Wzór Dobińskiego

Julia Strzelczyk, Łukasz Wyszomierski, Marek Mączka

Kierunek: Matematyka i Analiza Danych
Przedmiot: Krótki Kurs Historii Matematyki

styczeń 2025

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Rozważmy szereg postaci $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}$. Oczywiście wiemy, że

$$1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e.$$

Ponieważ

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

oraz

$$e = 1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \ldots,$$

to przez dodanie otrzymujemy:

$$2e = 1 + 2 + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{5}{4!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!}.$$

Zatem zachodzi równość:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = 2e.$$

Mamy

$$
\begin{aligned}
2e &= 1 + 2 + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{5}{4!} + \dots \\
2e &= \quad\;\; 1 + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \frac{16}{4!} + \dots \\
e &= \quad\;\; 1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \dots .
\end{aligned}
$$

Dodając do siebie powyższe równości, otrzymujemy:

$$5e = 1 + 4 + \frac{9}{2!} + \frac{16}{3!} + \frac{25}{4!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k-1)!}.$$

Zatem zachodzi równość:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k!} = 5e.$$

Pytanie

Jakie wartości przyjmuje suma szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

dla $n = 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$?

Wzór

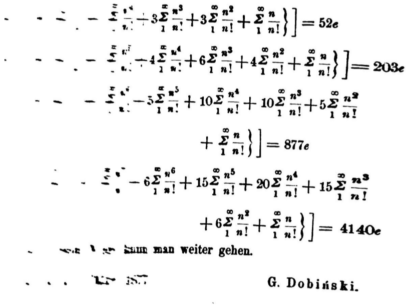
Summirung der Reihe $\Sigma \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Ilustracja: Problem postawiony przez G. Dobińskiego w 1877 roku[1]

Z wzoru Dobińskiego wynika, że istnieje relacja między n-tą liczbą Bella, czyli liczbą podziałów zbioru n-elementowego i sumą powyższego szeregu. Zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} = B_n \cdot e$$

[1] Archiv der Mathematik und Physik 61 (1877), 333



$$\ldots \sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} + 3\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} + 3\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \sum_1^\infty \frac{n}{n!}\Big\}\Big] = 52e$$

$$\ldots \sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} + 4\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} + 6\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} + 4\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \sum_1^\infty \frac{n}{n!}\Big\}\Big] = 203e$$

$$\ldots \sum_1^\infty \frac{n^6}{n!} + 5\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} + 10\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} + 10\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} + 5\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \sum_1^\infty \frac{n}{n!}\Big\}\Big] = 877e$$

$$\ldots \sum_1^\infty \frac{n^7}{n!} + 6\sum_1^\infty \frac{n^6}{n!} + 15\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} + 20\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} + 15\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} + 6\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \sum_1^\infty \frac{n}{n!}\Big\}\Big] = 4140e$$

... kann man weiter gehen.

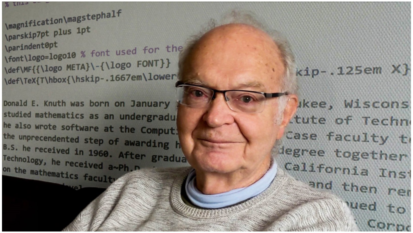
G. Dobiński.

Ilustracja: Podpis G. Dobińskiego w książce[2]

Autorem jest osoba podpisująca się G. Dobiński. Niestety nie wiadomo o nim zbyt wiele.

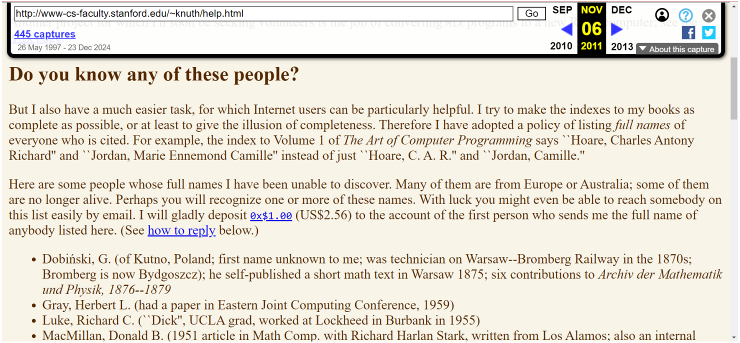
[2] Archiv der Mathematik und Physik 61 (1877), 336

Jego osobą interesował się Donald Knuth - jeden z pionierów informatyki.



Ilustracja: Zdjęcie przedstawiające Donalda Knutha[3]

[3] Donald Knuth, emerytowany profesor informatyki na Uniwersytecie Stanforda, Autor: Pavel Kasík, Technet.cz



http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/help.html Go SEP NOV DEC

445 captures 06

26 May 1997 - 23 Dec 2024 2010 2011 2013 About this capture

Do you know any of these people?

But I also have a much easier task, for which Internet users can be particularly helpful. I try to make the indexes to my books as complete as possible, or at least to give the illusion of completeness. Therefore I have adopted a policy of listing *full names* of everyone who is cited. For example, the index to Volume 1 of *The Art of Computer Programming* says ``Hoare, Charles Antony Richard'' and ``Jordan, Marie Ennemond Camille'' instead of just ``Hoare, C. A. R.'' and ``Jordan, Camille.''

Here are some people whose full names I have been unable to discover. Many of them are from Europe or Australia; some of them are no longer alive. Perhaps you will recognize one or more of these names. With luck you might even be able to reach somebody on this list easily by email. I will gladly deposit `0x$1.00` (US$2.56) to the account of the first person who sends me the full name of anybody listed here. (See how to reply below.)

- Dobiński, G. (of Kutno, Poland; first name unknown to me; was technician on Warsaw--Bromberg Railway in the 1870s; Bromberg is now Bydgoszcz); he self-published a short math text in Warsaw 1875; six contributions to *Archiv der Mathematik und Physik, 1876--1879*
- Gray, Herbert L. (had a paper in Eastern Joint Computing Conference, 1959)
- Luke, Richard C. (``Dick'', UCLA grad, worked at Lockheed in Burbank in 1955)
- MacMillan, Donald B. (1951 article in Math Comp. with Richard Harlan Stark, written from Los Alamos; also an internal

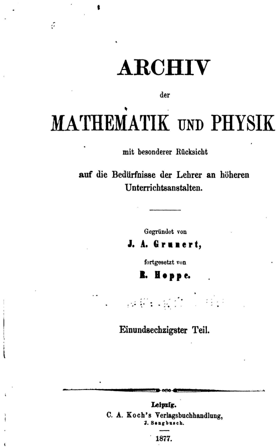
Ilustracja: Strona D. Knutha[4]

[4] Donald Knuth, *Do you know any of these people?*

Życiorys

- Prawdopodobnie nazywał się Donald Gabriel Dobiński.
- Urodził się w połowie XIX wieku w Starej Wsi, 4 km od Kutna.
- Jego żoną była Karolina Kruszyńska p.v. Tintz.
- Pracował na kolei warszawsko-bydgoskiej w latach 70. XIX wieku i opracował "Bezpieczny system dla kolei na modłę układu o zapobieganiu zderzeniom na morzu".

Sześć razy opublikował swoje teksty w Archiv der Mathematik und Physik w latach 1876–1879.



ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Einundsechzigster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

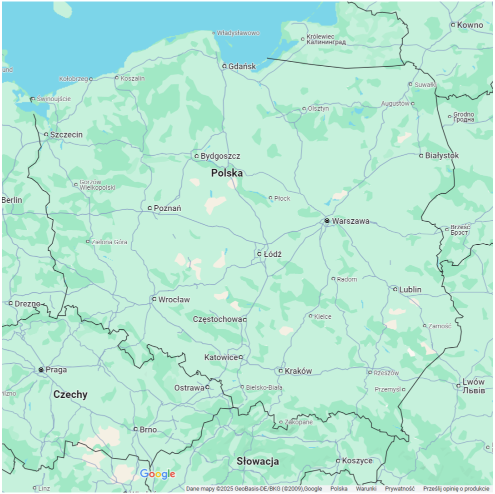
J. Sengbusch.

1877.

Ilustracja: Strona tytułowa Archiv der Mathematik und Physik z 1877 roku[5]

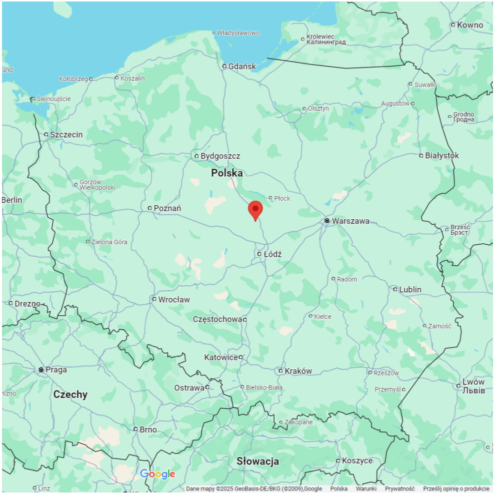
[5] Archiv der Mathematik und Physik 61 (1877), 2

Gdzie leży Kutno?



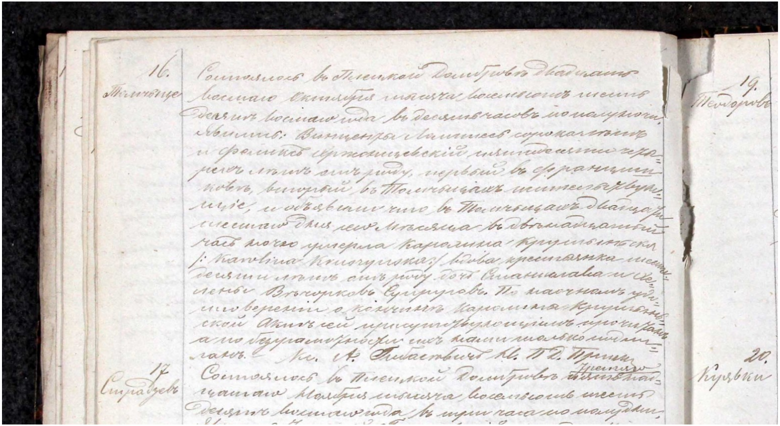
Ilustracja: Mapa Polski

Tutaj!



Ilustracja: Mapa Polski z zaznaczonym Kutnem

Karolina Kruszyńska



Ilustracja: Wpis w księdze kościelnej o Karolinie Kruszyńskiej[6]

[6] Akta stanu cywilnego Parafii Rzymskokatolickiej w Pleckiej Dąbrowie, rok 1868, Zgony, wpis 16.

Podziały

Definicja

Podziałem zbioru A nazywamy rodzinę zbiorów $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ (zwanych blokami podziału) taką, że:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$,
2. $\forall_{i,j \in [n],\, i \neq j}\ A_i \cap A_j = \emptyset$,
3. $\forall_{i \in [n]}\ A_i \neq \emptyset$.

Liczby Bella

Definicja

Liczbą Bella (ozn. B_n) dla $n \in \mathbb{N}$ nazywamy liczbę podziałów zbioru n-elementowego.

Uwaga

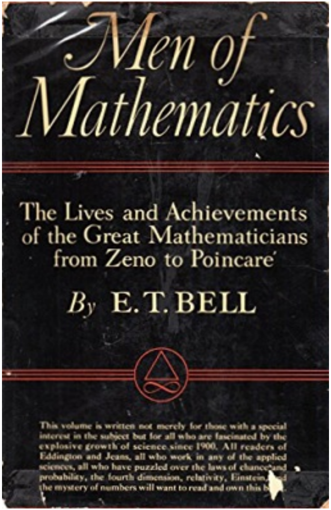
$B_0 = 1$, gdyż rodzina pusta jest jedynym podziałem zbioru pustego.

Eric Temple Bell

Ilustracja: Szkic Carla Rudolpha Gista przedstawiający Erica Temple Bella, 1931

Życiorys

- Urodził się 7. lutego 1883 roku w Peterhead w Szkocji.
- Był matematykiem, pisarzem science fiction oraz popularyzatorem historii matematyki.
- Został nagrodzony Nagrodą Pamięci Bôchera (Bôcher Memorial Prize) w 1923 roku.



Ilustracja: Okładka książki *Men of Mathematics*[7]

[7] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, 1937 First edition

'Bell... had a rare gift for words as well as numbers. Those who have witnessed the deep truths of mathematics, Bell wrote, "have experienced something no jellyfish has ever felt."He had a knack for pithily summing up a man's character: Pythagoras, Bell said, whose mysticism had hobbled his mathematics, was "one-tenth genius, nine-tenths sheer fudge."And if Bell's prose was at times flowery, The Last Problem and his better-known 1937 work, Men of Mathematics, sowed the seeds of mathematical interest in three generations of readers.'

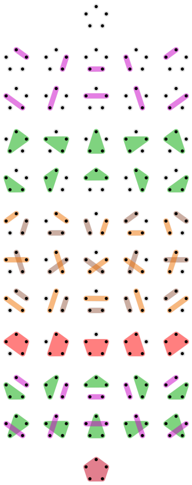
Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers*[8]

[8] Paul Hoffman (1998), The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth, Hyperion, p. [1], ISBN 978-0-7868-6362-4

Obserwacja

Dla ułatwienia zapisu rozpatrzmy zbiór $A := [n]$.

- $B_0 = 1$,
- $B_1 = 1$, gdyż jedyny podział zbioru $\{1\}$ to $\{1\}$,
- $B_2 = 2$, gdyż podziałami zbioru $\{1, 2\}$ są:
  1. $\{\{1, 2\}\}$,
  2. $\{\{1\}, \{2\}\}$,
- $B_3 = 5$, gdyż podziałami zbioru $\{1, 2, 3\}$ są:
  1. $\{\{1, 2, 3\}\}$,
  2. $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$,
  3. $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$,
  4. $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$,
  5. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.



Ilustracja: Podział 5-elementowego zbioru[9]

[9] T. Piesk, The 52 partitions of a set with 5 elements

Twierdzenie

Twierdzenie (Wzór Dobińskiego)

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!},$$

gdzie B_n jest n-tą liczbą Bella.

Dowód

Najpierw udowodnimy następującą zależność rekurencyjną miedzy liczbami Bella:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i \tag{1}$$

Istotnie, rozważmy zbiór X o $(n+1)$ elementach. Liczba jego podziałów podziałów to $B(n+1)$. Z drugiej zaś strony ustalmy element $x \in X$. Policzymy ile jest podziałów zbioru X takich, że blok zawierający x ma dokładnie $i+1$ elementów dla $i = 0, \dots, n$. Pozostałe i elementów tego bloku możemy wybrać ze zbioru $X \setminus \{x\}$ na $\binom{n}{i}$ sposobów. Każdy taki blok można rozbudować do podziału zbioru X poprzez podzielenie pozostałych $n-i$ elementów na bloki, co możemy zrobić na $B(n-i)$ sposobów. Sumując po wszystkich możliwych wartościach i otrzymujemy:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$$

Rozważmy teraz funkcję tworzącą dla ciągu liczb Bella:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$$

Aby przekształcić ten wzór zacznijmy od przemnożenia obustronnie własności (1) przez $\frac{x^n}{n!}$:

$$B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i \right) \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

Ponieważ równość (2) zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem możemy zsumować wszystkie powyższe równości:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1} x^n}{n!}}_{F'(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i \right) \frac{x^n}{n!} \tag{3}$$

Teraz zajmiemy się przekształceniem prawej strony równości (3). Pokażemy, że zachodzi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i\right)\frac{x^n}{n!}=F(x)e^x \tag{4}$$

Istotnie:

$$F(x)e^x=F(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) \tag{5}$$

Aby uprościć to wyrażenie znajdziemy wzór na iloczyn funkcji tworzących. Niech $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ oraz $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Wówczas:

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) =$$

$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

gdzie $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Korzystając z uzyskanej zależności otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{B_i}{i!}\cdot\frac{1}{(n-i)!}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i\right)x^n \tag{6}$$

Zatem udowodniliśmy równość (4). Podstawiając ją do równości (3) otrzymujemy:

$$F'(x)=F(x)e^x$$

$$\frac{dF}{dx}=Fe^x\Rightarrow\int\frac{1}{F}dF=\int e^x dx$$

$$\Rightarrow \ln(F(x))=e^x+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\exp(e^x+C)$$

Aby wyznaczyć stałą C skorzystamy z zależności: $F(0) = 1$. Podstawiając:

$$e^{1+C} = 1 \Rightarrow 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór na funkcję tworzącą ciągu liczb Bella:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = \exp(e^x - 1) \tag{7}$$

Rozwińmy $\exp(e^x)$ w szereg Taylora:

$$\exp(e^x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \exp(e^x - 1) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \tag{8}$$

Porównując współczynniki przy x^n we wzorze (7) oraz (8) otrzymujemy:

$$\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{k^n}{n!}=\frac{B_n}{n!}\Rightarrow B_n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!} \tag{9}$$

Inne zachowane własności i przykłady Dobińskiego

$$\prod_{k=0}^{\infty} \tan^{\frac{1}{2^k}}(2^k x) = 4\sin^2 x \qquad [10]$$

$$\pi = \frac{1}{\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2^k}}{\left(2^k \cos\frac{\pi}{2^k}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}} \qquad [11]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\frac{2}{k^2} = \frac{3\pi}{4} \qquad [12]$$

[10] G. Dobiński, Archiv der Mathematik und Physik 59 (1876), 98-100
[11] G. Dobiński, Archiv der Mathematik und Physik 63 (1879), 380-392
[12] G. Dobiński, Archiv der Mathematik und Physik 63 (1879), 393-400

Dziękujemy za uwagę!

Czy macie Państwo pytania?

Prezentacja przygotowana na potrzeby zajęć Krótkiego Kursu Historii Matematyki w ramach programu kierunku

Matematyka i Analiza Danych, 2024/2025