CAŁKOWITA HISTORIA CAŁKI...

Agnieszka Maciejczyk, Emilia Latko
Krótki Kurs Historii Matematyki
2024/2025
Wydział MiNI
Politechnika Warszawska

POCZĄTKI CAŁKI

JUŻ W STAROŻYTNOŚCI ZACZĘTO UŻYWAĆ MIARY. KLUCZOWYM ELEMENTEM BYŁO WPROWADZENIE PRZEZ STAROŻYTNYCH POJĘCIA LICZB RZECZYWISTYCH.

NA POCZĄTKU STAROŻYTNI PRÓBOWALI PORÓWNYWAĆ PRZEZ CIĘCIE FIGUR NA MNIEJSZE KAWAŁKI I UKŁADANIE Z NICH INNYCH, ZNANYCH JUŻ, KSZTAŁTÓW. NIESTETY SPOSÓB TEN BYŁ BARDZO OGRANICZONY.

PRZED **EUDOKSOSEM Z KNIDOS** (OK. 407 – 355 P.N.E) BYŁ TO JEDYNY SPOSÓB, DOPIERO ON DOSTARCZYŁ WRAZ Z LICZBAMI RZECZYWISTYMI METODY DOKONYWANIA POMIARÓW, WPROWADZIŁ MIARĘ, KTÓRA PRZETRWAŁA DO XVII WIEKU, JEDNAK ZOSTAŁA NIECO BARDZIEJ DOPRACOWANA.

PIERWSZA METODA CAŁKOWANIA – CAŁKA EUDOKSOSA

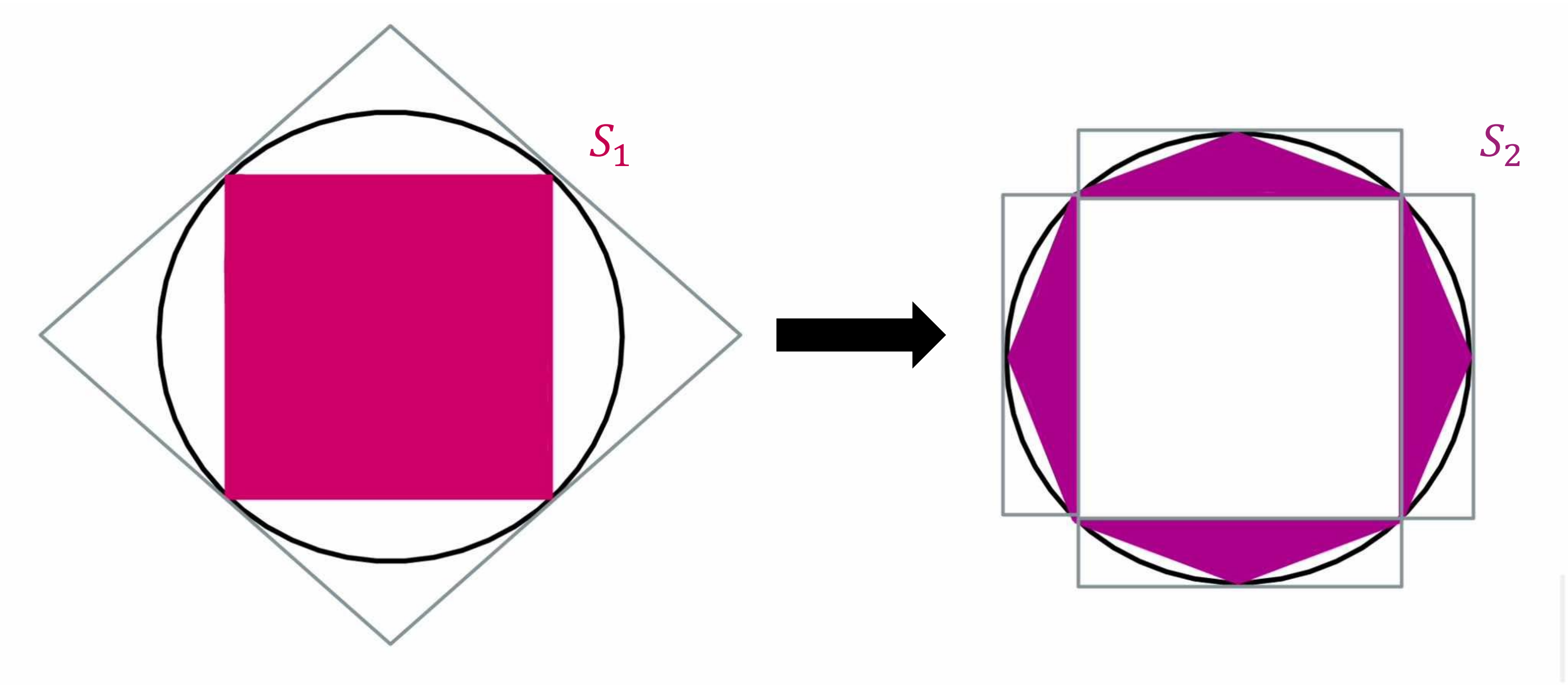
- Pierwszą udokumentowaną starożytną techniką wyliczania całek była **metoda wyczerpywania („całkowanie starożytnych”)** stworzona przez greckiego matematyka i astronoma **Eudoksosa** (ok. 370 r. p.n.e)
- Metoda ta została później rozwinięta i wykorzystana przez **Euklidesa** i **Archimedesa** m.in. do wyliczenia pola koła, pola powierzchni i objętości kuli, pola elipsy, pola pod parabolą i obszaru spirali.
- Jest uważana za prekursora rachunku różniczkowego, jednak rozwój geometrii analitycznej i zintegrowanego rachunku całkowego wyparł ją z użycia.

ALGORYTM METODY WYCZERPYWANIA

1. Z figury, którą chcemy zmierzyć, wyjmujemy jej część, której miarę znamy, przy czym musi być ona większa od połowy całej figury (co trzeba udowodnić :)). Miarę tej części oznaczamy przez S1.

2. Z pozostałą częścią figury postępujemy tak samo otrzymując kolejno S2, S3,... za każdym razem wyjmując więcej niż połowę tego, co jeszcze zostało.

WYKORZYSTANIE METODY WYCZERPYWANIA PRZEZ ARCHIMEDESA



Krok 1: Wycięcie kwadratu z koła, którego pole jest większe niż połowa pola koła

Krok 2: Z pozostałej części wycinamy 4 trójkąty równoramienne

itd.

EUDOKSOS TWIERDZI, ŻE SUMA S1 + ... + SN TYM LEPIEJ PRZYBLIŻA MIARĘ FIGURY, IM WIĘKSZE JEST N ORAZ, ŻE NIESKOŃCZONA SUMA DAJE MIARĘ CAŁEJ FIGURY.

Dowód:

Do udowodnienia metody niezbędne jest stwierdzenie, że $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$. Oznaczmy przez S poszukiwaną miarę (zakładając, że taka istnieje). Wówczas:

$$\mathrm{S} \geq S_1+S_2+\ldots \geq \frac{S}{2}+\frac{S}{4}+\ldots=S$$

gdzie druga nierówność wynika z tego, że dla $S_1>\frac{S}{2}$ otrzymujemy dla n = 2:

$$S_1+S_2>S_1+\frac{1}{2}(S-S_1)=\frac{S}{2}+\frac{1}{2}S_1>\frac{S}{2}+\frac{S}{4}$$

i dalej indukcyjnie pokazujemy, że:

$$S_1+\ldots+S_n>\frac{S}{2}+\frac{1}{2}(S_1+\ldots+S_{n-1})>\frac{S}{2}+\frac{S}{4}+\ldots+\frac{S}{2^n}$$

PIERWSZY RACHUNEK CAŁKOWY

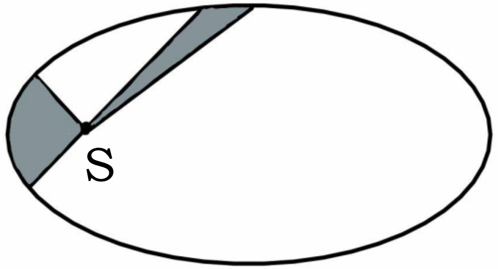
- W swojej pracy napisał, że pole dowolnej figury oblicza się przez przybliżony podział na wycinki kół. Jeśli będziemy dokonywali podziału na odcinki coraz węższe, to przybliżenia będą coraz lepsze i wartość sumy

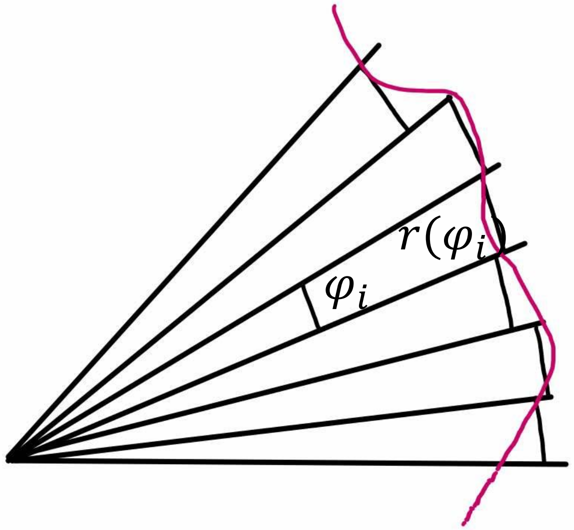
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2} r^2(\varphi_i) \cdot \, \Delta \varphi_i$$

  będzie coraz lepiej przybliżała pole

- Tą techniką Kepler obliczył np. że pole elipsy jest równe $\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$

Johannes Kepler (1571 – 1630) - niemiecki astronom, astrolog i matematyk





REGUŁA GULDINA

„Objętość bryły powstałej przez obrót figury płaskiej wokół nieprzecinającej jej i leżącej w tej samej płaszczyźnie prostej jest równa iloczynowi pola powierzchni figury przez drogę środka ciężkości tej powierzchni podczas obrotu, a pole takiej bryły – iloczynowi długości obwodu figury przez drogę środka ciężkości tego obwodu podczas obrotu”

Paul Guldin (1577 – 1643) – szwajcarski matematyk, astronom i jezuita

ZASADA CAVALIERIEGO

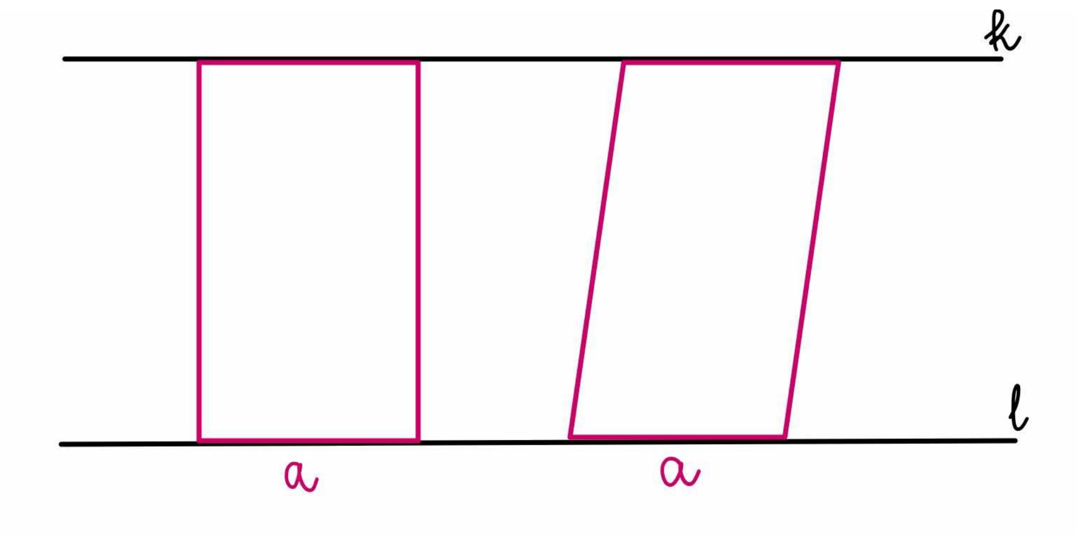
„JEŻELI DWIE BRYŁY, OGRANICZONE DWIEMA RÓWNOLEGŁYMI PŁASZCZYZNAMI PRZETNIEMY RODZINĄ PŁASZCZYZN RÓWNOLEGŁYCH DO TYCH PŁASZCZYZN I NA KAŻDYM POZIOMIE W PRZECIĘCIU Z BRYŁAMI OTRZYMAMY PRZEKROJE O RÓWNYCH POLACH, TO TE BRYŁY MAJĄ RÓWNĄ OBJĘTOŚĆ.”

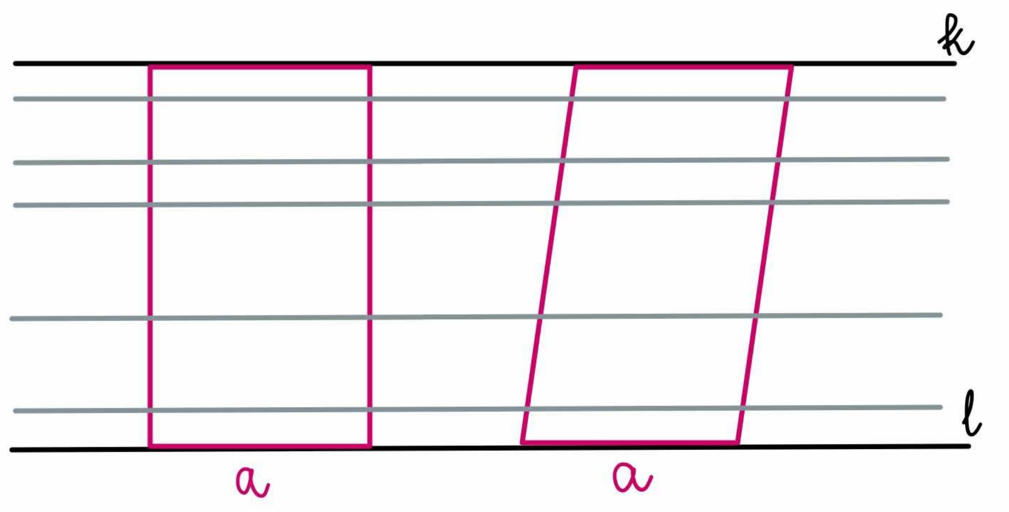
- Alternatywnym sposobem do metody wyczerpywania jest zasada Cavalieriego, którą przekształcono w **rachunek różniczkowy liczb nieskończenie małych**
- Została odkryta przez Archimedesa, a później spisana przez włoskiego matematyka **Bonaventurę Cavalieriego** w XVII wieku.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) – włoski matematyk i astronom

PRZYKŁAD

Prostokąt i równoległobok o równych podstawach mają równe pola





Każdy przekrój obu figur prostą ma takie samo pole

PODSTAWOWE TWIERDZENIE RACHUNKU CAŁKOWEGO I RÓŻNICZKOWEGO

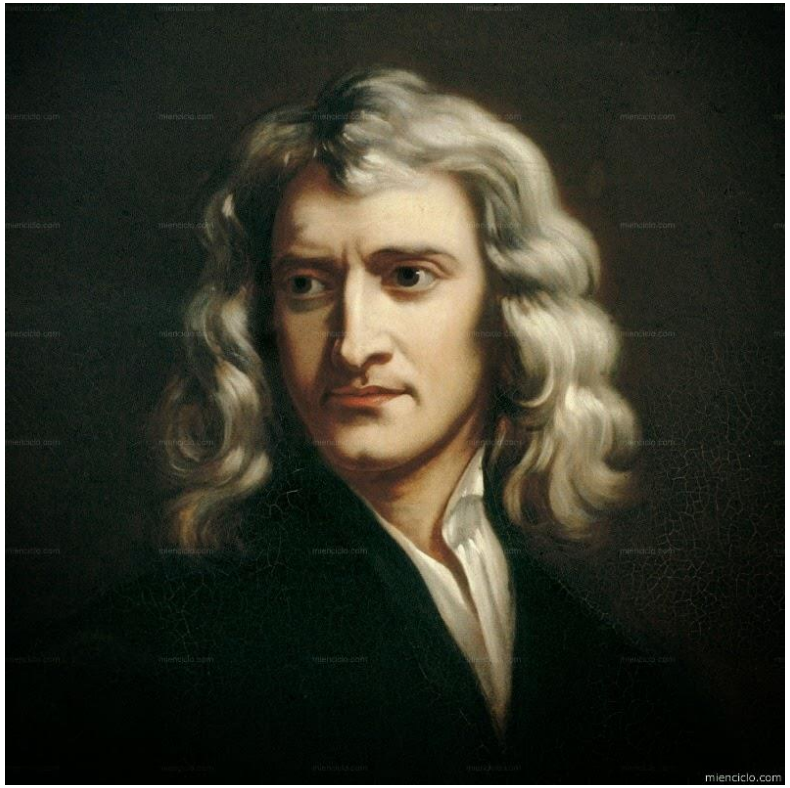
- Ważnym osiągnięciem w rachunku całkowym i różniczkowym było znalezienie związku między styczną do wykresu funkcji a polem pod wykresem tej funkcji.
- Twierdzenie Isaaca Barrowa (1670r.)

„zmienność stanu wywołanego jakąś zmiennością jest tą właśnie zmiennością”

czyli innymi słowy:

$$\left(\int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\right)' = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \text{ lub } \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}(\mathbf{b})$$

Isaac Barrow (1630 – 1677) – angielski matematyk i teolog, mentor Isaaca Newtona



NEWTON I LEIBNIZ WKRACZAJĄ DO AKCJI

DWIE METODY, JEDEN SUKCES

Newton i Leibniz działali niezależnie. Ich podejścia miały odpowiadającą sobie notację, jednak podejście do niej dla każdego było inne.

Podejścia Newtona i Leibniza korzystały ze starożytnej metody wyczerpywania. Newton wolał geometryczne podejście.

Leibniz postawił sobie za cel opracowanie konkretnych algorytmów obliczania całek i różniczek. Skupił się na problemie stycznej.

Dla Newtona zmiana była wielkością zmienną w czasie, dla Leibniza była to różnica obejmująca ciąg nieskończenie bliskich wartości.

DLACZEGO CAŁKA JEST CAŁKĄ?

$$\int dx$$

Symbol całki przypomina wydłużoną literę „s” lub małą literę „esz” **ſ**. Inspiracją dla Leibniza było łacińskie słowo „*summa*”, które manierycznie pisał jako „***ſumma***”.

Od Leibniza pochodzi również, używana do dzisiaj, nazwa na całkę ***„integralis”*** (łączący)

Polskie nazwy pochodzą od matematyka i geografa Jana Śniadeckiego

HENRI-LÉON LEBESGUE

Urodzony 28 czerwca 1875 w Beauvais we Francji.

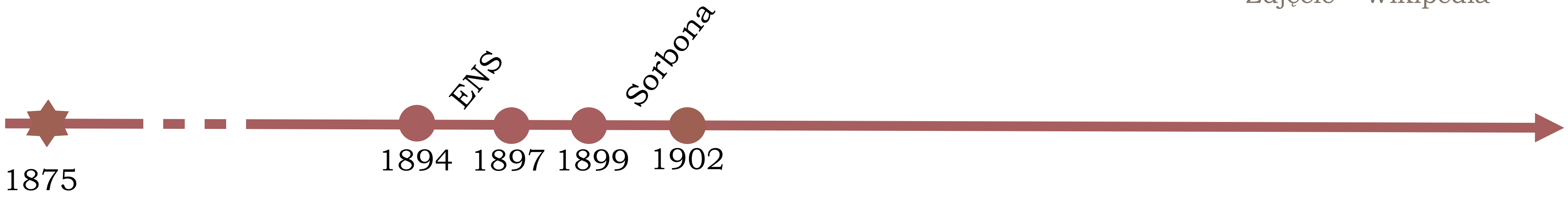
Studiował w École Normale Supérieure od 1894 do 1897.

Po ukończeniu studiów Lebesgue pozostał na uczelni, gdzie pracował w bibliotece.
W tym samym czasie rozpoczął studia na Sorbonie, zapoznał się z pracą René-Louis Baire na temat nieciągłości.

W latach 1899 – 1902, pracując nad doktoratem, jednocześnie uczył w Lycée Centrale w Nancy.

W 1902 obronił pracę doktorską *Intégrale, longueur, aire.*

Zdjęcie – Wikipedia



Intégrale, Longueur, Aire.

(*Par* H. Lebesgue, *à Nancy.*)

INTRODUCTION.

Dans ce travail j'essaie de donner des définitions aussi générales et précises que possible de quelques uns des nombres que l'on considère en Analyse: intégrale définie, longueur d'une courbe, aire d'une surface.

M.r Jordan, dans la seconde édition de son *Cours d'Analyse*, a fait une étude approfondie de ces nombres. Il m'a semblé utile cependant de reprendre cette étude, et voici pourquoi. On sait qu'il existe des fonction dérivées non intégrables, lorsque l'on adopte, comme le fait M.r Jordan, la définition de l'intégrale qu'a donnée Riemann; de sorte que l'intégration, telle que l'a définie Riemann, ne permet pas dans tous les cas de résoudre le problème fondamental du calcul intégral:

Trouver une fonction connaissant sa dérivée.

Il peut donc sembler naturel de chercher une autre définition de l'intégrale, telle que, dans des cas plus étendus, l'intégration soit l'opération inverse de la dérivation.

D'autre part, comme le remarque M.r Jordan, l'aire d'une surface n'ayant pas des plans tangents variant d'une façon continue n'est pas définie; et les énoncés que l'on serait tenté d'admettre comme analogues à la définition de la longueur d'une courbe ne peuvent être adoptés (*). Il y a donc lieu de chercher une définition de l'aire et peut être aussi de modifier celle

(*) Voir Schwarz, lettre à Genocchi. Cette lettre est reproduite dans l'édition lithographiée du *Cours professé à la Faculté des sciences par* Ch. Hermite, pendant le second semestre de 1882. (Second tirage, page 25.) — Voir aussi Peano, *Atti della Accademia dei Lincei*, 1890.

de la longueur de façon que ces deux définitions soient aussi analogues que possible.

Dans l'étude des questions relatives à la théorie des fonctions de variables réelles on reconnait souvent qu'il serait commode de pouvoir attacher aux ensembles de points des nombres jouissant de certaines des propriétés des longueurs des segments ou des aires des polygones. On a proposé différentes définitions de ces nombres que l'on appelle les mesures des ensembles (*); celle qui a été le plus souvent adoptée se trouve exposée et étudiée dans le livre de M.r Jordan.

Dans le premier chapitre je définis, avec M.r Borel, la mesure d'un ensemble par ses propriétés essentielles. Après avoir complété et précisé les indications un peu rapides que donne M.r Borel (**), j'indique quelles relations il y a, entre la mesure ainsi définie et la mesure au sens de M.r Jordan. La définition que j'adopte s'applique aux espaces à plusieurs dimensions; de la notion de mesure d'un ensemble dont les éléments sont les points d'un plan, on déduit celle d'aire d'un domaine plan; si les éléments sont des points de l'espace ordinaire on en déduit la notion de volume, etc.

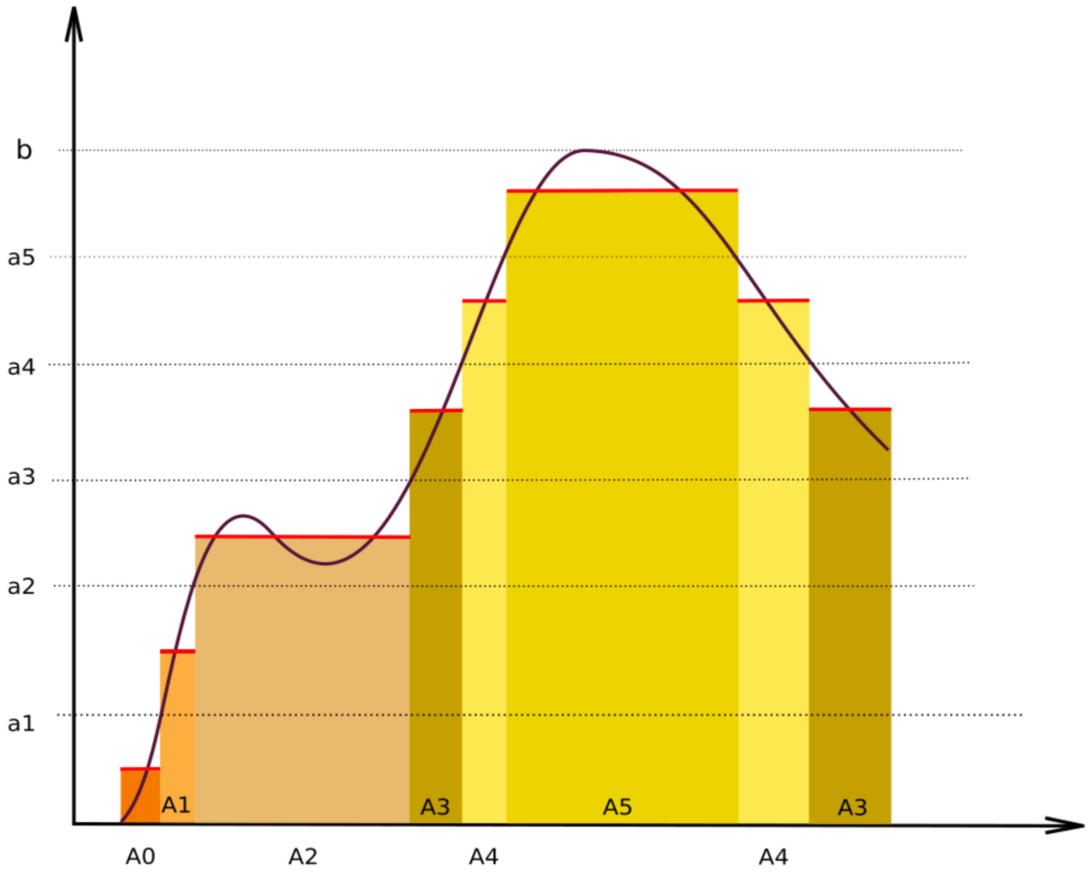
Ces préliminaires posés, il n'y a plus d'inconvénients à définir l'intégrale d'une fonction continue comme l'aire d'un domaine plan; et même cette méthode a l'avantage de conduire à une définition de l'intégrale d'une fonction discontinue bornée comme mesure d'un certain ensemble de points. C'est cette définition géométrique que j'adopte au chapitre II; on peut d'ailleurs la remplacer par une définition analytique, l'intégrale se présente alors comme étant la limite d'une suite de sommes assez analogues à celles que l'on considère dans la définition de Riemann. Les fonctions auxquelles s'applique cette définition géométrique sont celles que j'appelle *sommables*.

Je ne connais aucune fonction qui ne soit sommable, je ne sais s'il en existe. Toutes les fonctions qu'on peut définir à l'aide des opérations arithmétiques et du passage à la limite sont sommables. Toutes les fonctions intégrables au sens de Riemann sont sommables et les deux définitions de l'intégrale conduisent au même nombre. Toute fonction dérivée bornée est sommable.

(*) Voir au sujet de ces définitions Schœnflies, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1900.

(**) *Leçons sur la théorie des Fonctions.*

SZYBKA POWTÓRKA



Ograniczenia całki Riemanna: wyznaczanie całki z granicy ciągu funkcji, stosunkowo uboga klasa funkcji całkowalnych, ograniczenie do przestrzeni euklidesowych.

Całka Lebesgue'a:

Przybliżanie funkcji mierzalnych i nieujemnych funkcjami prostymi (mierzalnymi o skończenie wielu wartościach).

SZYBKA POWTÓRKA

Mamy przestrzeń z miarą (X, μ)

Dla funkcji prostych definiujemy pre-całkę: $\mathcal{S}(\varphi) = \sum_{v \in \mathrm{Im}(\varphi)} v \cdot \mu(\varphi^{-1}(\{v\}))$

Dla funkcji mierzalnych i nieujemnych: $\int f \, d\mu = \sup\{\mathcal{S}(\psi) : \ 0 \leqslant \psi \leqslant f, \, \psi - \text{prosta}\}$

Dla funkcji mierzalnych:

$$f_+ := \max(0, f), \ f_- := \max(0, -f)$$

$\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$ jeśli co najmniej jedna z całek po prawej stronie jest skończona

HENRI-LÉON LEBESGUE

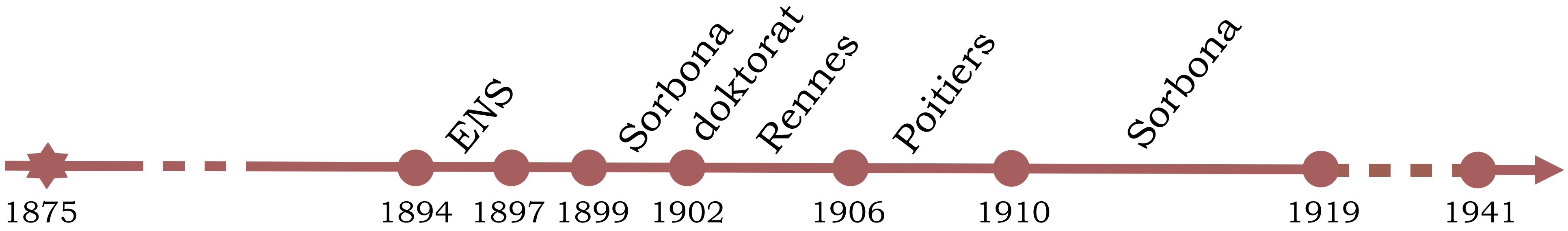
Po opublikowaniu pracy doktorskiej w 1902 otrzymał posadę na Uniwersytecie w Rennes, gdzie wykładał do 1906.

W latach 1906 – 1910 był na Uniwersytecie w Poitiers.

W latach 1910 – 1919 został mianowany profesorem na Sorbonie.

Przez ostatnie 20 lat życia koncentrował się na kwestiach pedagogicznych i geometrii elementarnej. Zmarł 26 lipca 1941 w Paryżu.

Zdjęcie – Wikipedia



WIZYTA HENRI LEBESGUE’A W POLSCE

W 1938 r. Wydział Matematyczno-Przyrodniczy Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie nadał Lebesgue’owi tytuł doktora honoris causa.

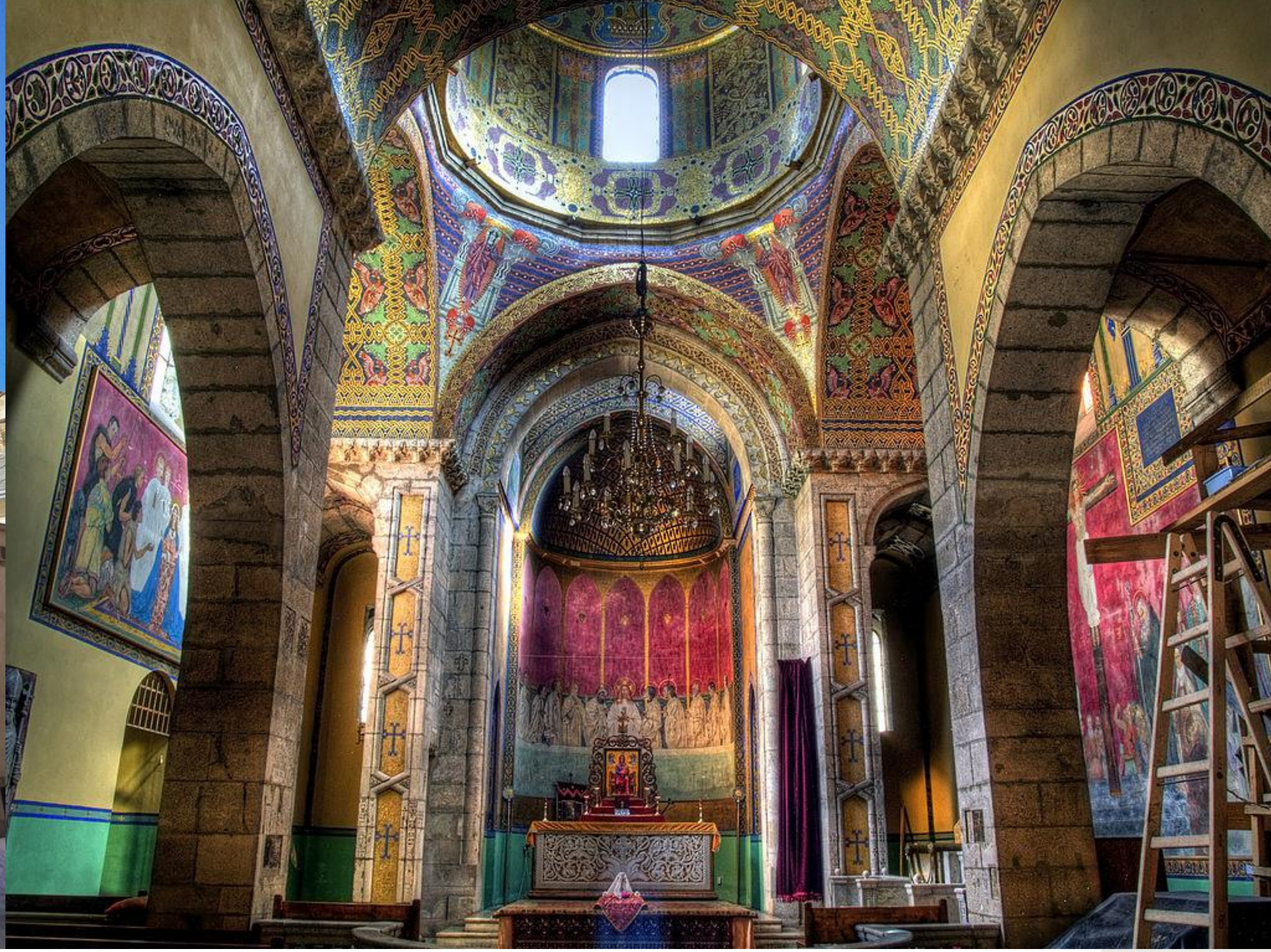
Lebesgue zdecydował się odbyć podróż do Polski w celu przyjęcia tego zaszczytu i pozostał w Polsce przez tydzień.

W tym czasie Marek Kac był sekretarzem Oddziału Lwowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego i to on przyjął rolę przewodnika Lebesgue’a po Lwowie.

Plac Mariacki we Lwowie. 1938 rok.

Zdjęcie https://wielkahistoria.pl/przedwojenny-lwow-w-liczbach-zaskakujace-fakty-i-statystyki/

Zdjęcie - https://roadtripbus.pl/katedra-ormianska-we-lwowie/



Zdjęcie – Wikipedia

WIZYTA HENRI LEBESGUE'A W POLSCE

Na koniec krótka anegdota: Pewnego dnia nasz oddział Towarzystwa Matematycznego zaprosił Lebesgue'a do Kawiarni Szkockiej na małe przyjęcie. Kelner, nie zdający sobie sprawy z faktu, że Lebesgue nie zna języka polskiego, podał mu kartę. Lebesgue studiował przez trzydzieści sekund ten nadzwyczajny dokument z długimi i niezrozumiałymi opisami, i ze zwykłą swoją grzecznością powiedział: „Dziękuję, jadam jedynie rzeczy dobrze zdefiniowane".

W tym momencie wpadłem na szczęśliwą myśl i zmieniając nieco znane zdanie Poincarégo skierowane przeciw kantoryzmowi, odpowiedziałem: „Należy jadać jedynie obiekty, które mogą być zdefiniowane za pomocą skończonej liczby słów".

„Ach" odrzekł Lebesgue, „zna Pan nieco filozofię Poincarégo", i w tym momencie, jak sądzę, wybaczył mi zupełną nieznajomość historii katedry ormiańskiej.

BIBLIOGRAFIA

- Marek Kordos "Wykłady z historii matematyki", wydanie II, Script 2006
- Tucker McElroy "A to Z of mathematicians", Facts on File 2005
- Biografia w Encyklopedii Britannica https://www.britannica.com/biography/Henri-Leon-Lebesgue
- Marek Kac "Henri Lebesgue i polska szkoła matematyczna: obserwacje i wspomnienia", *Wiadomości matematyczne* XX 1978 https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/wiadomosci-matematyczne/article/view/3551
- J.C Burkill "Henri Lebesgue", *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society* https://royalsocietypublishing.org/doi/epdf/10.1098/rsbm.1944.0001
- Paulina Pawlik, Ewelina Rzepka *„Zasada Cavalieriego i jej zastosowania”*
- Historia rachunku różniczkowego – Wikipedia, wolna encyklopedia