

Imię i nazwisko:

**Zaznacz X prawdziwe odpowiedzi lub uzupełnij w miejscu ..... Każda odpowiedź za 2 punkty.**

- (1) Niech  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  będą następującymi relacjami:  $x\rho_1y$  jeśli  $x - y \in \mathbb{Z}$ ,  $x\rho_2y$  jeśli  $x \cdot y \in \mathbb{Z}$ ,  $x\rho_3y$  jeśli  $x - y \in \mathbb{Q}$ .
- (A) Relacja równoważności to relacja zwrotna, .....
- (B) Spośród relacji  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  relacjami równoważności są .....
- (C) Klasa abstrakcji liczby 1 w relacji  $\rho_1$  to .....
- (2) Niech  $X, Y$  będą zbiorami. Niech  $A \subset X$  i niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie funkcją.
- (A) Obrazem zbioru  $A$  jest zbiór  $f(A) = \dots\dots\dots$
- (B)  $f$  jest surjekcją  $\Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- (C) Niech  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} g(x) = x^4 + 3$ . Wtedy  $g((-3, -2]) = \dots\dots\dots$
- (3) Niech  $V, W$  będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ . (A) Przekształcenie  $\phi : V \rightarrow W$  jest liniowe jeśli .....
- (B) Niech  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  będą przekształceniami  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  danymi wzorami  $\phi_1(z) = \operatorname{Re}z, \phi_2(z) = jz, \phi_3(z) = z + j$ . Przekształceniami liniowymi nad  $\mathbb{C}$  są: .....
- (C) Rząd przekształcenia  $\phi_2$  to ....., jądro  $\phi_2$  to .....
- (4) (A) Niech  $(G, *)$  będzie grupą.  $\forall a, b \in G (a * b)^{-1} = \dots\dots\dots$
- (B) Spośród  $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +), (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{Z}, +)$  grupami są: .....
- (C) Jeśli  $1 - j, 7 + 2j$  są pierwiastkami  $p(x) = -106 + 240x - 217x^2 + 99x^3 - 17x^4 + x^5$  to pozostałe pierwiastki  $p(x)$  to .....
- (5) (A)  $\left(\frac{j-2}{j+3}\right)^{99} = \dots\dots\dots$
- (B) Niezerowy wektor  $v \in V$  jest wektorem własnym przekształcenia liniowego  $\phi : V \rightarrow V$  jeśli .....
- (C) Spośród wektorów  $[1, 1], [2, 2], [1, 0]$  wektorami własnymi przekształcenia  $\psi(x, y) = (2x + y, 2x + y)$  są .....

**Przepisz poniższe zadania i rozwiąż na oddzielnych kartkach. Każde zadanie za 10 punktów.**

- (6) Przedyskutować rozwiązalność układu równań w zależności od parametru  $a$  i wyznaczyć rozwiązania:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ (a-1)x & +(a+1)y & +(2a+2)z & = & 2 \\ (a+1)x & +(3a-1)y & +16z & = & 4 \end{cases}$$

- (7) Policzyc  $A^{100}$ , gdzie  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

- (8) Rozłożyć na ułamki proste nad  $\mathbb{C}$  funkcję wymierną  $\frac{1+3z+5z^2+z^3}{5-6z-2z^2+2z^3+z^4}$