- A-zbiór, $|A|$-liczba elementów zbioru A, czyli *moc* zbioru A.
  Tw. *Prawo mnożenia.* Jeśli A_1,...,A_k to zbiory skończone, to $|A_1 \times ... \times A_k| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_k|$.

  Przykład: Jeśli $A_1 = ... = A_k = A$ to $A^k = \{(a_1, ..., a_k) : a_i \in A \; dla \; i = 1, 2, ..., k\}$-*wariacje z powtórzeniami.* Jeśli $|A| = n$ to $|A^k| = n^k$.

  Jeśli $A = \{0, 1\}$ to A^k-zbiór ciągów binarnych długości k i $|A^k| = 2^k$.

- Tw.*Prawo dodawania.* Jeśli A_1,...,A_k to parami rozłączne zbiory skończone, to $|\bigcup_{i=1}^k A_i| = \sum_{i=1}^k |A_i|$.

  Przykład: Ile dwucyfrowych liczb ma podzielny przez 4 iloczyn cyfr je tworzących?

  X-zbiór liczb dwucyfrowych spełniających powyższy warunek.

  A-zbiór liczb dwucyfrowych, których cyfra dziesiątek jest podzielna przez 4 (4 lub 8).

  B-zbiór liczb dwucyfrowych, których cyfra dziesiątek jest parzysta i niepodzielna przez 4 (2 lub 6).

  C-zbiór liczb dwucyfrowych, których cyfra dziesiątek jest nieparzysta (1 lub 3 lub 5 lub 7 lub 9).

  $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$, $A \cup B \cup C$-wszystkie liczby dwucyfrowe.

  $|A \cap X| = 2 \cdot 10 = 20$ (cyfra jedności dowolna)

  $|B \cap X| = 2 \cdot 5 = 10$ (cyfra jedności parzysta)

  $|C \cap X| = 5 \cdot 3 = 15$ (cyfra jedności podzielna przez 4 (0 lub 4 lub 8)

  $|X| = 20 + 10 + 15 = 45$

- Przykład: Ile jest ciągów k-elementowych zbudowanych z elementów zbioru n-elementowego bez powtórzeń (*wariacji bez powtórzeń*)?

  $$n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  jeśli $k = n$ to

  $$n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

  Uwaga! Nie możemy do rozwiązania tego problemu stosować prawa mnożenia, bo gdy wybieramy różne elementy w pierwszym kroku, w drugim kroku mamy różne zbiory.

  Niech $A \ni a \mapsto B_a$. Wtedy

  $$|\{(a, b) : a \in A, b \in B_a\}| = |\bigcup_{a \in A} \{a\} \times B_a| = \sum_{a \in A} |\{a\} \times B_a| = \sum_{a \in A} |B_a|.$$

  Z indukcji otrzymujemy:
  Tw. *Ogólne prawo mnożenia.* Jeżeli pewna procedura może być rozbita na k kolejnych kroków z r_i wynikami w i-tym kroku dla $i = 1, ..., k$, to w całej procedurze mamy $r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_k$ łącznych wyników (rozumianych jako uporządkowane ciągi wyników cząstkowych).

- Ile jest wariacji k-elementowych bez powtórzeń na zbiorze n-elementowym zawierających jeden konkretny element?

  Najpierw wybieramy miejsce dla tego elementu, a potem wybieramy $k-1$ elementów spośród $n-1$ na $k-1$ pozostałych miejsc: $k \cdot \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!} = k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!}$.

  Ile jest wariacji k-elementowych z powtórzeniami na zbiorze n-elementowym zawierających jeden konkretny element?
  $k \cdot n^{k-1}$**-rozumowanie błędne!**
  Niech $k = 3$, $n = 4$ a wybranym elementem będzie 1. Wtedy ciąg $(1, 1, 1)$ został policzony 3-krotnie.

  Rozumowanie poprawne:
  Liczba ciągów nie zawierających danego elementu : $(n-1)^k$. Stąd liczba ciągów zawierających ten element : $n^k-(n-1)^k$.

- Tw. *Zasada bijekcji.* Niech A,B-zbiory skończone. Jeśli istnieje bijekcja $f : A \to B$, to $|A| = |B|$.

  Przykłady:

  - Ile jest podzbiorów zbioru n-elementowego ?
    Niech $X = \{x_1, ..., x_n\}$ oraz $A \subset X$ wtedy A przyporządkowujemy ciąg binarny n-elementowy $(a_1, ..., a_n)$, gdzie

    $$a_i = \begin{cases} 1 & \textit{jeśli} \quad x_i \in A \\ 0 & \textit{jeśli} \quad x_i \notin A \end{cases}$$

    Jest to bijekcja. Stąd liczba podzbiorów zbioru X jest równa $2^n = 2^{|X|}$.
  - Liczba sposobów pokolorowania k identycznych kul przy pomocy n-kolorów =
    = liczba sposobów rozłożenia k identycznych kul w n szufladach, np. dla $k = 9$, $n = 5$ jeden ze sposobów to:

    $$ooo|o| \;\; |oooo|o$$

    = liczba ciągów binarnych, w których jest k zer i $n - 1$ jedynek

    $$0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0$$

    =liczba najkrótszych dróg na Manhattanie z A do B=
    =liczba rozwiązań w liczbach nieujemnych całkowitych równania

    $$x_1 + ... + x_n = k \textit{ gdzie } x_i \geq 0, \; x_i \in Z \textit{ dla } i = 1, ..., n.$$

- Tw. *Ogólna zasada bijekcji.* Jeśli $f : A \to B$ takie, że $\forall b \in B \; |f^{-1}(b)| = n$ oraz $\forall b, c \in B \; f^{-1}(b) \cap f^{-1}(c) \neq \emptyset \Rightarrow b = c$ to $|A| = n|B|$

  Przykłady:

  - Ile jest podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego (*kombinacji k-elementowych zbioru n-elementowego*) ?
    Liczba wariacji bez powtórzeń k-elementowych zbioru n-elementowego to $\frac{n!}{(n-k)!}$. Niech $f((a_1, ..., a_k)) = \{a_1, ..., a_k\}$ przyporządkowuje ciągowi o różnych elementach zbiór jego elementów. Wtedy $|f^{-1}(\{a_1, ..., a_k\})| = k!$, bo $k!$ ciągów ma ten sam zbiór elementów. Stąd liczba kombinacji k-elementowych zbioru n-elementowego to $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.
    Stąd otrzymujemy:

    $$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

    oraz

    liczba ciągów binarnych, w których jest k zer i $n - 1$ jedynek =
    = liczba podzbiorów $n - 1$-elementowych zbioru $n - 1 + k$-elementowego = $\binom{n-1+k}{n-1}$.
  - Pokazać, że $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
    Współczynnik przy $a^k b^{n-k}$ w $(a + b)^n$ jest równy liczbie sposobów wyboru k nawiasów spośród n, z których do mnożenia bierzemy a, a z pozostałych $n - k$ bierzemy b, czyli jest równy $\binom{n}{k}$.
  -

    $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

    Trójkąt Pascala:

    $$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$