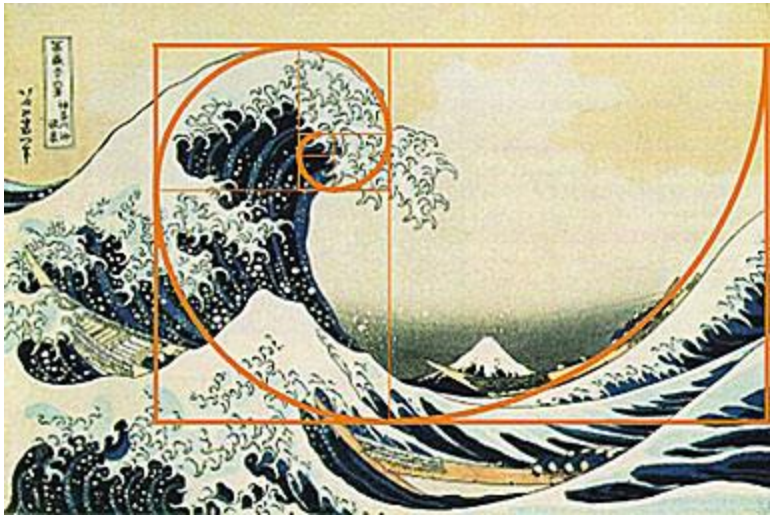
Matematyka w sztuce



Marta Jóźwik, Maria Koc

Sztuka i liczba

„Wszelka sztuka powstaje przez liczbę. Jest więc proporcja w rzeźbie, a podobnie też w malarstwie. Ogólnie biorąc wszelka sztuka jest systemem postrzeżeń, a system jest liczbą, słusznie więc można rzec: dzięki liczbie wszystko pięknie wygląda.”

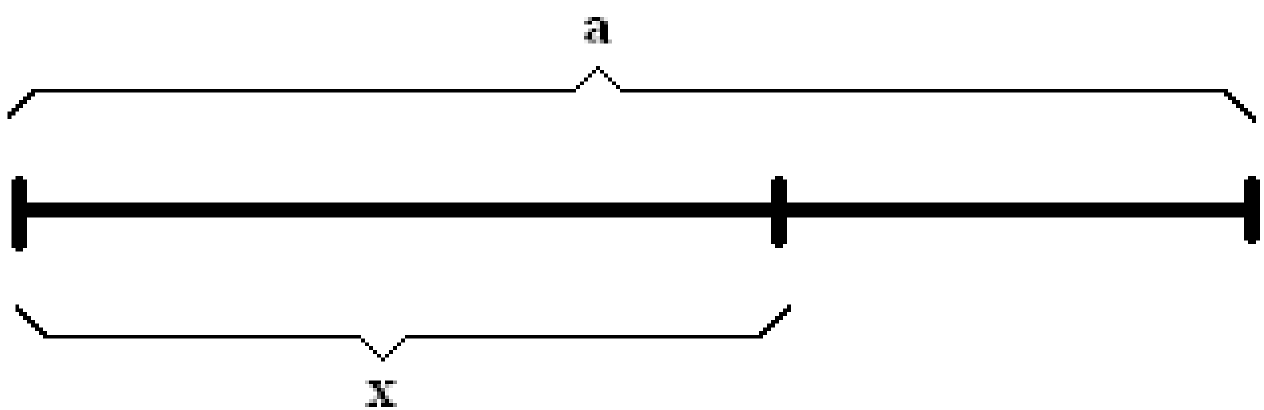
Złoty podział

Ze złotym podziałem mamy do czynienia wtedy, gdy podzielimy odcinek na dwa odcinki tak, by stosunek krótszego z nich do dłuższego był taki sam jak dłuższego do całego pierwotnego odcinka.

Przy zachowaniu takiej proporcji dłuższy odcinek jest, więc średnią geometryczną odcinków pierwotnego i mniejszego.

Punkt dzielący odcinek leży na nim w takim miejscu, że cały odcinek ma się do swojej większej części jak większa część do mniejszej części odcinka.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$$



a – długość odcinka
x – długość większej części
y – długość mniejszej części

Liczba „fi” Φ

Po sprowadzeniu do równania kwadratowego:

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

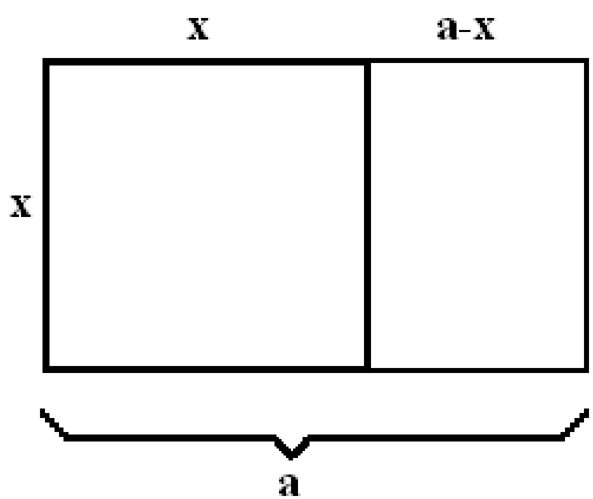
$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a$$

I właśnie liczbę $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398\ldots$ nazywamy złotą liczbą lub złotą proporcją.

Złoty prostokąt

Złoty prostokąt *– to taki prostokąt w którym stosunek dłuższego boku do krótszego jest liczbą złotą.*

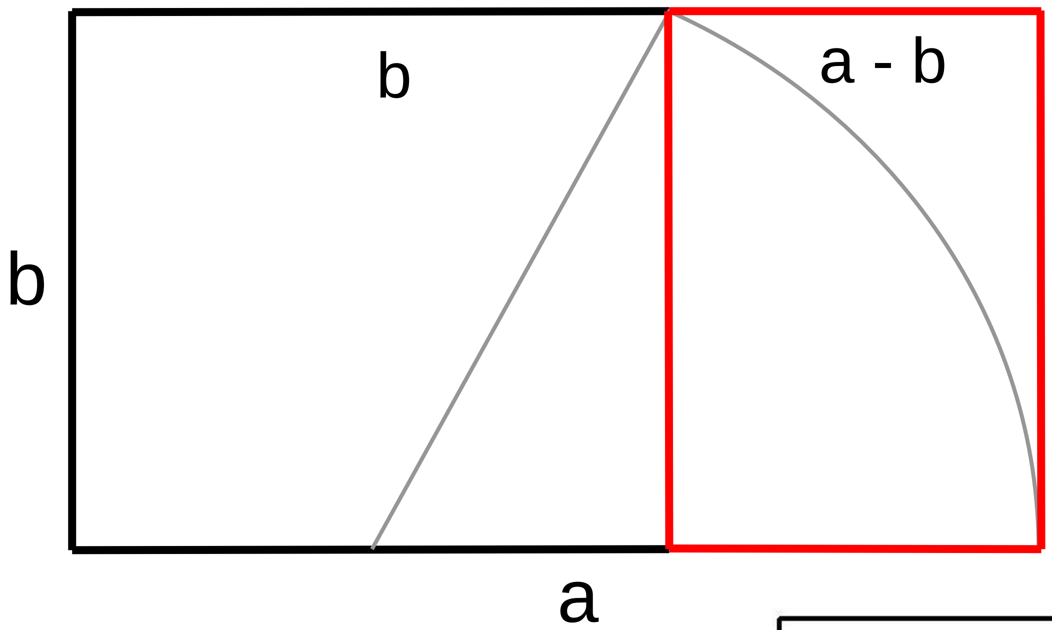
$$\frac{a}{x} = \varphi$$

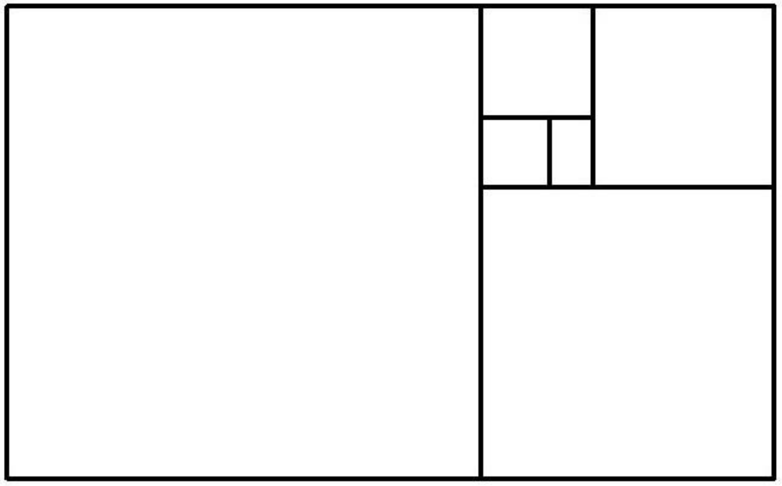


$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x} = \varphi$$

Co ciekawe prostokąt po odcięciu od niego największego możliwego kwadratu pozostaje nadal złoty.

Po odcięciu kwadratu długość boku pozostałego prostokąta wynosi a-x. Stosunek boków małego prostokąta wynosi $\frac{x}{a-x}$

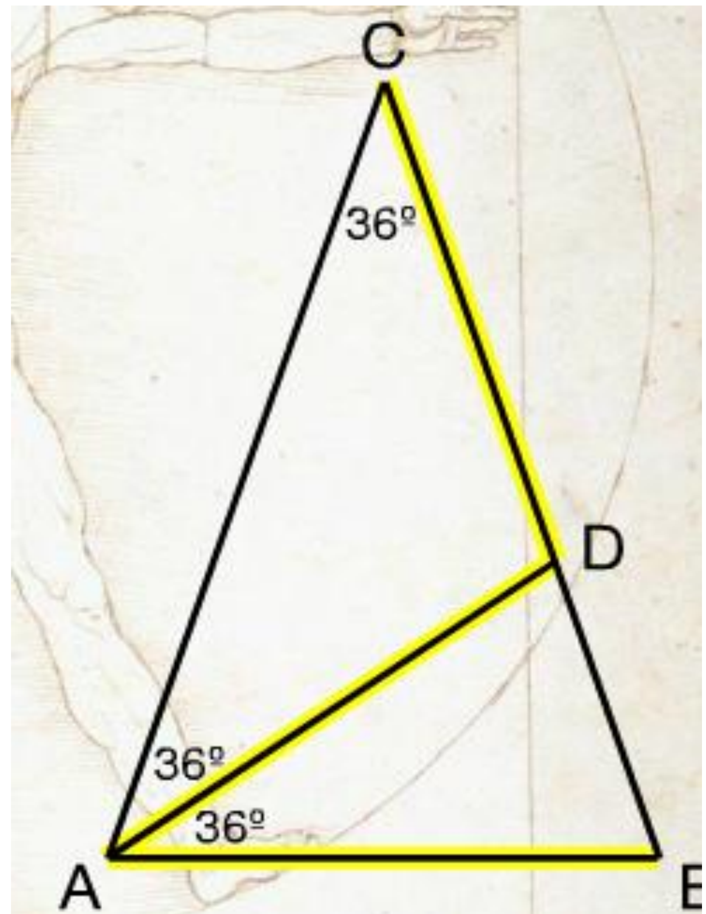

b
a - b
b
a



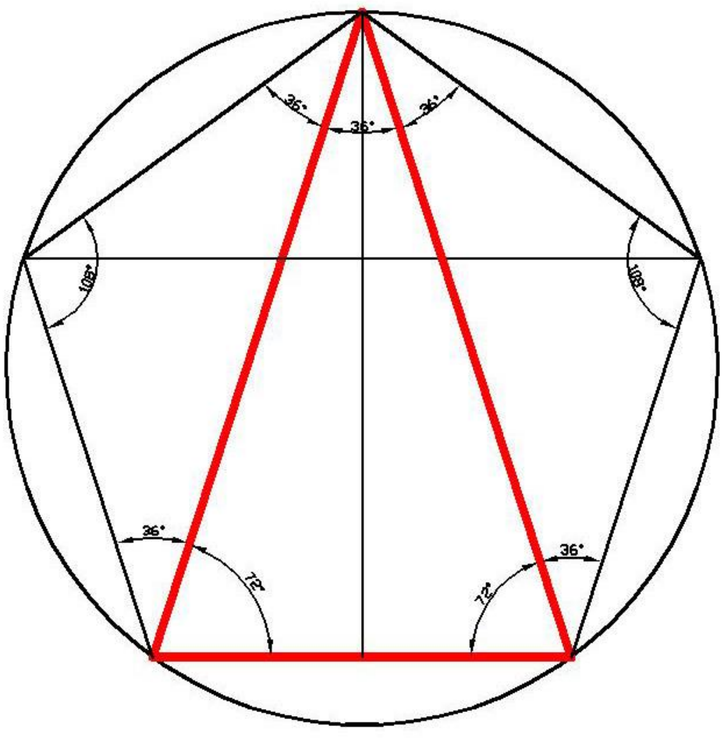
Złoty trójkąt

Złoty trójkąt jest to trójkąt równoramienny w którym stosunek ramienia do podstawy jest równy złotej liczbie

W złotym trójkącie kąt między ramionami ma **36**^{0}

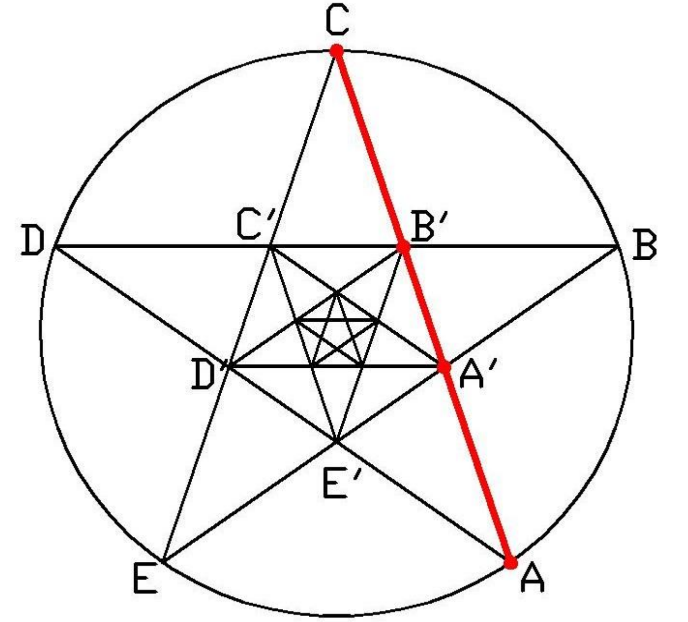


Złoty trójkąt powstaje jako trójkąt równoramienny z połączenia dwóch sąsiednich i trzeciego - przeciwległego wierzchołków **pentagramu**. Jego kąty to dwa razy po **72**^{0} przy podstawie i 36^0 przy trzecim wierzchołku.



Pentagram

Najciekawszym przykładem podziału harmonicznego (złotego) jest gwiazda pięcioramienna utworzona z połączenia wierzchołków **pentagramu** (pięciokąta foremnego) .

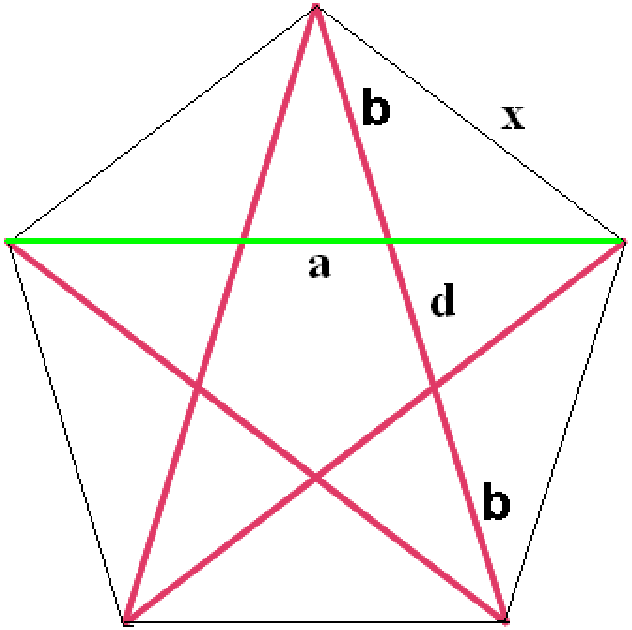


Punkt przecięcia przekątnych pięciokąta foremnego wyznacza ich złoty podział.

Przekątna pięciokąta foremnego pozostaje w złotej proporcji z jego bokiem.

złoty stosunek

$$\frac{b}{d} = \varphi \qquad \frac{a}{x} = \varphi$$

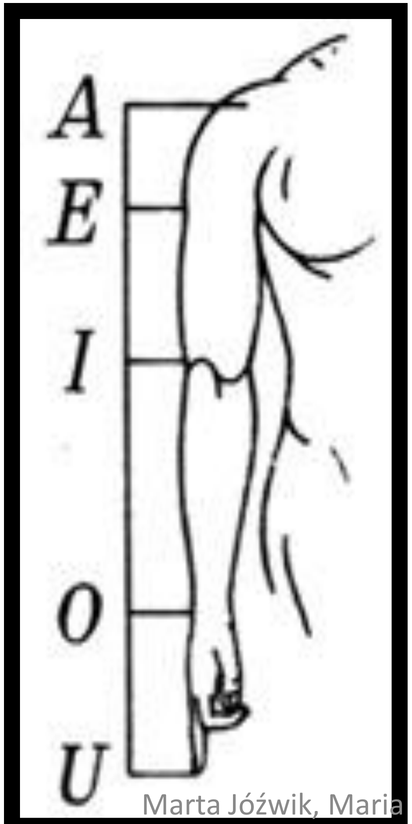


w pięciokącie foremnym odkrył i udowodnił Hippasus (V wiek pne).

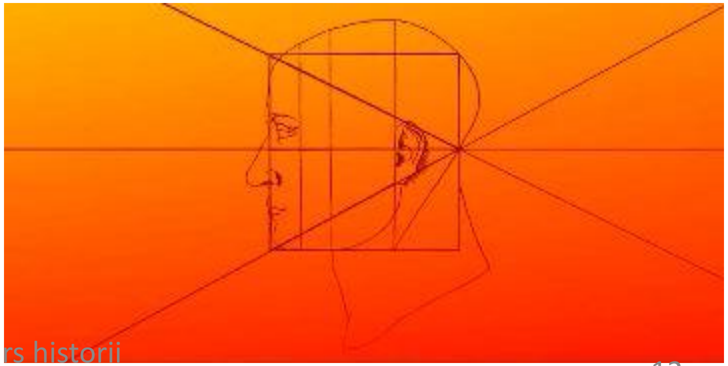
Złoty podział – proporcje ciała

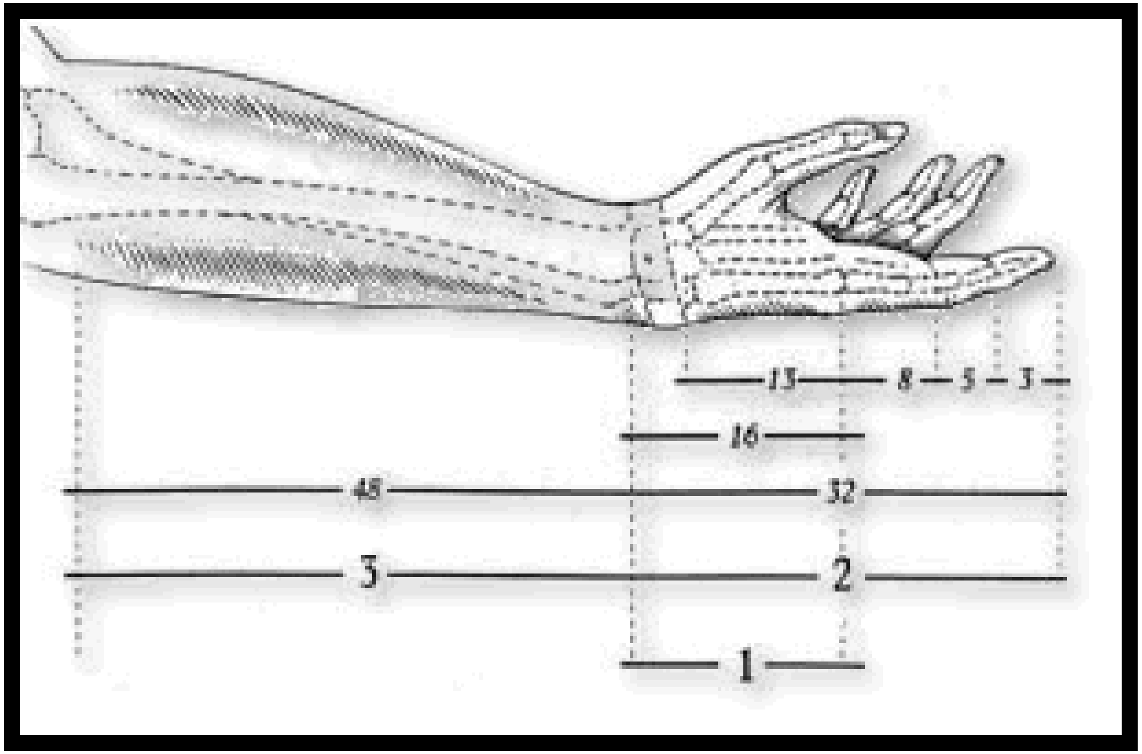
Odległość od czubka głowy do podłogi. Potem podzielcie ją przez odległość od pępka do podłogi. Zazwyczaj wynosi 1:1,6 (czyli jest to złoty podział). Stosunek ten nazywany jest "pępkiem Pitagorasa".

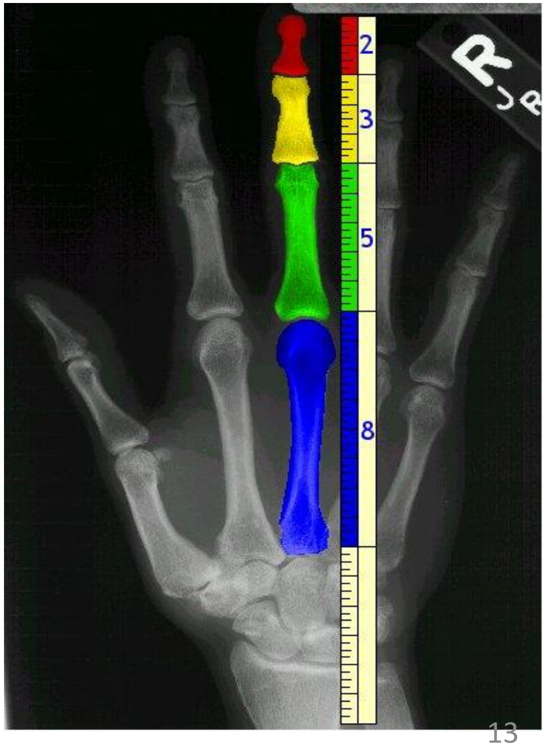
Odległość między ramieniem a czubkiem palców, podzielcie przez odległość między łokciem a czubkiem palców



Od biodra do podłogi podzielone przez odległość od kolana do podłogi.

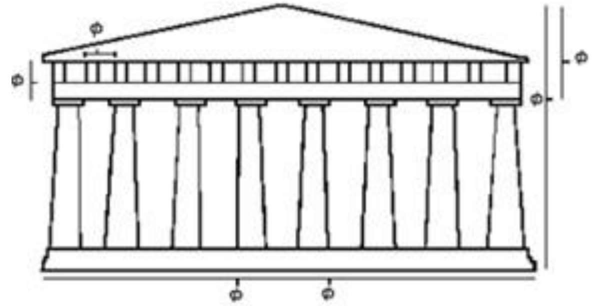






U proporcjonalnie zbudowanego mężczyzny długość odcinka ręki od nadgarstka do końca palców dłoni tak się ma do odcinka od nadgarstka do łokcia, jak ten ostatni odcinek do całości – czyli od łokcia do końca palców dłoni. W ten sam sposób można podzielić każdy palec dłoni, oprócz kciuka.

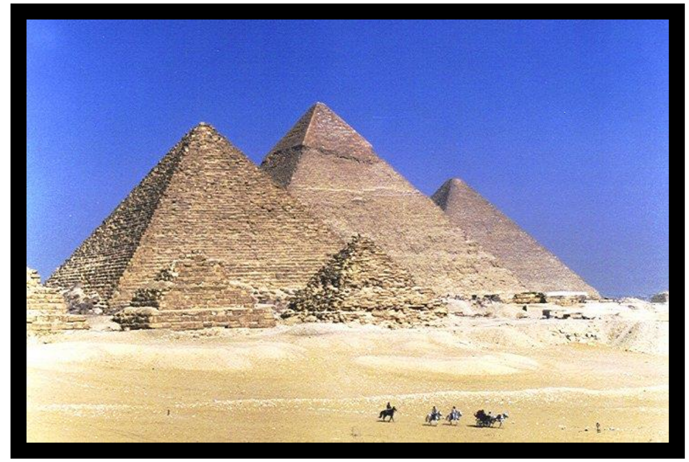
Złoty podział w architekturze i rzeźbie starożytnej



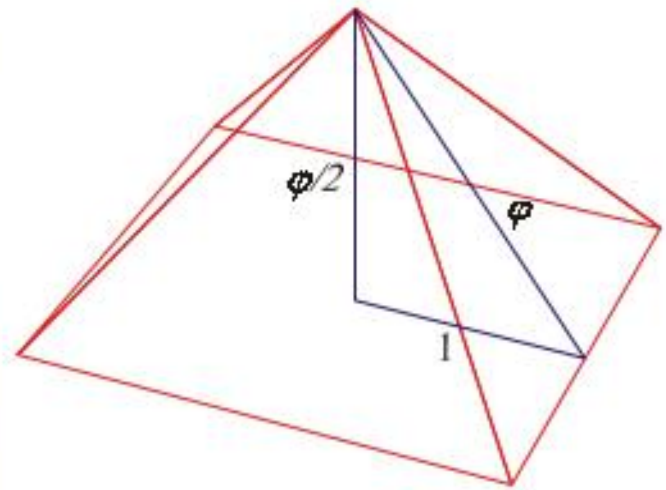
Partenon

Fronton świątyni mieścił się w prostokącie, w którym stosunek boków wyrażał się liczbą złotą

Wielka Piramida



Piramidy w Gizie to kolejny przykład zastosowania złotego podziału. Jeżeli weźmiemy przekrój Wielkiej Piramidy, to otrzymamy trójkąt prostokątny, nazywany Trójkątem Egipskim.

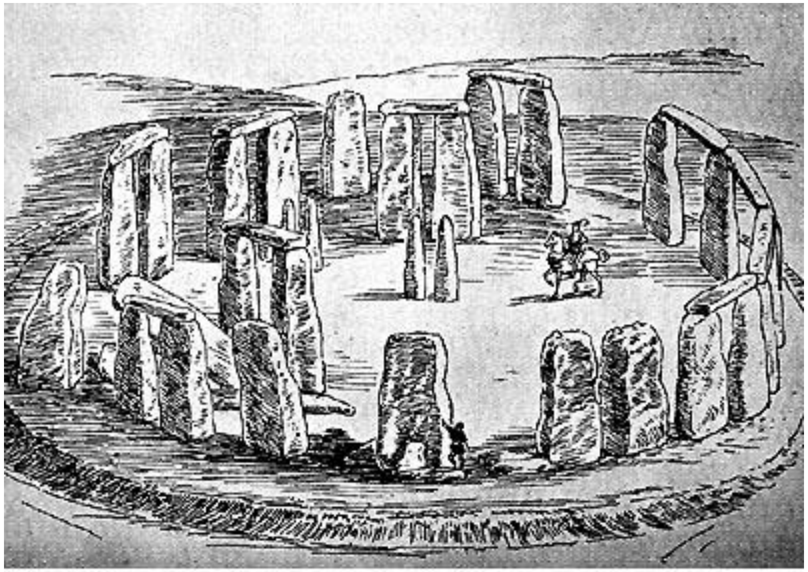


Wymiary po wybudowaniu:
wysokość do wierzchołka- 146,64m
długości boków:

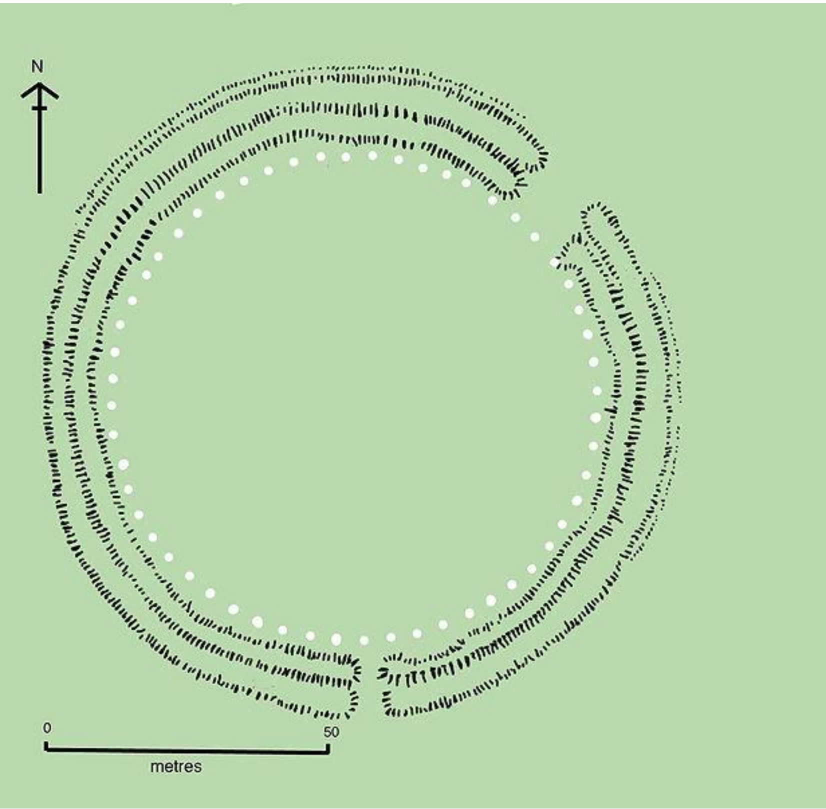
- zachodni- 230,357m
- wschodni- 230,391m
- północny-230,251m
- południowy- 230,454m

Stosunek przeciwprostokątnej (wysokości ściany bocznej) do podstawy (połowa wymiaru podstawy) wynosi 1,61804 i różni się od złotej liczby tylko o jeden na piątym miejscu po przecinku.

Stonehenge



Stonehenge.
Holenderski sztych, 1574.



Leochares

Apollo Belwederski

Linia *I* dzieli na dwie części całą postać w "złotej proporcji", linia *E* wskazuje na tenże stosunek głowy do górnej części tułowia, a linia *O* zaznacza podział nóg w kolanach według złotego cięcia.

Fidiasz

Punktem złotego podziału całej postaci ludzkiej jest linia talii, części dolnej natomiast, linia pod kolanem, a części górnej linia karku.

Fidiasz: Atena

Wenus z Milo,

Poliklet i Lizyp

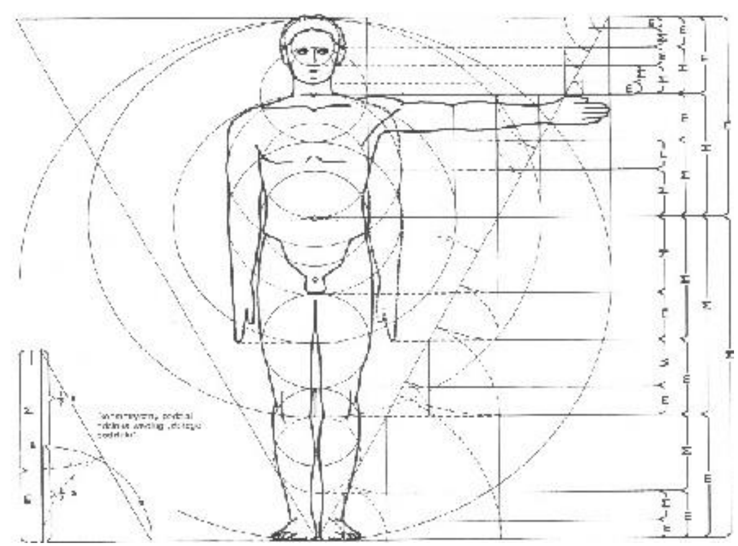
kanony rzeźbiarskie

Poliklet twierdził, że wysokość całej postaci winna być siedem i pół razy większa niż wysokość głowy. Później inny grecki rzeźbiarz, Lizyp, ustalił nowy kanon, według którego głowa stanowiła jedną ósmą część całego wzrostu(8).

Doryforos

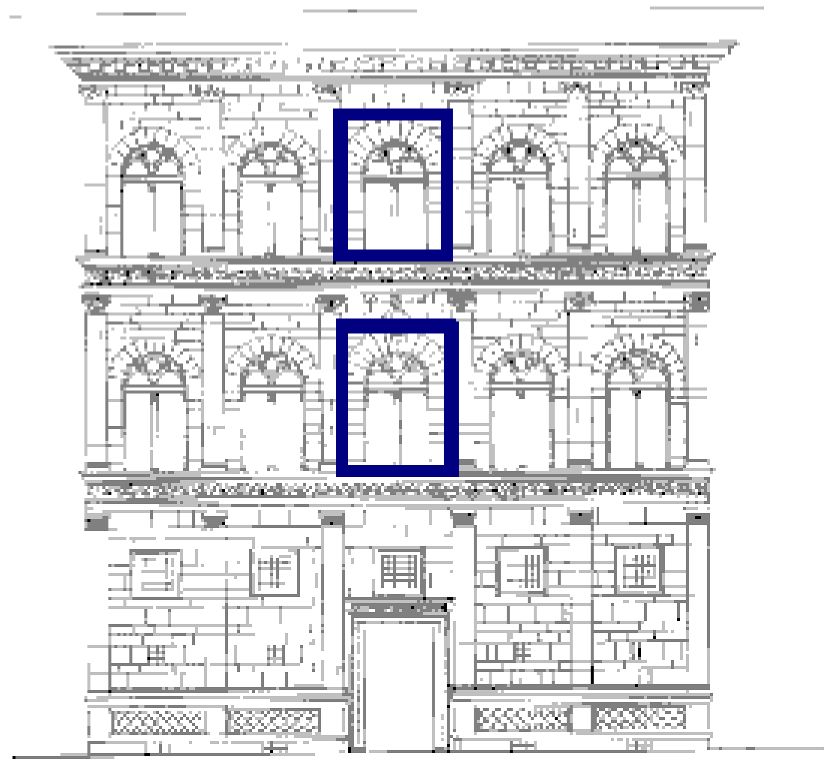
Złoty podział w sztuce czasów nowożytnych

Złoty kanon przejęli od starożytnych artyści renesansowi, choć nie traktowali go już w tak ortodoksyjny sposób



Albrecht Durer- kanony proporcji.

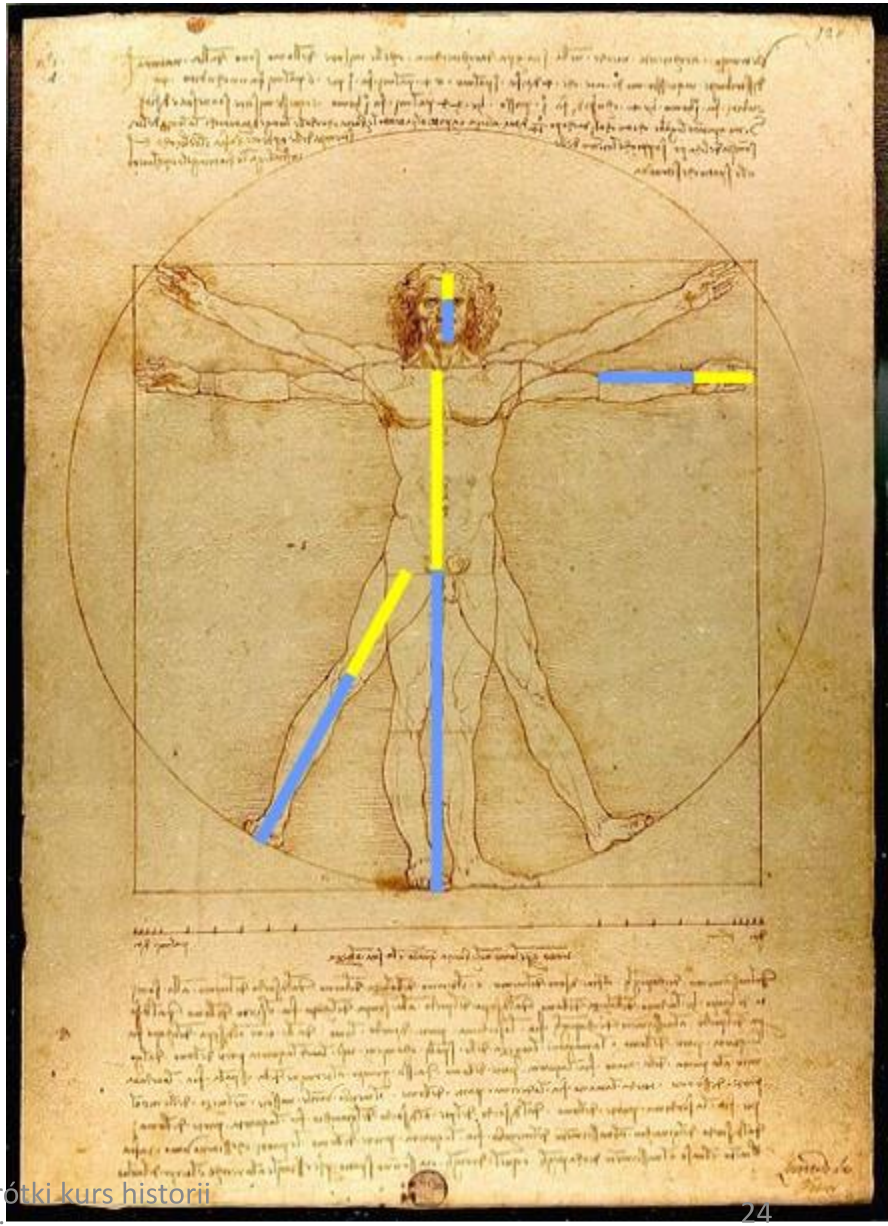
Palazzo Strozzi



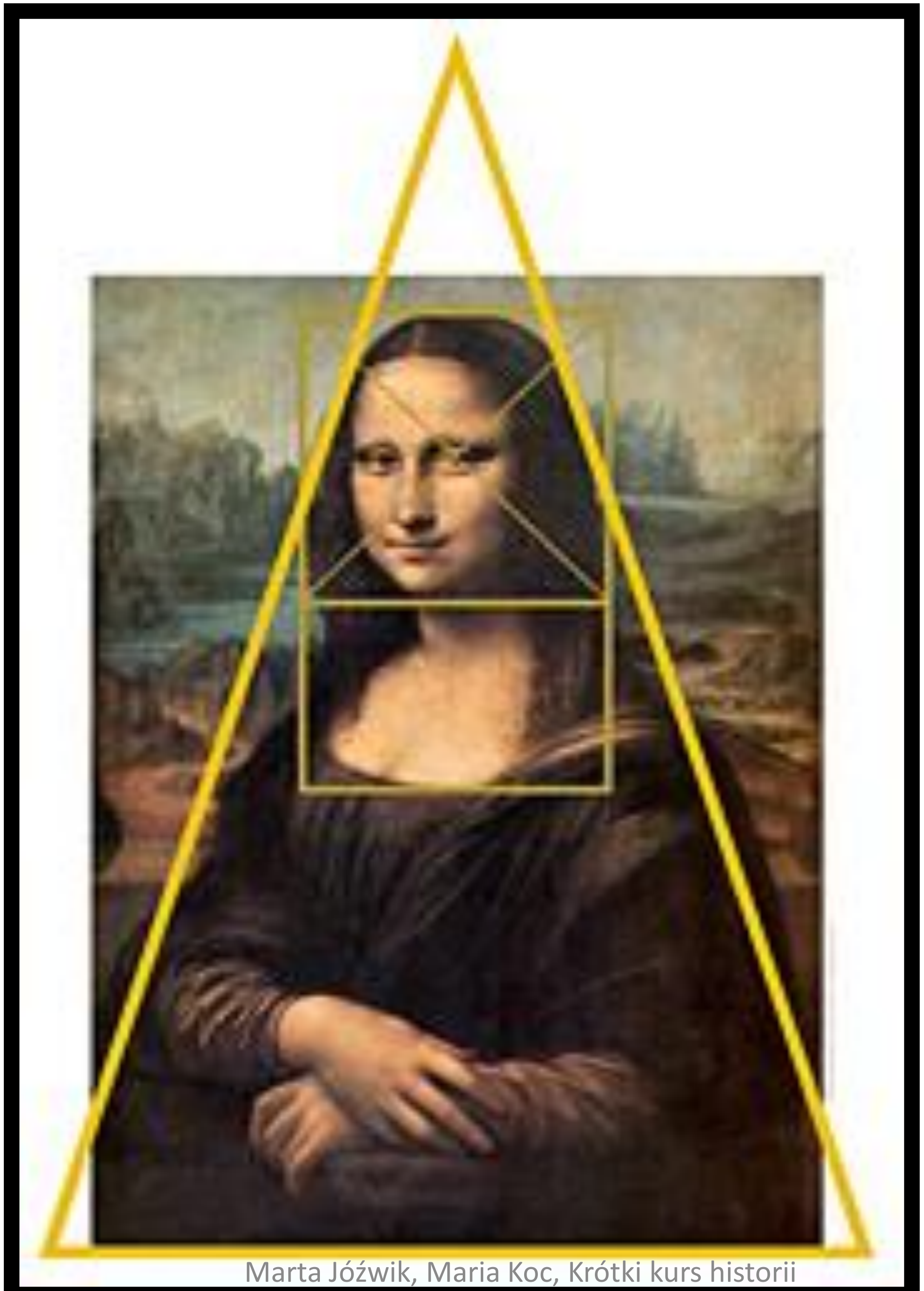
Palazzo Rucellai

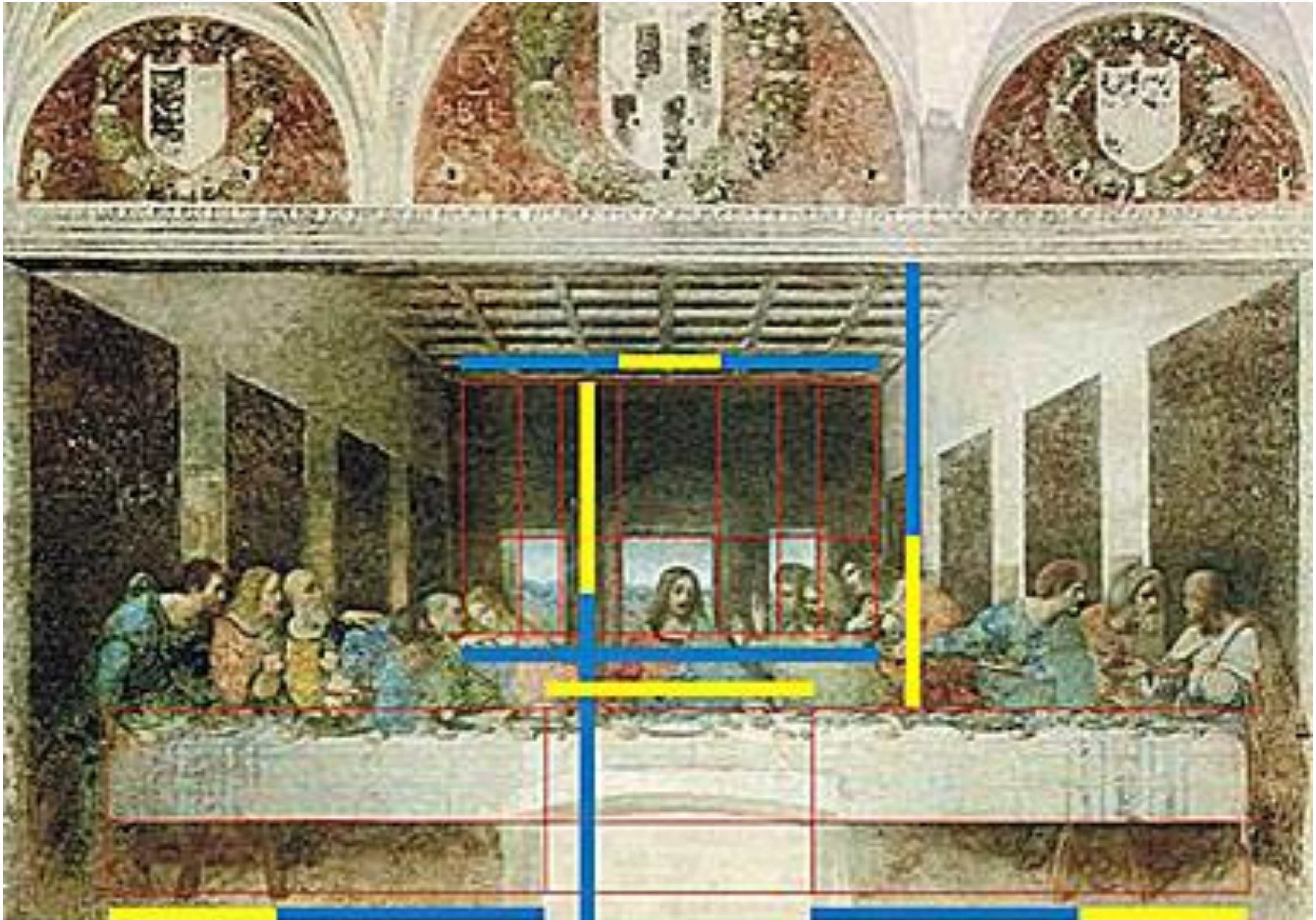
Przykładem może być chociażby okno w budowlach w stylu renesansowym (szerokość do wysokości była w stosunku)

Leonardo da Vinci

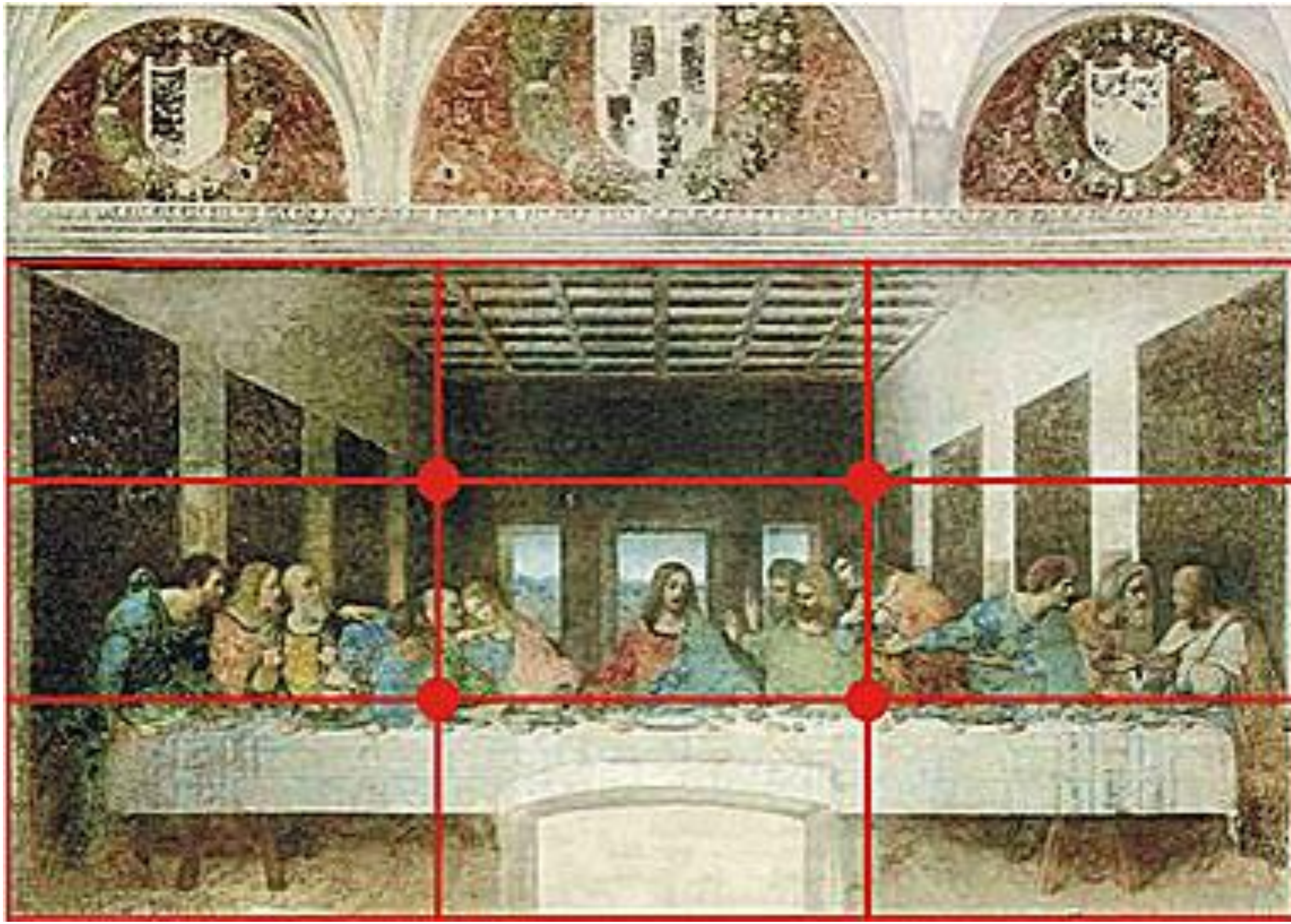


Wykorzystał on postać człowieka Vitruviusa do wykazania proporcji występujących w obrębie ludzkiej postaci. Da Vinci ustalił, iż głowa stanowi 1/8 postaci, a twarz fizjologiczna, mierzona od nasady włosów do bródki, 1/10 całości(6).





Ostatnia wieczerza

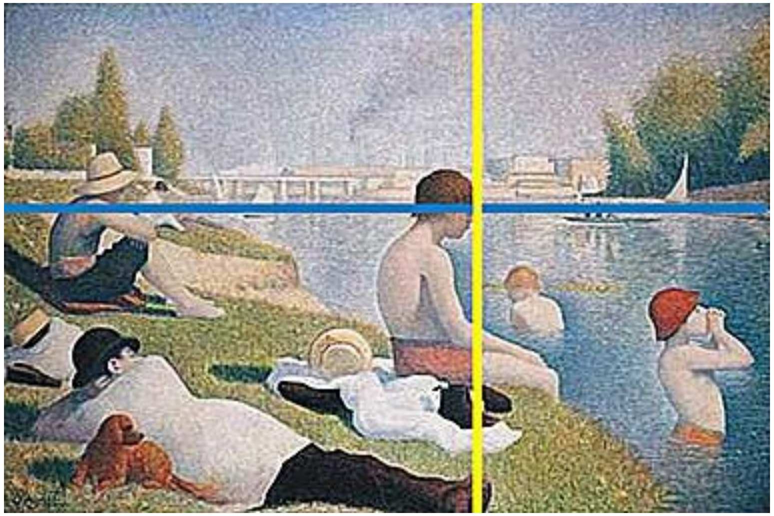


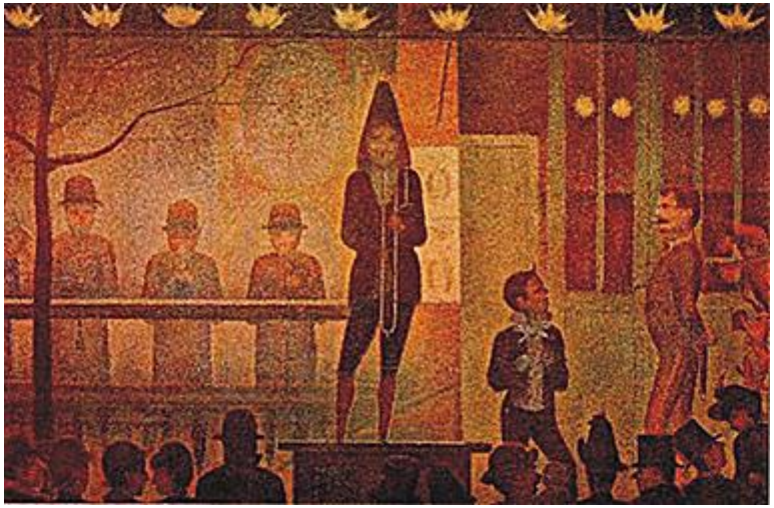
Na ten sam fresk nałożymy siatkę trójpodziału i mocne punkty

Piero della Francesca

Biczowanie

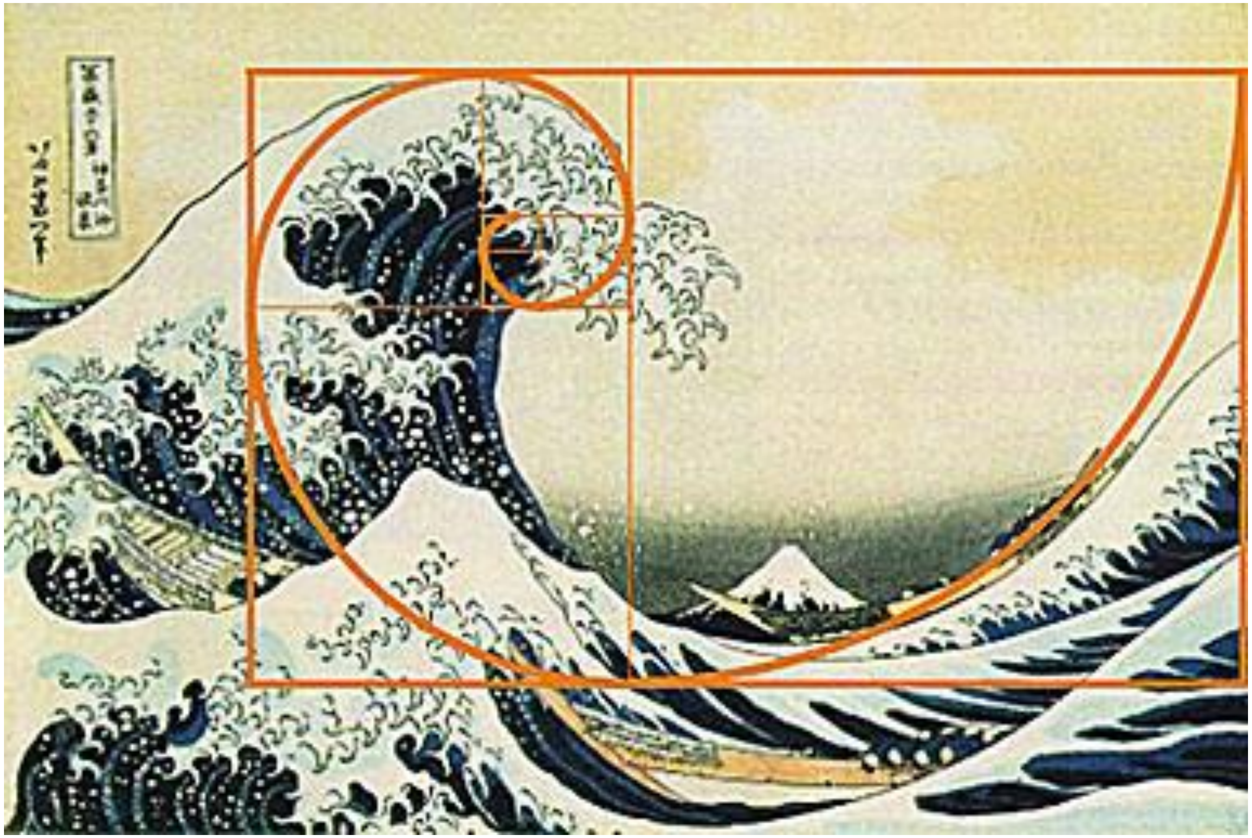
Georges Seurat





Jego obrazy przybierały często format złotego czworoboku, a kompozycja tej regule była podporządkowana bez reszty.

Hokusai



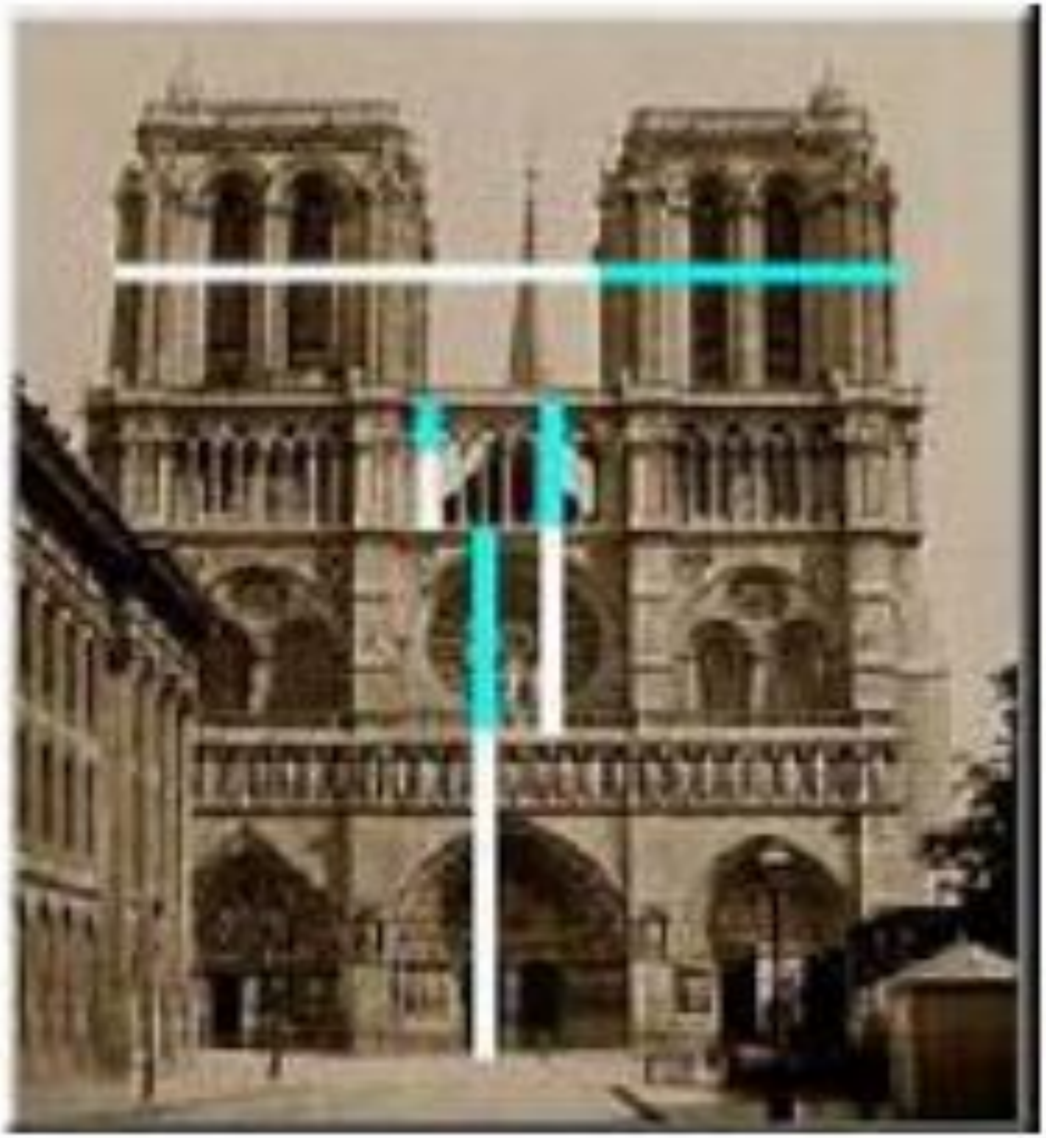
Wielka fala.

Salvador Dalí

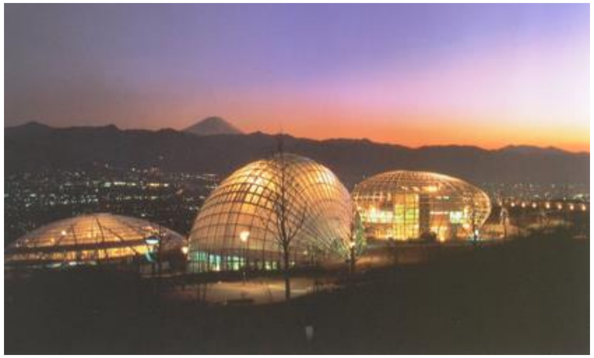
sakrament ostatniej wieczerzy

Budynek ONZ w Nowym Jorku

Notre Dam



Nowoczesne budowle



Muzeum Owocu

Dworzec kolejowy Lyon – Satolas

W czasach współczesnych, w dyscyplinach z pozoru odległych od sztuki - w projektowaniu i budowie maszyn - znajdziemy również piękne przykłady konstrukcji zgodnych z boską proporcją.

Albrecht Dürer

Na obrazie Albrechra Dürera zatytułowanym "Melancholia", znajduje się wyjątkowy kwadrat magiczny, zestawiony tak pomysłowo, że dwie środkowe liczby dolnego rzędu dają rok powstania dzieła tj. 1514 .

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

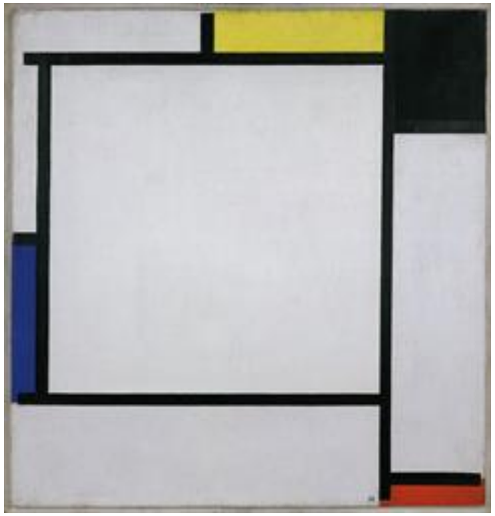
Wassily Kandinsky

Wassily Kandinsky, "Composition VII"
Dzieła tego pierwszego malującego czysto abstrakcyjne obrazy artysty to przykład zastosowania w sztuce figur geometrycznych.

Wassily Kandinsky, "Transverse Line"

Geometria

Carlos Cruz – Diez



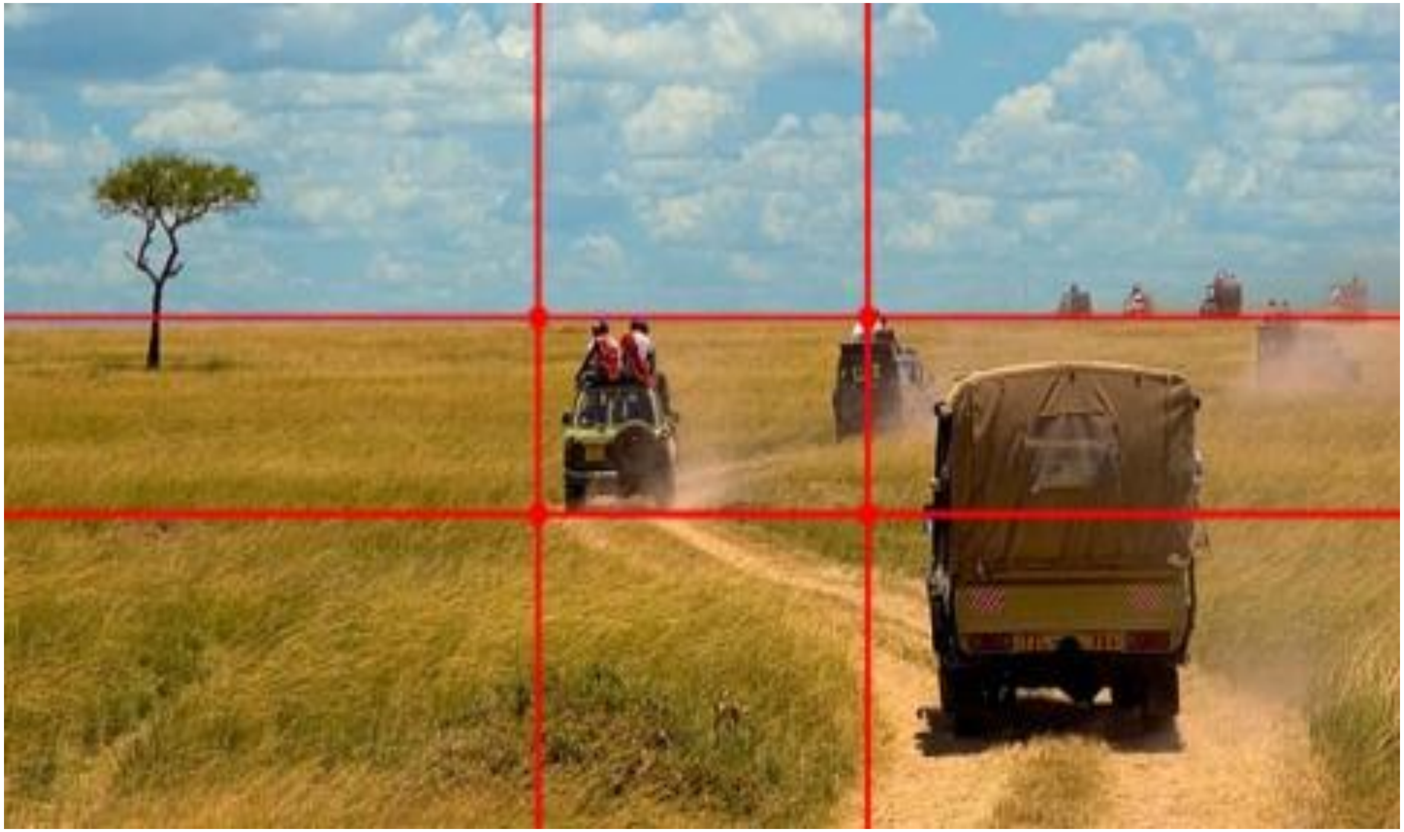
Piet Mondrian

Kazimierz Malewicz

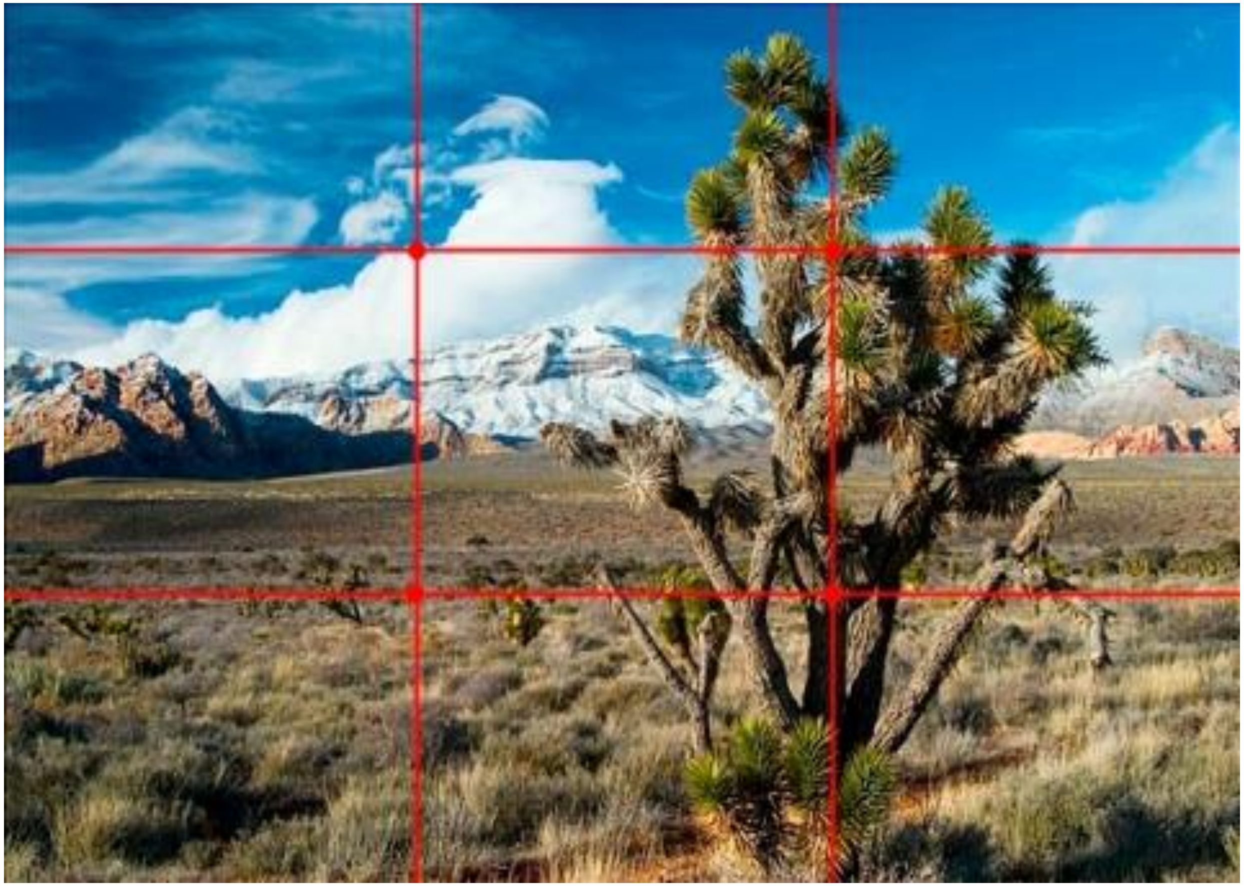
Wszystko tu jest poskładane jak na matematykę przystało. Dynamika uzyskiwana jest za pomocą skosów w jakich położone są proste figury lub przez zagęszczenie regularnych i precyzyjnych linii.

Złoty podział w fotografii

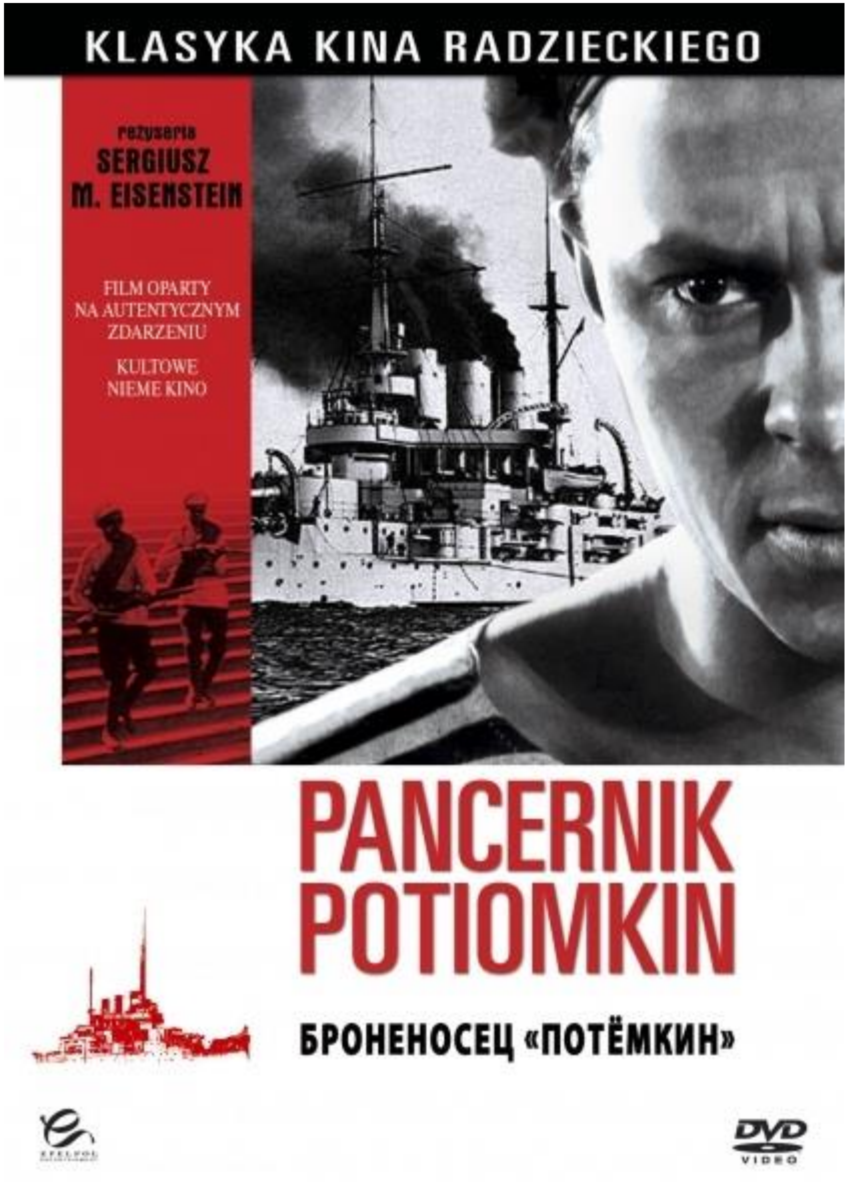
Poziome linie złotego podziału kadru to również dobra lokalizacja dla umiejscowienia linii horyzontu.



Poniższej przedstawiona została różnica pomiędzy złotym podziałem i trójpodziałem.



Złoty podział w sztuce filmowej



Za najbardziej prawidłową (kanoniczną) formę dramatu uznaje się dramat złożony **z pięciu aktów. W klasycznej tragedii punkt kulminacyjny następuje tuż przed trzecim aktem. Pomiędzy aktem drugim i trzecim przebiega z reguły zasadnicza cezura tragedii (liczby 2 i 3 – to liczby ciągu Fibonacciego).**

Matematyka w muzyce

„Muzyka jest nieświadomym ćwiczeniem arytmetycznym duszy”

G. W. Leibniz

Złoty podział

$$(a+b)/a = a/b = \phi$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Występowanie:

- sonaty Mozarta
- Piąta Symfonia Beethovena
- Bartók – utwory bazujące na dwóch przeciwstawnych systemach: oparte na złotym podziale i skali akustycznej
- Debussy - w organizacji sekcji muzyki np. w „Reflets dans l'eau” („Odbicia w wodzie”)
- Schubert
- Stradivarius – obliczenie dokładnego miejsca i położenia otworów rezonansowych w pudle skrzypiec
- badanie Sabaniejewa

Stradivarius – obliczenie dokładnego miejsca i położenia otworów rezonansowych w pudle skrzypiec

Stosunek niebieskiej części odcinka do żółtej jest równy ϕ

Badanie L. Sabaniejewa

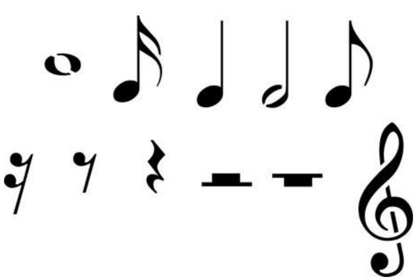
Bach	– **206** przypadków złotej proporcji na **100** utworów
Beethoven	– odpowiednio **194 na 120**
Haydn	– **140 na 100**
Liszt	– **110 na 100**
Mendelsohn	– **174 na 100**
Mozart	– **146 na 100**
Czajkowski	– **152 na 100**
Skriabin	– **76 na 50**
Prokofjew	– **32 na 20**
Sabaniejew	– **67 na 30**
Chopin	– **410 na 100**
Schuman	– **121 na 100**
Schubert	– **206 na 100**

Zasady muzyki

- wartości rytmiczne nut - w postaci ułamków (½)^n, dla 0 ≤ n ≤ 7
- oktawa - interwał prosty zawarty między ośmioma kolejnymi stopniami skali muzycznej, 12 półtonów
- nazwy dźwięków – częstotliwości (C, cis, d, dis)

np. a^1 = 440 Hz

a^2 = 880 Hz (o oktawę wyżej)



Nazwa tonu	Częstotliwość (Hz)	Oktawa
h	246,9	mała
c^1	261,63	razkreślna
cis^1	277,18	razkreślna
d^1	293,66	razkreślna
dis^1	311,13	razkreślna
e^1	329,63	razkreślna
f^1	349,23	razkreślna
fis^1	369,99	razkreślna
g^1	392	razkreślna
gis^1	415,3	razkreślna
a^1	**440**	**razkreślna**
ais^1	466,16	razkreślna
h^1	493,88	razkreślna
c^2	523,25	dwukreślna
cis^2	554,4	dwukreślna
d^2	587,3	dwukreślna
dis^2	622,3	dwukreślna
e^2	659,3	dwukreślna
f^2	698,5	dwukreślna
fis^2	740	dwukreślna
g^2	784	dwukreślna
gis^2	830,6	dwukreślna
a^2	880	dwukreślna
ais^2	932,3	dwukreślna
h^2	987,8	dwukreślna

Zasady muzyki

- interwał - odległość między dwoma dźwiękami

Interwały czyste (stosunek częstotliwości)	**Interwały wielkie**	**Interwały małe**
Pryma czysta (1:1)	Sekunda wielka (9:8)	Sekunda mała (16:15)
Kwarta czysta (4:3)	Tercja wielka (5:4)	Tercja mała (6:5)
Kwinta czysta (3:2)	Seksta wielka (5:3)	Seksta mała (8:5)
Oktawa czysta (2:1)	Septyma wielka (15:8)	Septyma mała (9:5)
Undecyma czysta	Nona wielka	Nona mała
Duodecyma czysta	Decyma wielka	Decyma mała
Kwintdecyma czysta	Tercdecyma wielka	Tercdecyma mała
	Kwartdecyma wielka	Kwartdecyma mała

- stosunek częstotliwości kolejnych dźwięków

$$\frac{f'}{f} = \left(\sqrt[12]{2} \right)^n$$

f' – częstotliwość dźwięku wyższego
f – częstotliwość dźwięku niższego
n – rozmiar interwału w półtonach

Interwał		współczynnik	
sekunda	wielka	2^(2/12)	1.12246
tercja	mała	2^(3/12)	1.18921
tercja	wielka	2^(4/12)	1.25992
kwarta	czysta	2^(5/12)	1.33483
kwinta	czysta	2^(7/12)	1.49830
septyma	wielka	2^(11/12)	1.88774
oktawa		2^(12/12)	2.00000

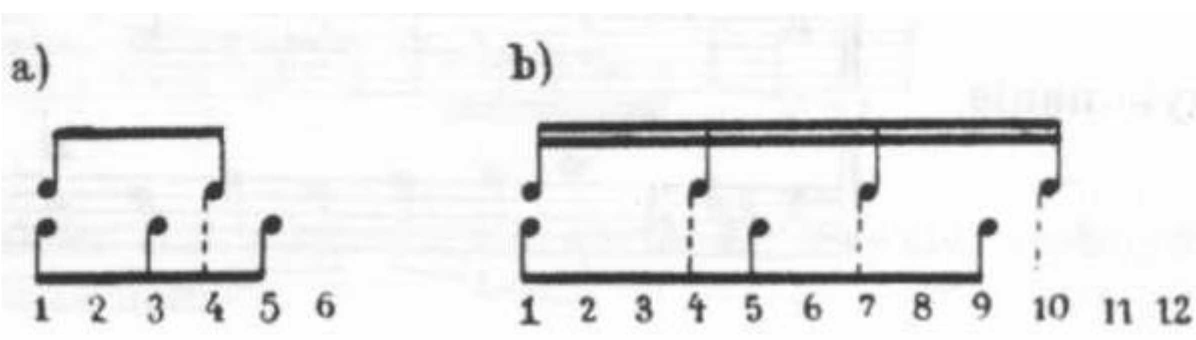
Zasady muzyki

Obliczanie stosunków rytmicznych

- podział regularny – podział (dwójkowy) wartości rytmicznych na dwie, cztery, szesnaście itd. równych części
- podział nieregularny – wynikiem takiego podziału są grupy nut nazywane niemiarowymi

np. dzielimy nutę na 3 równe części i otrzymujemy grupę trzech nut (triola)

- zapis powstałych w ten sposób stosunków rytmicznych:
  - znalezienie wspólnej wielokrotności
  - podział odcinka na liczbę równą tej wielokrotności



W muzyce współczesnej

Odejście od zasad harmonii we współczesnej muzyce poważnej

Dodekafonia - muzyka dwunastotonowa powstała w 1 poł. lat 20. XX w. w Austrii i Niemczech.

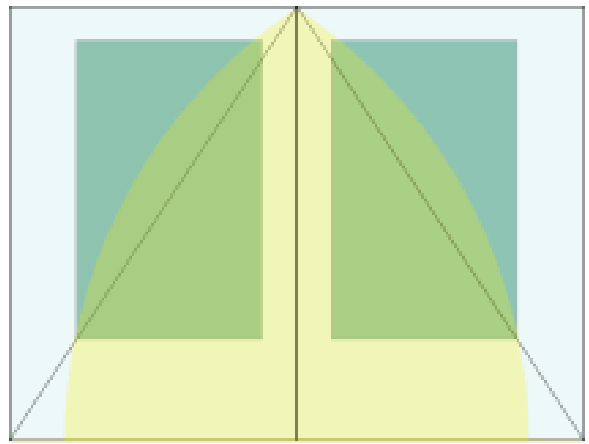
- Najbardziej znanymi kompozytorami, którzy stworzyli i posługiwali się tą techniką kompozytorską byli Schonberg, Webern i Berg.
- Podstawowe zasady dodekafonii:
  - odrzucenie tonalności i traktowanie wszystkich dźwięków skali chromatycznej jako całkowicie autonomiczne elementy. W konsekwencji negowanie uprzywilejowania pewnych dźwięków jako mocnych punktów, tzw. dominant.
  - Żaden dźwięk nie powinien być powtórzony, dopóki nie zostaną użyte wszystkie dźwięki skali.

W muzyce współczesnej

Iannis Xenakis (29 maja 1922 - 4 lutego 2001) – grecki kompozytor muzyki współczesnej. Łączył proces komponowania między innymi z modelowaniem matematycznym, procesami stochastycznymi i teorią gier. Zapisywał swoje utwory na papierze kreślarskim i na kalce technicznej.

- rachunkek prawdopodobieństwa z procesami losowymi (*Pithoprakta),*
- *teoria gier (Pojedynek)*
- *teoria zbiorów (Herm)*
- *matematyczna teoria grup (Nomos Alpha)*

Liczby w literaturze



Przedstawienie proporcji średniowiecznego rękopisu. "Proporcje strony 2:3. Proporcje marginesów 1:1:2:3. Obszar tekstu w złotej proporcji"

Średniówka dzieli kolejne wersy utworu W podanym niżej fragmencie utworu **średniówkę zaznaczono linią pionową:**

„Litwo! Ojczyzno moja! | ty jesteś jak zdrowie;
Ile cię trzeba cenić, |ten tylko się dowie,
Kto cię stracił. Dziś piękność | twą w całej ozdobie
Widzę i opisuję, | bo tęsknię po tobie..."
(**A.Mickiewicz,** *Pan Tadeusz, Księga I)*

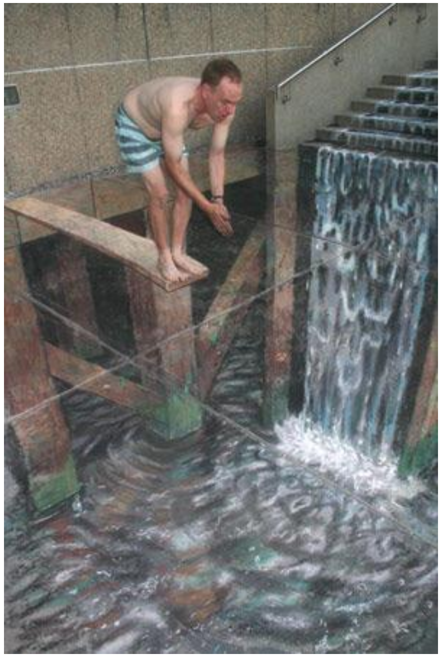
Perspektywa

Podstawową jej zasadą jest pozorne zmniejszanie się wielkości przedmiotu w miarę oddalania od widza oraz pozorna zbieżność ku horyzontowi wszystkich linii biegnących od oka widza do przedmiotu - jest to tzw. **perspektywa linearna**.

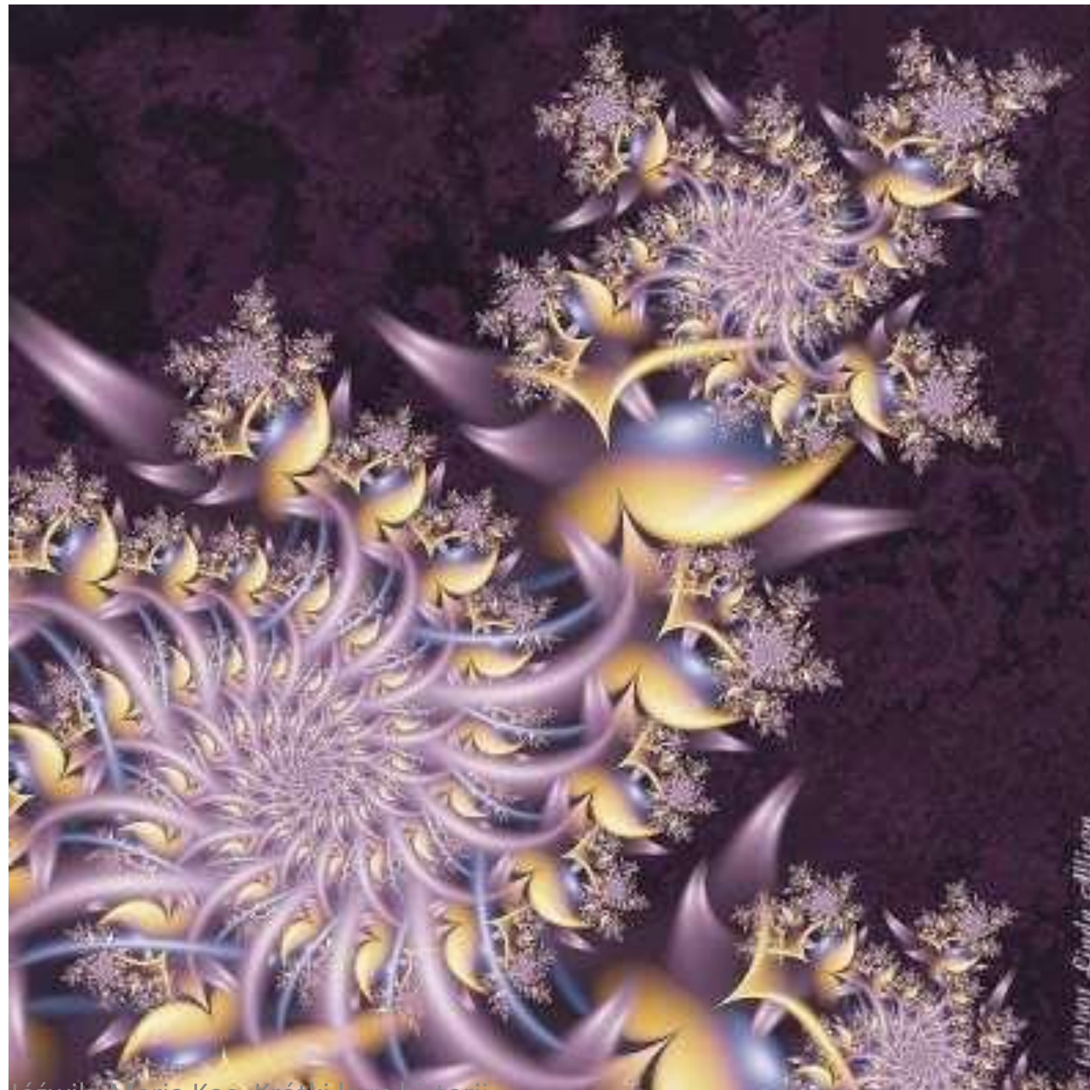
Perspektywa linearna była znana już w starożytności. W średniowieczu obrazy traktowano przeważnie dwuwymiarowo. Ponowienie prób przedstawiania przedmiotów w trzech wymiarach datuje się od XIV w.

Sztuka anamorficzna

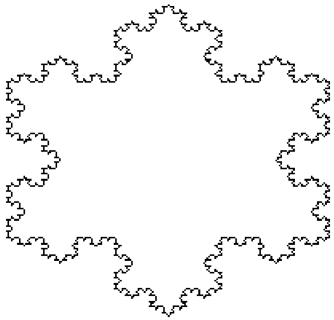
Obrazem anamorficznym nazywamy obraz powstały przez celowe zniekształcenie jego proporcji w taki sposób, aby jego poprawny odczyt był możliwy przez popatrzenie na niego z ustalonej perspektywy lub odbicie go w odpowiednim

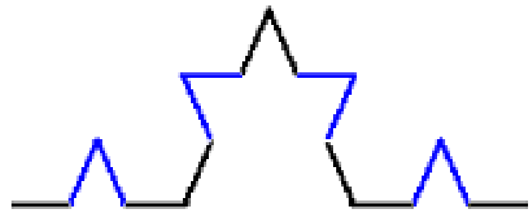


Fraktale w sztuce

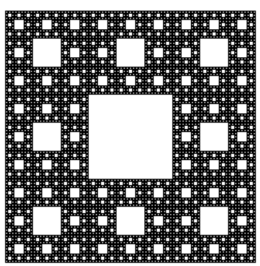


Zbiór Cantora



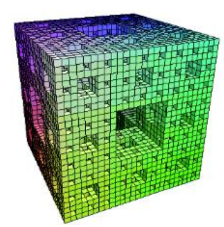


Krzywa von Kocha



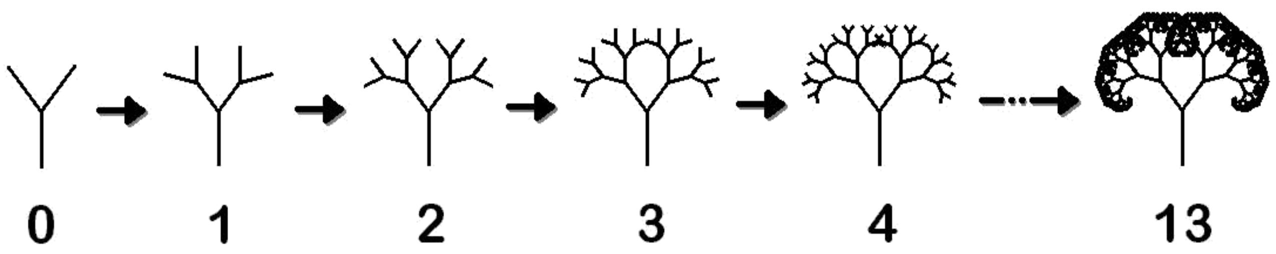
Kwadrat Sierpińskiego.

Gąbka Mengera.



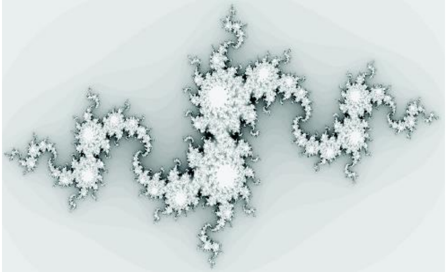
Rys historyczny rozwoju geometrii fraktali

„The Fractal Geometry of Nature". – Benoit Mendelbrot

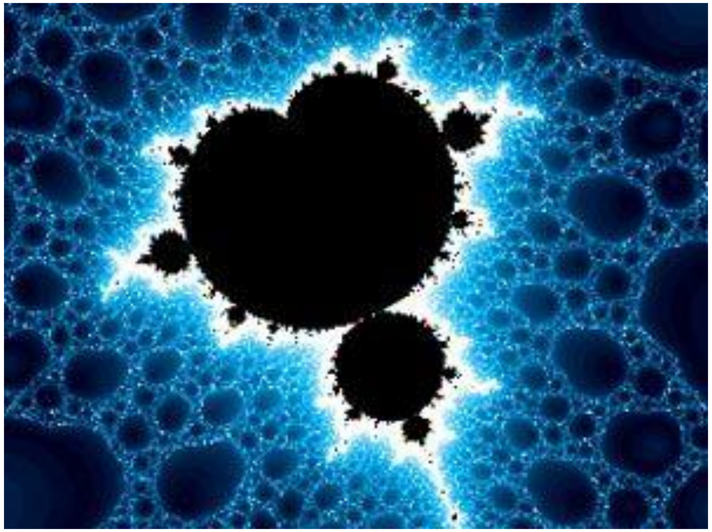


Geometryczny opis drzewa

Zbiory Mandelbrota i zbiory Julii



Zbiór Julii jest zbiorem punktów na płaszczyźnie. Każdy punkt posiada pewien kolor, który otrzymuje się przy pomocy iteracji. Zbiory Julii, jak to fraktale, również są samopodobne, lecz już nie ściśle



Zbiór Mandelbrota.
Mieszcząc się na jednym rysunku zbiór ten zawiera informację (matematyczną) o wszystkich zbiorach Julii (czyli jest lokalnie podobny do odpowiedniego zbioru Julii). Jednocześnie posiada te same własności co zbiory Julii

Fraktale i sztuka

Fraktale otworzyły nowe możliwości tworzenia sztuki.

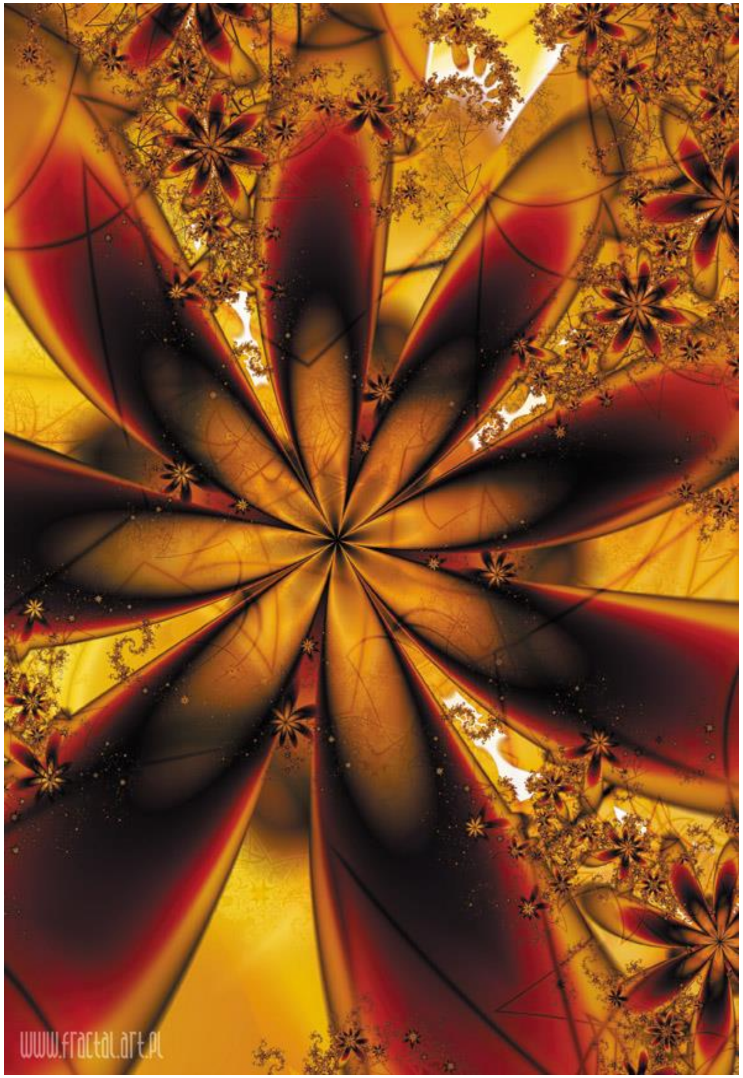
Pierwsza wystawa odbyła się w 1984

W 1985 roku w Londyńskim Muzeum Nauk Przyrodniczych - wystawa „Granice chaosu: obrazy zespolonych układów dynamicznych”.

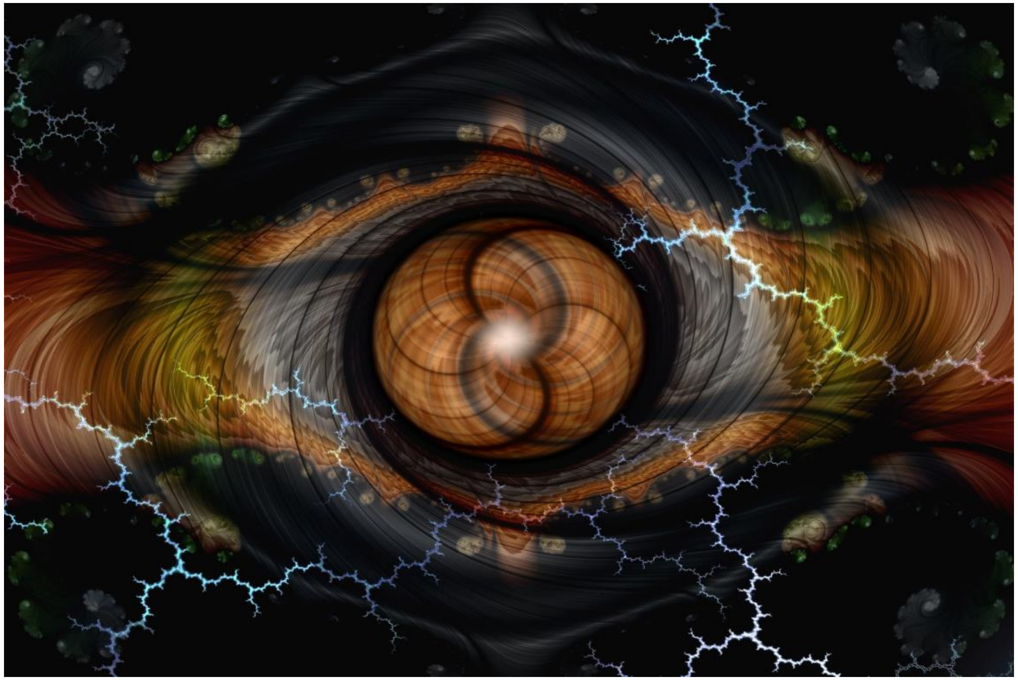
Sztuka fraktalna

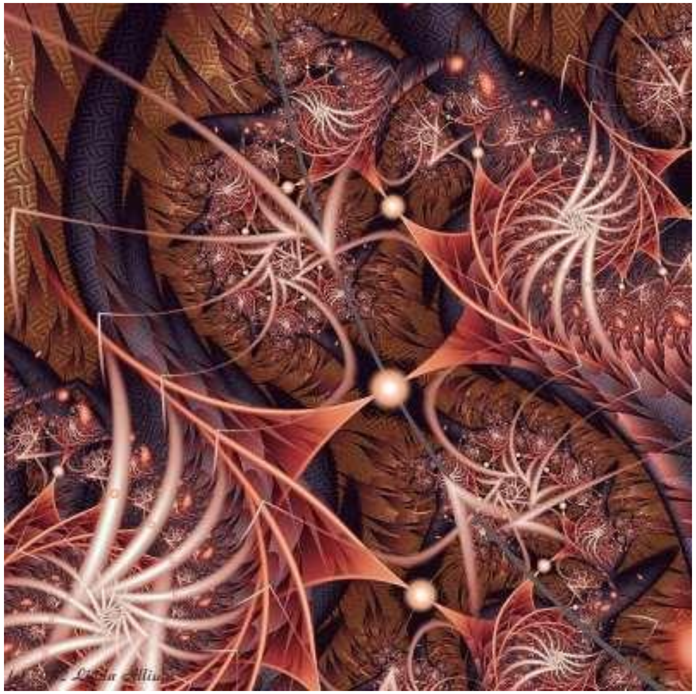
Jako oddzielny gatunek sztuki, sztuka fraktalna liczy sobie około 15-20 lat.
Jest to dziedzina, w której polu zainteresowań znajdują się struktury fraktalne bądź zbiory, które charakteryzuje ich własna nieskończoność

Sztuka fraktalna nie jest przypadkowa w tym znaczeniu, że nie jest losowa ani że brak w niej jakichkolwiek zasad. Opierając się na matematycznych wzorach, wykonanie fraktala jest ściśle przyczynowo uwarunkowane.



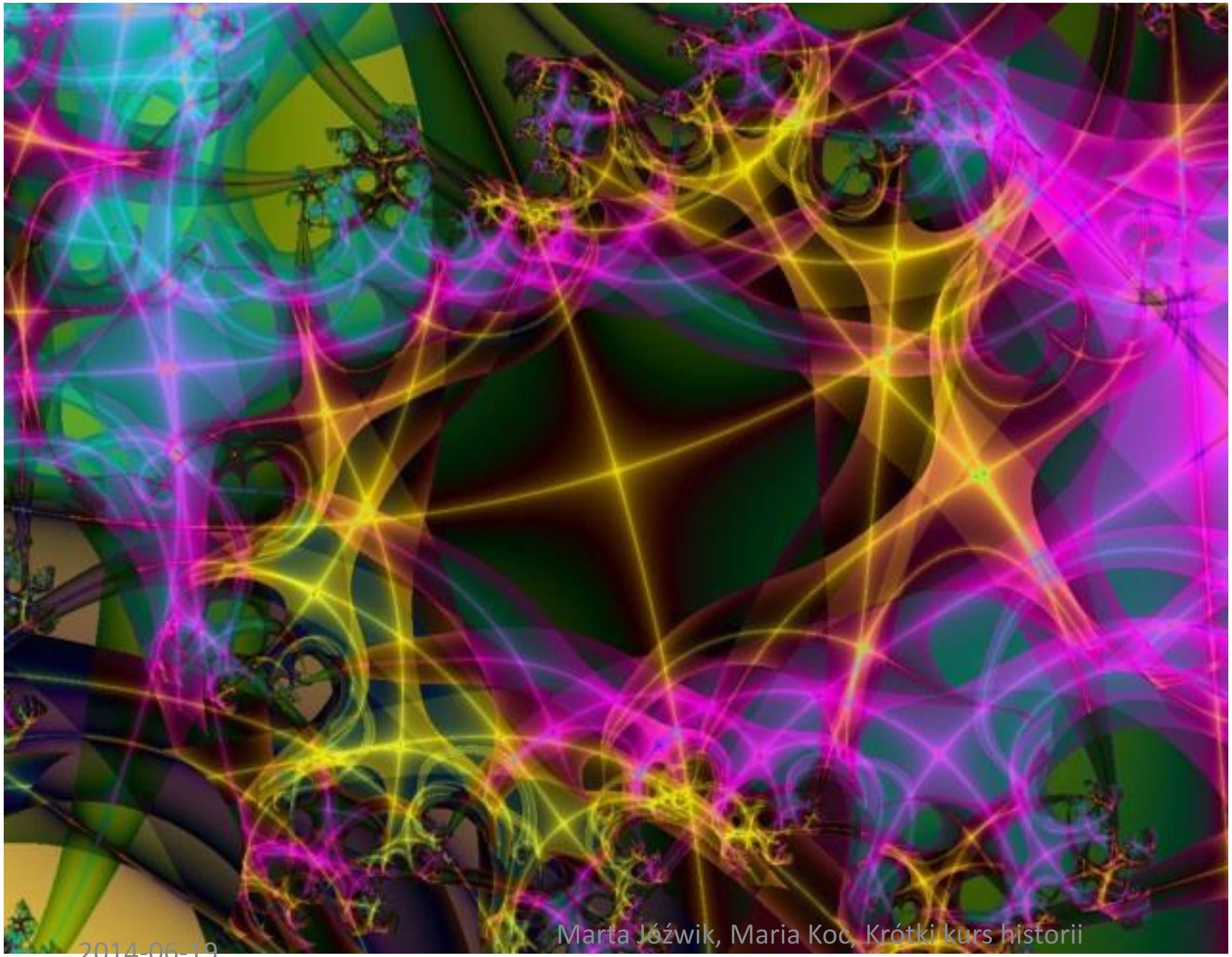
Obecnie galerie i muzea chętnie organizują wystawy poświęcone tej nowej dziedzinie sztuki, cieszą się one wielkim zainteresowaniem odwiedzających.



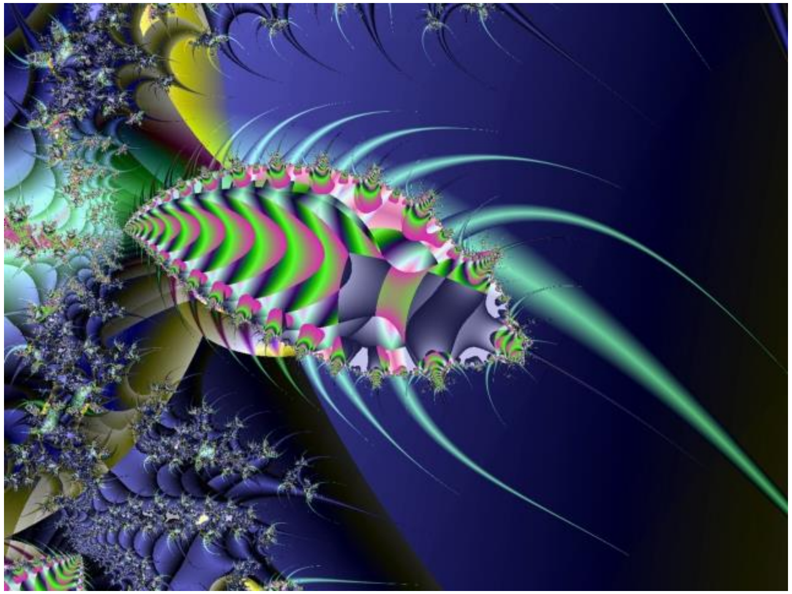


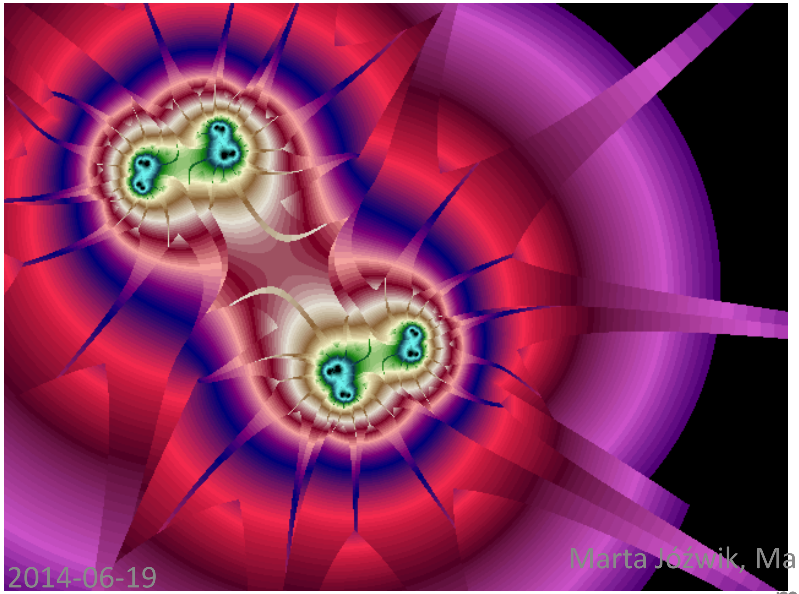
Konkurs „Fractulus"

Konkurs po raz pierwszy odbył się w 1997 i odbywał się corocznie do 2000 roku włącznie, każdy z dużym sukcesem.

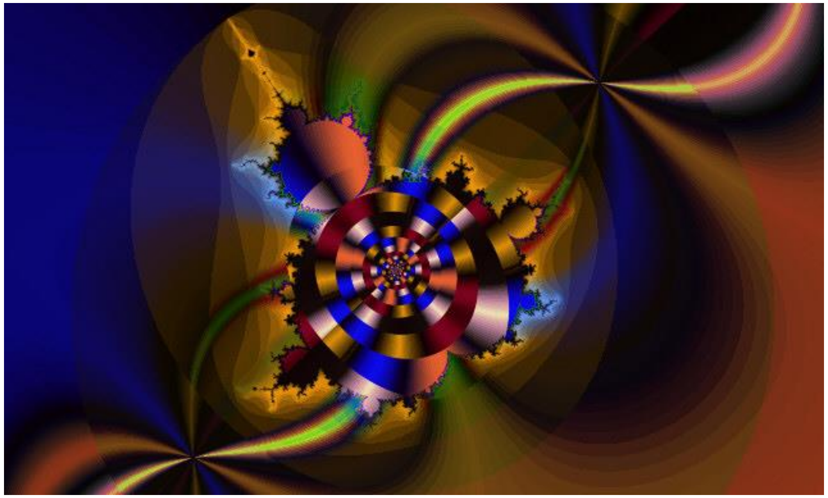


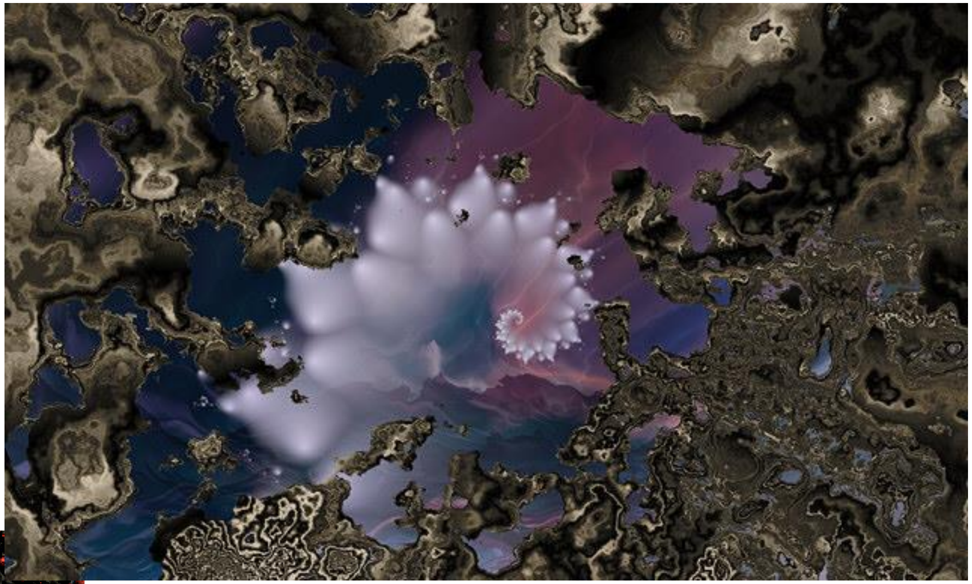
Konkurs „Fractulus” – prace

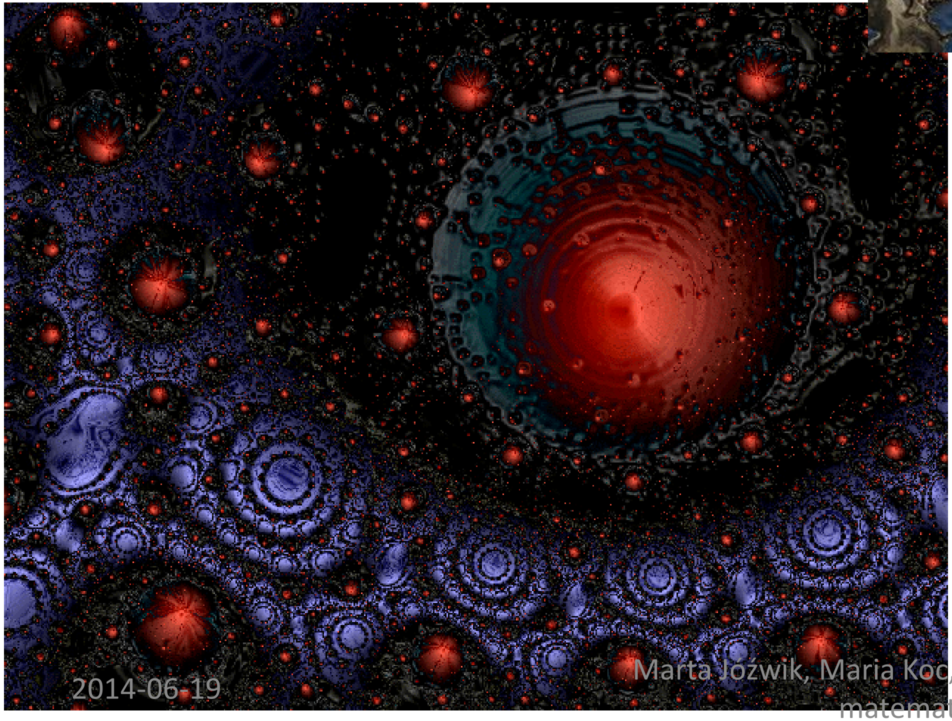


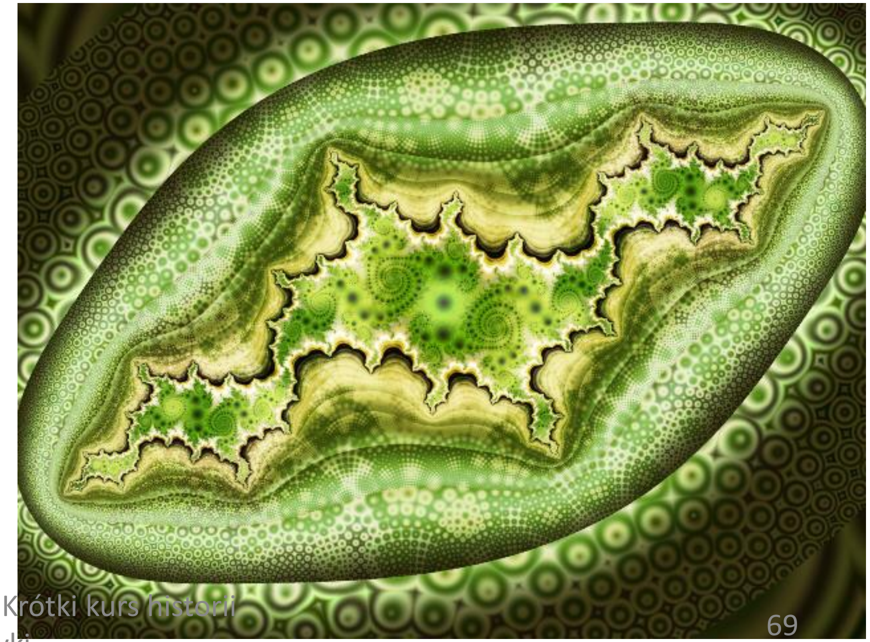


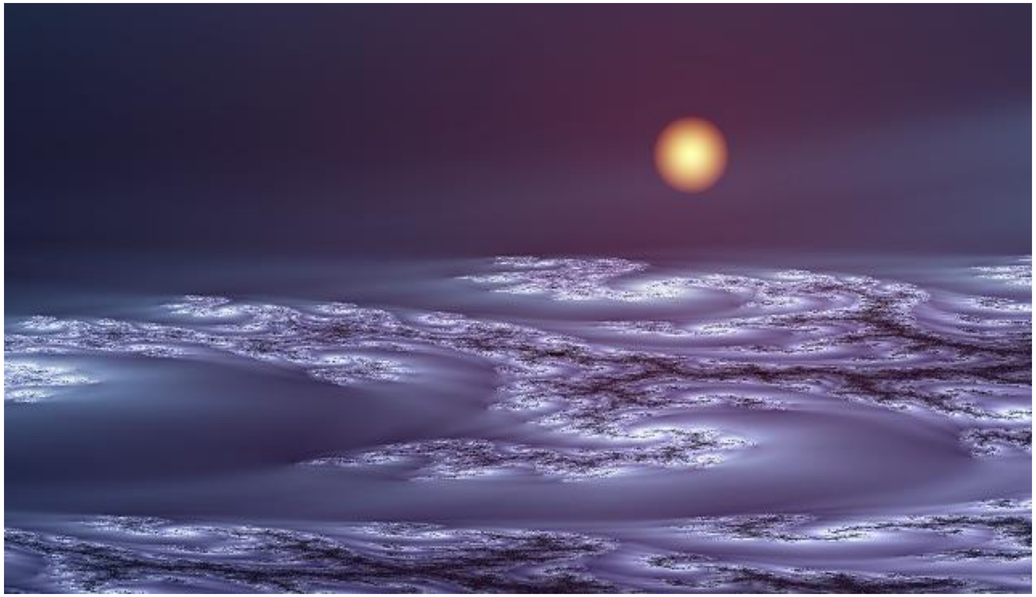
Konkurs „Fractulus" – prace

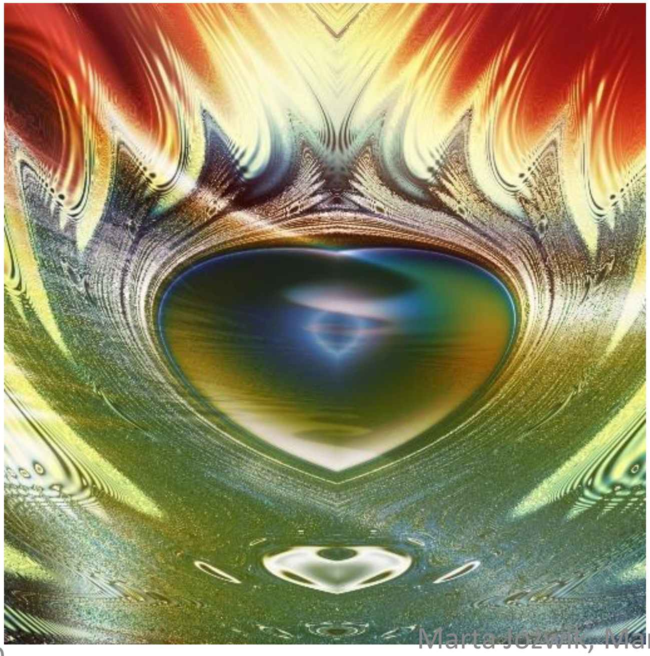












Bibliografia

- F. Wesołowski, „Zasady muzyki”, PWM, Kraków, 1986
- W. Witczak, „ *W poszukiwaniu matematyki w materiale i w formie muzycznej”, MISHELLANEA*
  pismo studentów MISH UW, nr 2-3, 2001
- A. Zdanowicz, „ Matematyka w muzyce”, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie, Warszawa
- „Złudzenie zmysłów. Sztuka w oczach matematyki **„**Autor: Francisco Martín Casalderry
- „Złota liczba: rytuały i rytmy pitagorejskie w rozwoju cywilizacji zachodniej” Autor: Ghyka Matila Costiescu
- matematyka.wroc.pl
- mathcas.wordpress.com

Dziękujemy za uwagę