria euklidesowa


Critik
der
reinen Vernunft

von
Immanuel Kant
Professor in Königsberg.

Riga,
verlegts Johann Friedrich Hartknoch
1781.

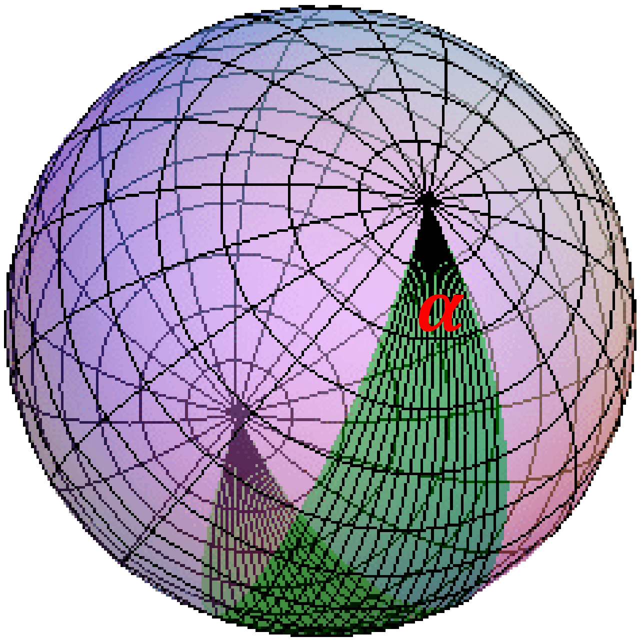
Pole wycinka sfery ograniczonego południkami

R to promień sfery
α to kąt pomiędzy południkami

$$\frac{pole\ wycinka}{pole\ sfery} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$pole\ wycinka = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi R^2$$

$$\boldsymbol{pole\ wycinka = 2\alpha R^2}$$



Pole trójkąta Δ na sferze o promieniu R

$W(\alpha), W(\beta), W(\gamma)$ wycinki na rysunku wyznaczone przez kąty α, β, γ

$PS(\Delta, k)$ polowa sfery ograniczonej przez koło k, w której zawiera się trójkąt Δ.

$PS(\Delta, k) = W(\alpha) \cup W(\beta) \cup W(\gamma)$ - antypodyczny trójkąt do Δ

$|PS(\Delta, k)| = |W(\beta)| + |W(\gamma)| - |\Delta|$

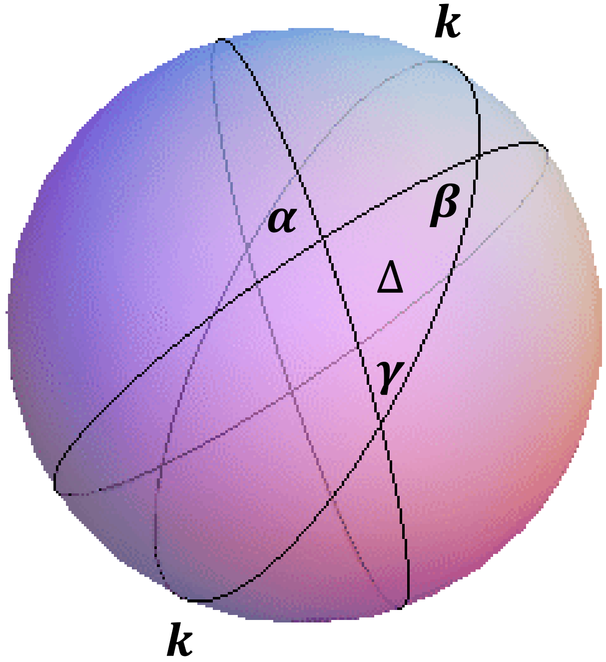
(bo $\Delta = W(\beta) \cap W(\gamma)$)

$+ |W(\alpha)| - |\Delta|$

(pole antypodycznego trójkąta do Δ)

$2\pi R^2 = 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 + 2\alpha R^2 - 2|\Delta|$

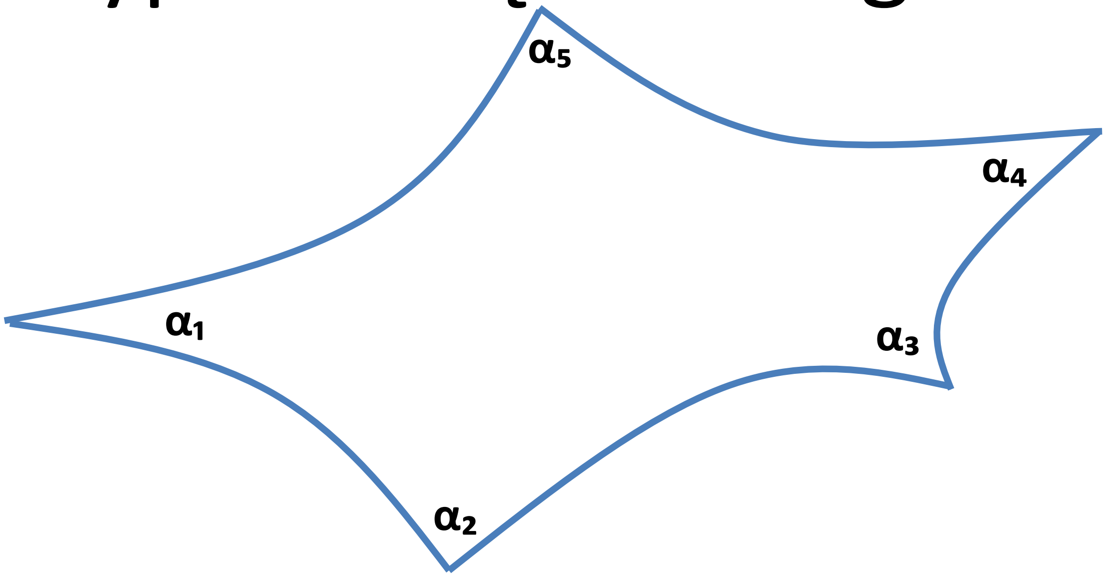
$$|\Delta| = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\pi})\boldsymbol{R}^2$$



Johann Heinrich Lambert

(26.08.1728 -25.09.1777)

Teoria równoległych Lamberta przypadek kąta ostrego



Pole n-kąta jest proporcjonalne do $(n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

Bo pole trójkąta o kątach α, β, γ to $-R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$
Geometria na sferze o urojonym promieniu
(kwadrat promienia ujemny)

Farkas Bolyai

(9.02.1775 – 20.11.1856)

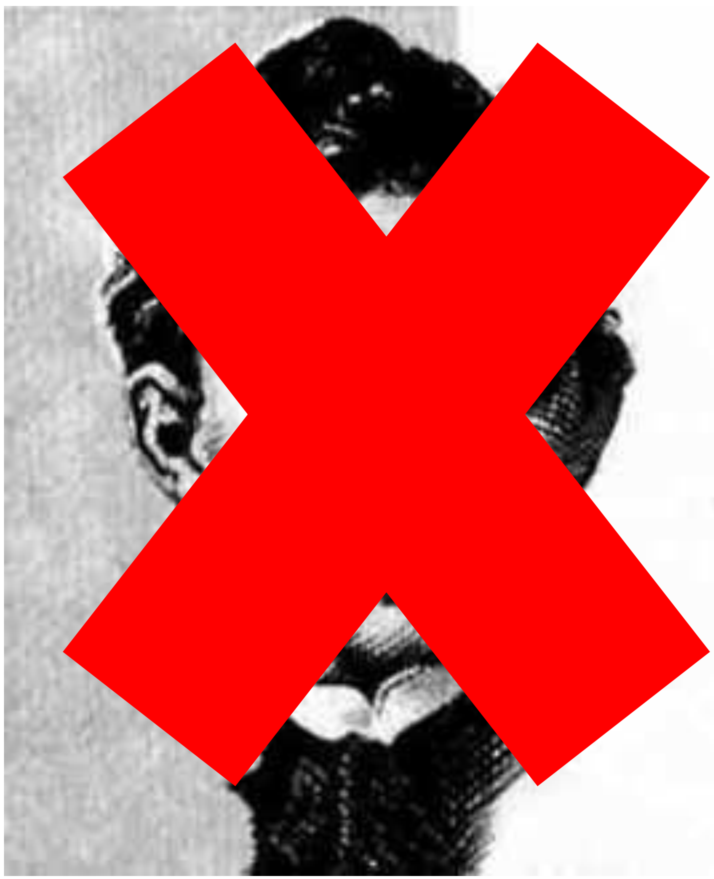
Kolega Gaussa ze studiów

„Dowód” V postulatu przy założeniu: Na trójkącie można opisać okrąg.

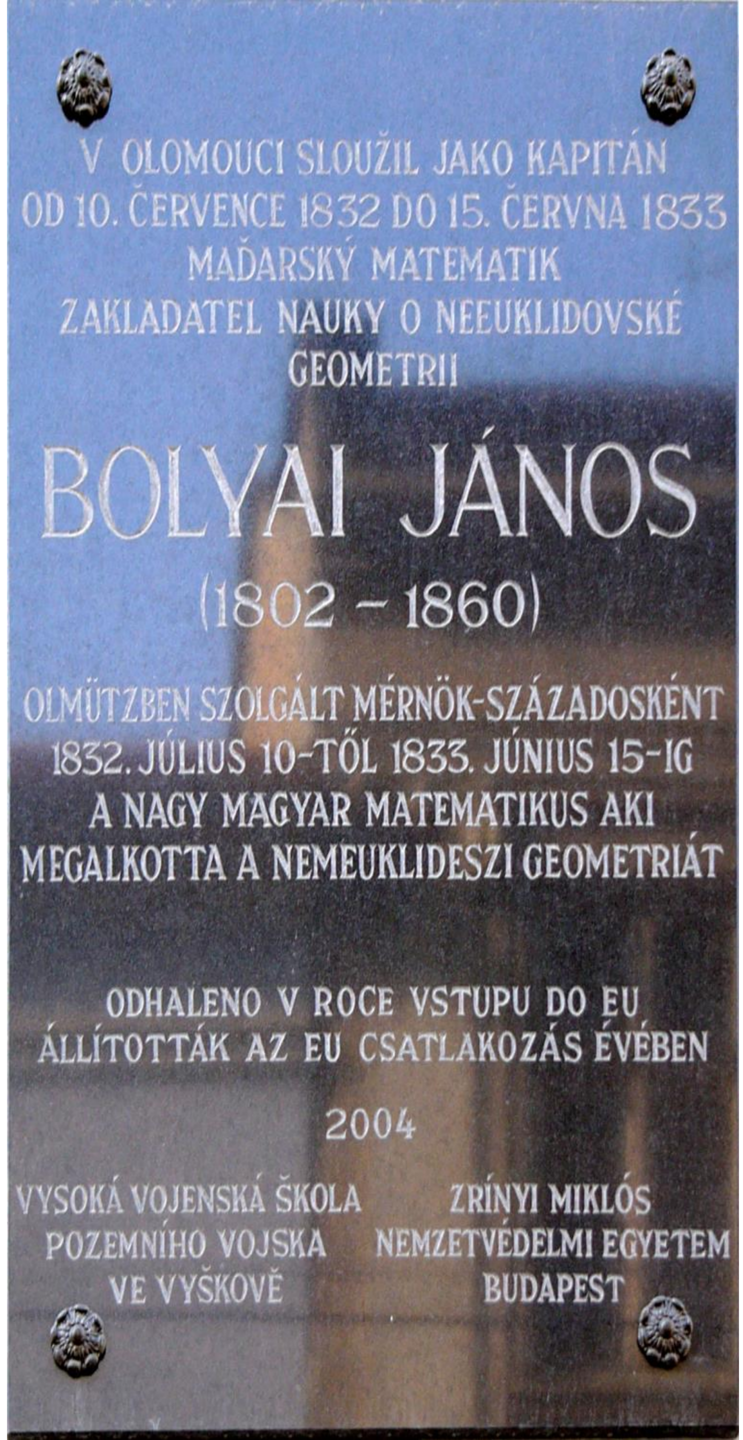
Korespondencja Gaussa

- 1804 (do Farkasa Bolyaia): *nie traci nadziei na dowód V postulatu*
- 1816 (do Schweikarta): *przez 2 tysiące lat nie posunięto się w tej sprawie ani o krok*
- 1817 (do Olbersa): *jedyność naszej geometrii nie może być wykazana przez umysł człowieka dla umysłu człowieka*
- 1819 (do Schweikarta): *umie rozwiązać każde zadanie z geometrii astralnej, jeżeli zna promień*
- 1824 (do Taurinusa): *wartości promienia nie można znaleźć wewnątrz geometrii astralnej*
- 1829 (do Bessela): *chyba nie opublikuje swoich wyników, bo boi się wrzasku Beotów*

János Bolyai




SENT
COSMETICE PRO
comercial
de închiriat
SPATIU DE INCHIRIAT
120 mp - TEL. 0744 - 523704
REVISTA STEAUA
ALMANAHUL LITERAR
CLUJ-NAPOCA
BROOKLYNSMITH



Zdjęcie: Michal Maňas
wikipedia

Listy

- Fakas Bolyai do syna:

Na miłość boską, zaklinam Cię porzuć to... To zniszczy Twoje zdrowie, pokój ducha i radość życia.

- Janos do ojca w 1823 ze studiów w Wiedniu

z niczego stworzyłem cały nowy świat

- Gauss do Fakasa Bolyaia:

Nie dziwi mnie, że syn mego przyjaciela zna moje wyniki.

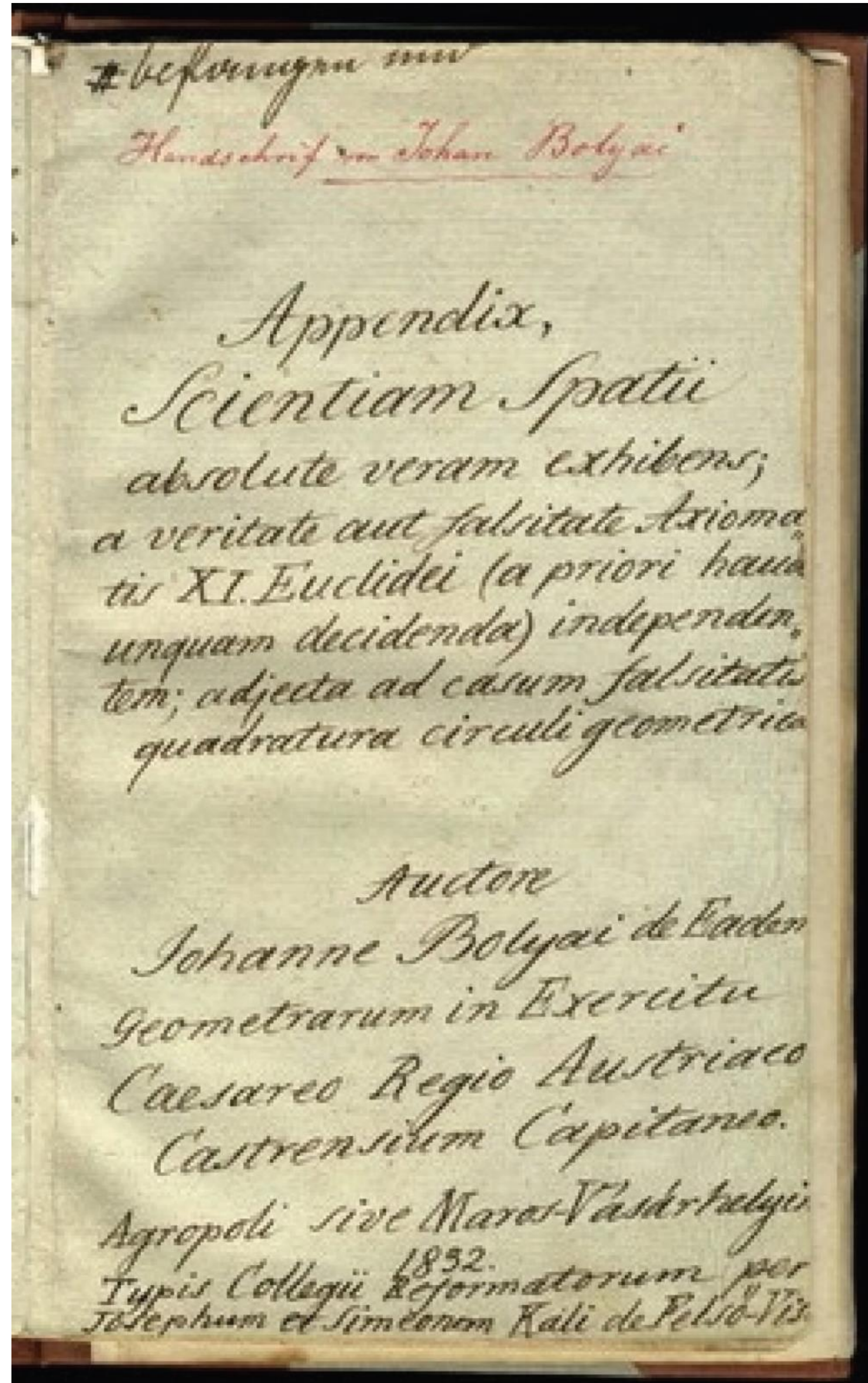
Ganić pracy nie mogę, gdyż jest poprawna, lecz chwalić też nie mogę, bo nie wypada chwalić siebie.

- Gauss o Janosu Bolyaiu do innego przyjaciela:

Uważam tego młodego geometrę Bolyaia za geniusza pierwszej klasy appendix do pracy

Tentamen Farkasa Bolyaia

1832



Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma
tis XI. Euclidei (a priori hau
unquam decidenda) independen
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyi
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis.

THE SCIENCE ABSOLUTE OF SPACE

Independent of the Truth or Falsity of Euclid's Axiom XI (which can never be decided a priori).

BY

JOHN BOLYAI

TRANSLATED FROM THE LATIN

BY

DR. GEORGE BRUCE HALSTED
PRESIDENT OF THE TEXAS ACADEMY OF SCIENCE

FOURTH EDITION.

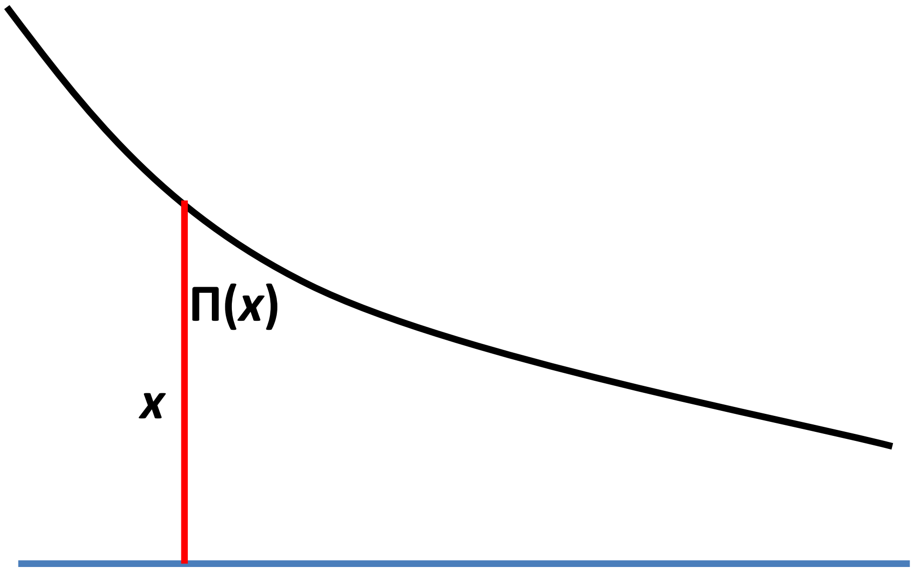
VOLUME THREE OF THE NEOMONIC SERIES

PUBLISHED AT
THE NEOMON
2407 Guadalupe Street
AUSTIN, TEXAS, U. S. A.
1896

Nikołaj Iwanowicz Łobaczewski

(ros. Николай Иванович Лобачевский, 1792-1856)

Kąt równoległości



$$\Pi(x) = arc\ ctg\ e^{\frac{x}{r}}$$

О началах геометрии
Kazań, 1826

Geometrische Untersuchungen

zur

Theorie der Parallellinien

von

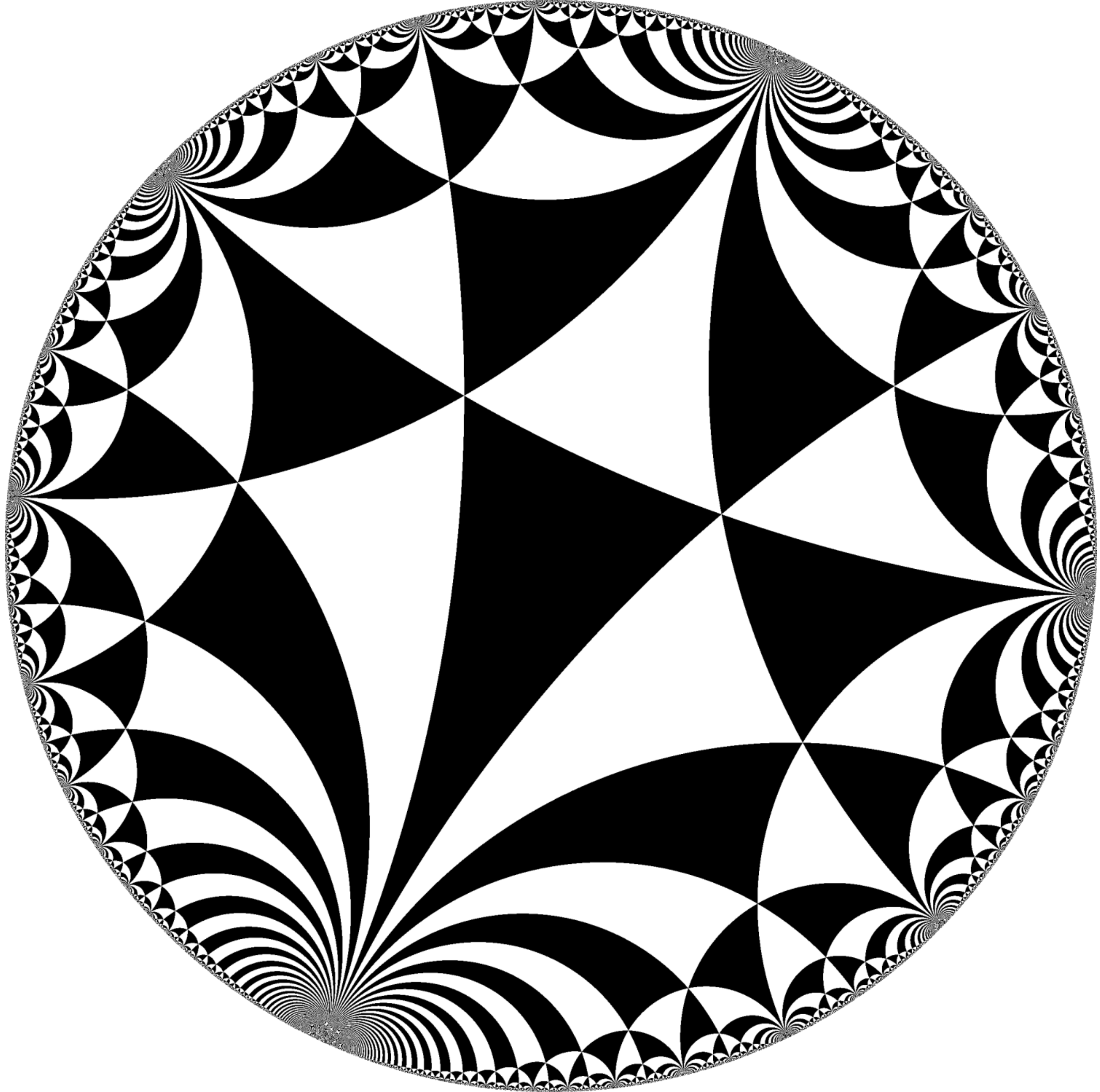
Nicolaus Lobatschewsky,

Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik
bei der Universität Kasan.

Berlin. 1840.

In der G. Fincke'schen Buchhandlung

Johann Christian Martin Bartels



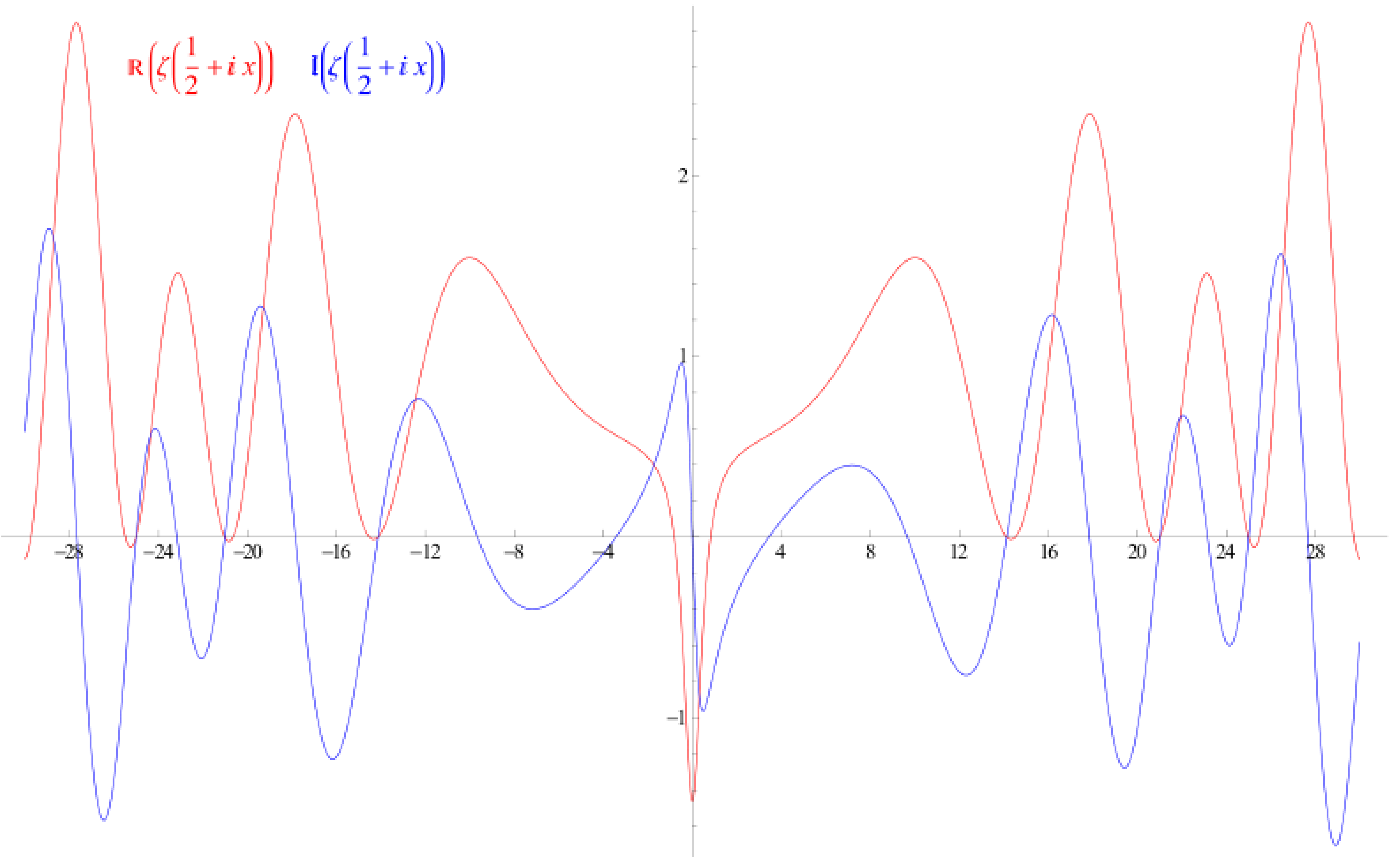
Georg Friedrich Bernhard Riemann

(ur. 17 września 1826 - zm. 20 lipca 1866)

Funkcja zeta Riemanna

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \qquad \sigma = \Re(s) > 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$


$\mathbb{R}\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+i\,x\right)\right)$
$\mathbb{I}\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+i\,x\right)\right)$
2
1
−1
−28
−24
−20
−16
−12
−8
−4
4
8
12
16
20
24
28
x

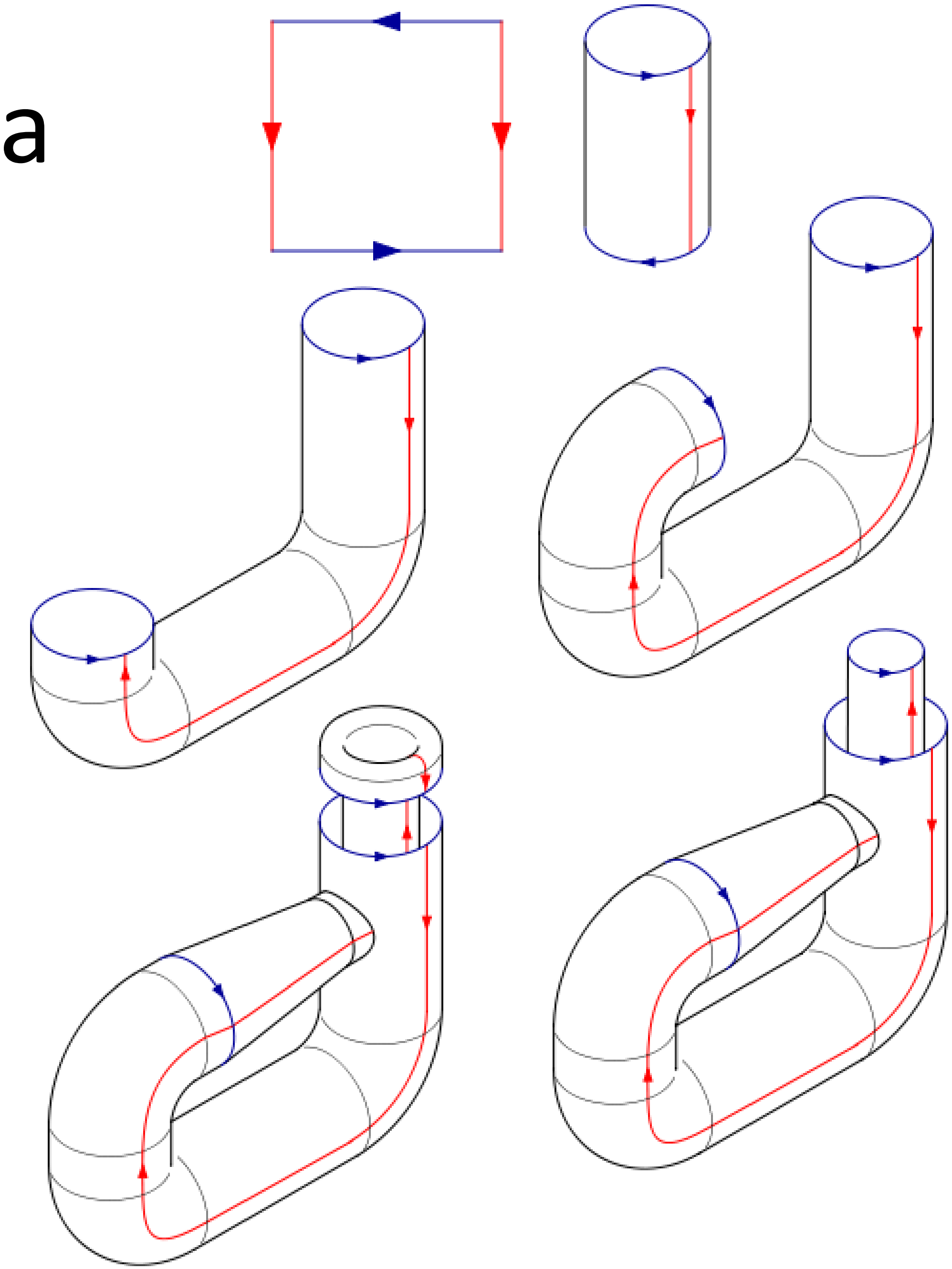
Felix Christian Klein

(ur. 25 kwietnia 1849 w Düsseldorfie, zm. 22 czerwca 1925 w Getyndze)

Program erlangeński Kleina 1872

- Geometria to dowolny zbiór obiektów (zwanych punktami) i pewna grupa przekształceń.
- Geometria taka zajmuje się badaniem tych własności układów punktów, które nie zmieniają się przy dowolnym przekształceniu obranej grupy.
- Własności te nazywają się *niezmiennnikami* danej grupy przekształceń.

Butelka Kleina



Augustin Louis Cauchy

(ur. 21 sierpnia 1789 w Paryżu, zm. 23 maja 1857 w Sceaux pod Paryżem)

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß

(ur. 31 października 1815 w Ostenfelde w Westfalii, zm. 19 lutego 1897 w Berlinie)

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

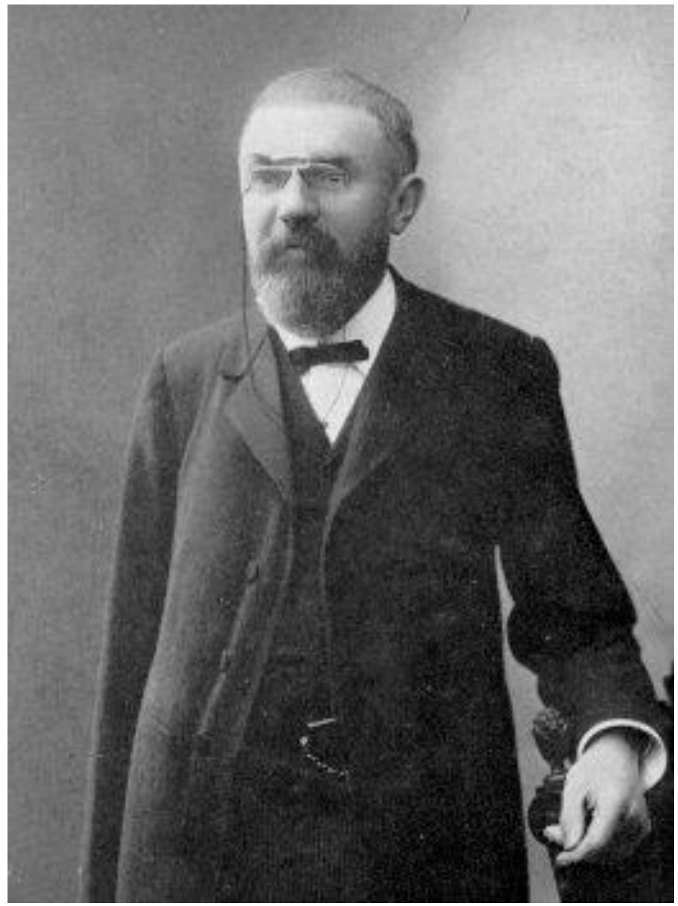
(ur. 3 marca 1845 w Sankt Petersburgu, zm. 6 stycznia 1918 w sanatorium w Halle)

Bertrand Arthur William Russell,

(ur. 18 maja 1872 r. w Ravenscroft (Monmouthshire),
zm. 2 lutego 1970 r. w Penrhyndeudraeth, Walia)

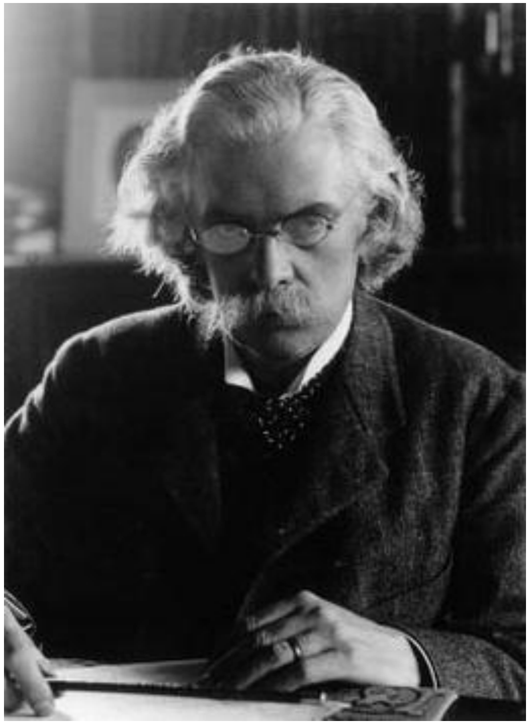
- *Fryzjer, mieszkaniec pewnego miasta, goli tych jego mieszkańców, którzy sami się nie golą. Czy fryzjer goli się sam?*

Jules Henri Poincaré
(1854-1912)



Król Szwecji, Oscar II
Problem n-ciał (1887)

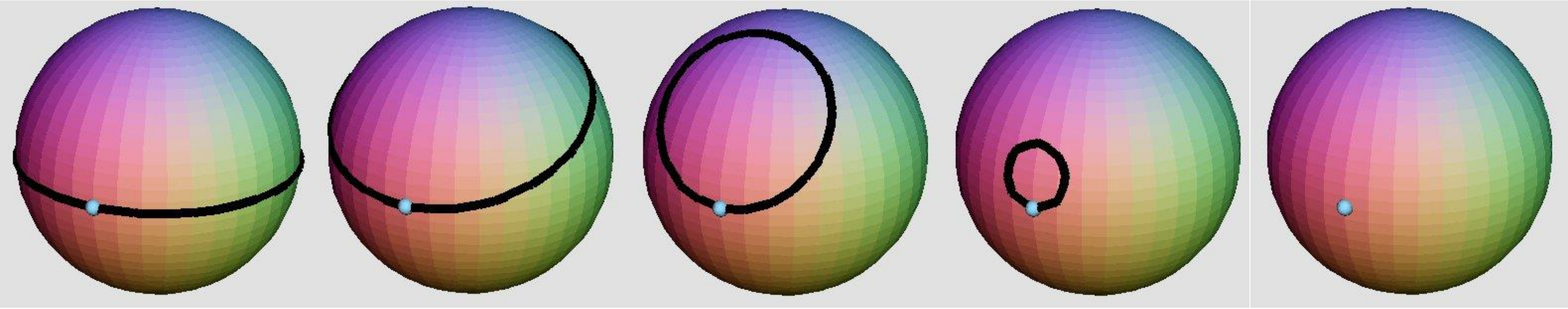
Magnus Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler



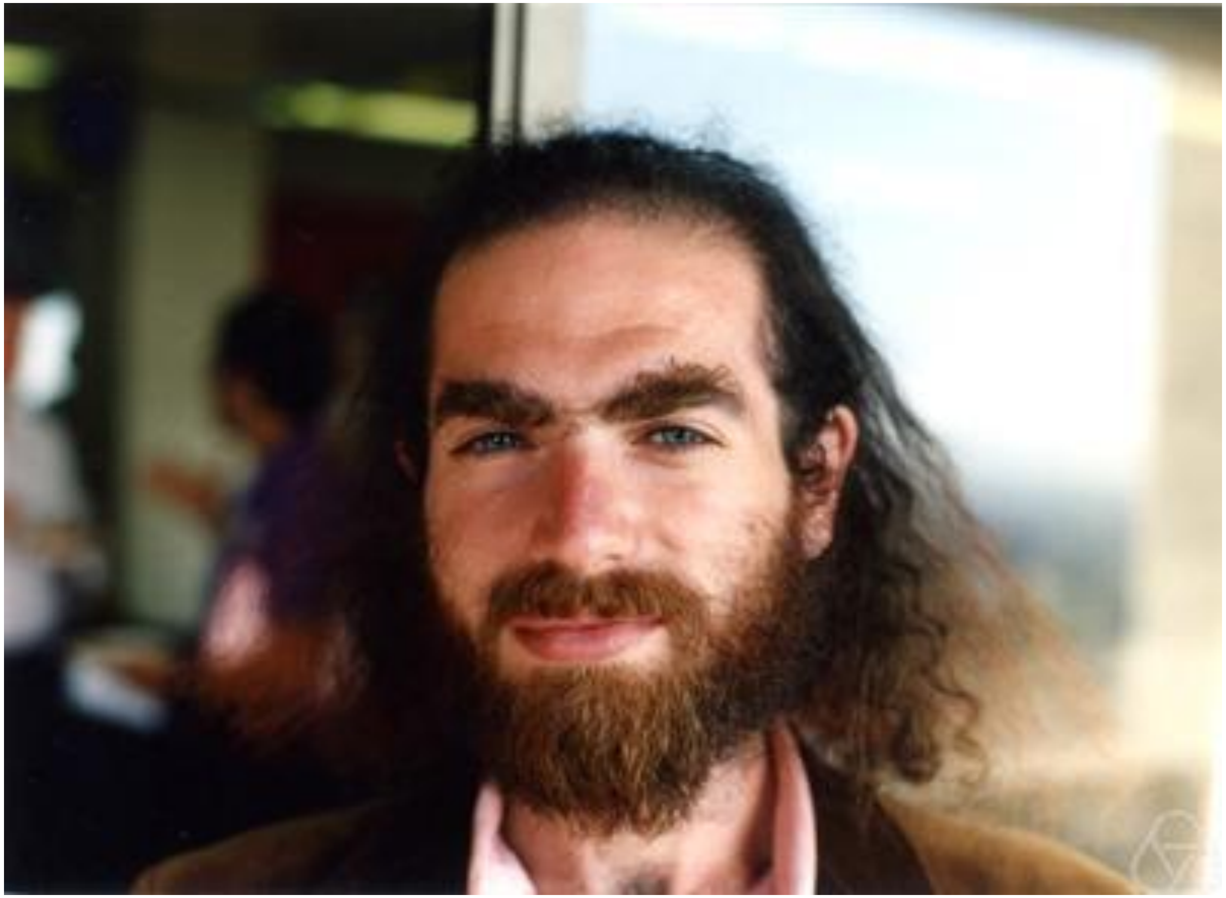
1911

Hipoteza Poincarégo

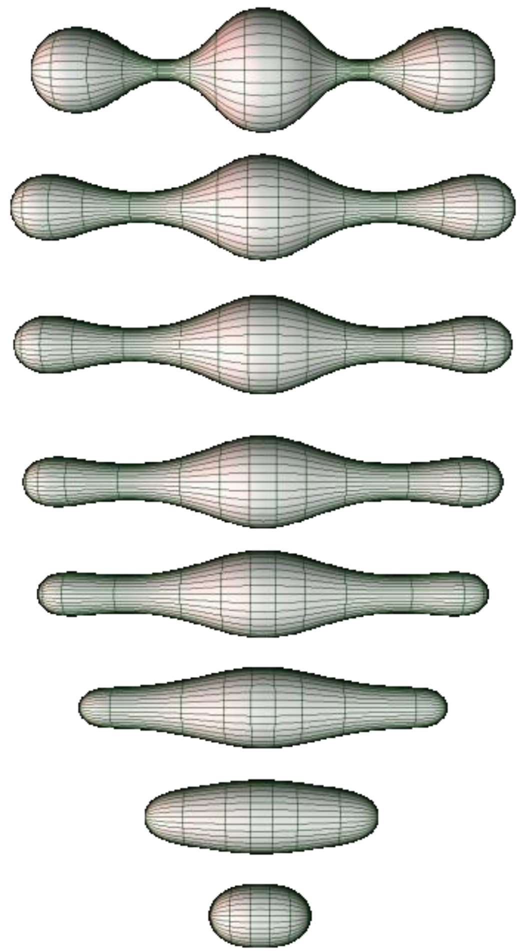
Każda trójwymiarowa zwarta i jednospójna rozmaitość topologiczna bez brzegu jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową



Grigori Perelman



Ricci flow (Richard Hamilton)



David Hilbert
(1862-1943)

Problemy Hilberta

W. Domitrz Krótki kurs historii matematyki

1 Hipoteza continuum (nie istnieje zbiór o mocy pośredniej pomiędzy mocą zbioru liczb całkowitych i liczb rzeczywistych)

Udowodniono, że hipoteza ta jest niezależna od aksjomatyki Zermelo-Fraenkla teorii mnogości. W oparciu o te aksjomaty nie można jej ani udowodnić, ani obalić.

2 Udowodnić niesprzeczność aksjomatów arytmetyki (tzn., że arytmetyka jest systemem formalnym, w którym nie jest możliwy dowód dwóch sprzecznych ze sobą twierdzeń)

Nie ma zgody co do rozstrzygnięcia, mający pomóc w rozwiązaniu problemu program Hilberta został podważony przez twierdzenie Gödla, jednak jest to wciąż przedmiotem debaty.

3 Czy mając dane dwa wielościany o równej objętości, można zawsze rozłożyć jeden z nich na skończoną liczbę wielościennych części, a następnie złożyć je w drugi?

Rozwiązany przez Maxa Dehna, który podał kontrprzykład.

4 Problem konstrukcji przestrzeni metrycznych, w których proste stanowią najkrótszą drogę pomiędzy punktami

Problem uznany za zbyt ogólnikowy, choć został rozstrzygnięty dla pewnych szczególnych przypadków.

5 Czy wszystkie ciągłe grupy są jednocześnie grupami Liego?

Rozwiązany w 1953 r. – dowodu dostarcza twierdzenie Gleasona-Montgomery'ego-Zippina.

6 Aksjomatyzacja całości fizyki

Problem został uznany za niematematyczny, rozwiązany tylko dla niektórych dziedzin.

cd. Problemy Hilberta

7 Czy liczba a^b, gdzie liczba algebraiczna a jest różna od 0 i 1, a b jest algebraiczną liczbą niewymierną, jest liczbą przestępną?

Rozwiązany – odpowiedzi pozytywnej udziela twierdzenie Gelfonda.

8 Hipoteza Riemanna (część rzeczywista każdego nietrywialnego zera funkcji dzeta jest równa ½) i hipoteza Goldbacha (każda liczba parzysta większa od 2 może być wyrażona jako suma dwóch liczb pierwszych)

Problem otwarty.

9 Dowód uogólnionego prawa wzajemności dla każdego algebraicznego ciała liczbowego

Rozwiązany częściowo. W 1927 r. Emil Artin podał dowód dla rozszerzeń abelowych (twierdzenie Artina o wzajemności). Przypadek ogólny pozostaje otwarty.

10 Przewidzenie rozwiązywalności każdego równania diofantycznego

Rozwiązany – zgodnie z twierdzeniem Matijasiewicza jest to niemożliwe.

11 Rozwiązywanie form kwadratowych z dowolnymi algebraicznymi współczynnikami liczbowymi

Rozwiązany w 1924 r. przez Helmuta Hassego.

12 Rozszerzenie twierdzenia Kroneckera-Webera o ciałach abelowych na dowolne algebraiczne ciała liczbowe

Problem otwarty.

cd. Problemy Hilberta

13 Rozwiązywanie wszystkich równań 7. stopnia przy użyciu funkcji dwóch zmiennych

Rozwiązany. Możliwość rozwiązania wszystkich takich równań udowodnił Władimir Arnold razem z Andriejem Kołmogorowem

14 Dowód skończoności konstrukcji pewnych podpierścieni

Rozwiązany. Odpowiedź przecząca z uwagi na kontrprzykład znaleziony w 1959 r. przez Masayoshi Nagatę.

15 Ścisłe sformułowanie rachunku Schuberta

Rozwiązany w 1930 r. przez Van der Waerdena.

16 Postulat badań nad topologią krzywych i powierzchni algebraicznych

Problem otwarty.

17 Wyrażenie określonych funkcji rzeczywistych jako ilorazu sum kwadratów

Rozwiązany. Znaleziono górne ograniczenie dla liczby wymaganych składników.

18 Czy istnieje nieforemny wielościan pozwalający na wypełnienie przestrzeni? Jakie jest najgęstsze upakowanie sfer?

Rozwiązany, ale dowód postulatu Keplera wciąż czeka na powszechną akceptację.

cd. Problemy Hilberta

19 Czy rozwiązania lagranżjanów są zawsze analityczne?

Rozwiązany. Odpowiedź twierdząca. Dowód podany przez Ennio de Giorgiego oraz niezależnie, z wykorzystaniem innego aparatu, przez Johna Forbesa Nasha.

20 Czy wszystkie zadania rachunku wariacyjnego z określonymi warunkami brzegowymi mają rozwiązania?

Rozwiązany. Obszar intensywnych i szeroko zakrojonych badań w XX w.; wieloletnie wysiłki zwieńczone w 1998 r. skonstruowaniem dowodu dla przypadku nieliniowego.

21 Dowód istnienia liniowych równań różniczkowych z przypisanymi grupami monodromii

Rozwiązany w 1957 r. przez Helmuta Rörla. Odpowiedź twierdząca lub przecząca, w zależności od bardziej szczegółowego sformułowania problemu.

22 Uniformizacja relacji analitycznych przy pomocy funkcji automorficznych

Rozwiązany w 1907 r. przez Henriego Poincarégo.

23 Dalszy rozwój rachunku wariacyjnego

Rozwiązany.

Bibliografia

•Marek Kordos ,,Wykłady z historii matematyki” SCRIPT, Warszawa 2006.
•Witold Więsław ,,Matematyka i jej historia”, NOWIK, Opole 1997.
•Simon Gindikin ,,Tales of mathematicians and physicists” Springer, 2007.
•Leszek Kołakowski ,,Mini wykłady o maxi sprawach” Wyd. Znak, Kraków 2004.
•Ian Stewart ,,Oswajanie nieskończoności. Historia matematyki” Prószyński i S-ka, Warszawa 2010.
•Wikipedia, hasła różne i linki zewnętrzne do nich.
•Michał Szurek ,,Matematyka dla humanistów” RTW, Warszawa 2000.
•Philip J. Davis, Reuben Hersh ,,Świat matematyki” Warszawa PWN 1994.
•Marcus du Sautoy „The Story of Maths”, Serial BBC4, 2008 (w Polsce ,,Historia matematyki” Planete) http://open2.net/storyofmaths/abouttheseries.htm
•Izabela Bondecka-Krzykowska „Przewodnik po historii matematyki ” Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2006.
•Dirk J. Struik „Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku” Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1963.
•„Historia matematyki” pod redakcją A. P. Juszkiewicza, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.
•Dénes, Tamás „Real Face of János Bolyai”, *Notices of the American Mathematical Society* **58** (1): 41–51.
•Penrose, Roger „Droga do rzeczywistści”, Prószyński i S-ka, Warszawa 2004.