1. *Permutacje n-elementowe.* a_n-liczba permutacji n-elementowych. Każda permutacja n-elementowa powstaje z permutacji zbioru $n-1$-elementowego przez wstawienie elementu n na jedno z n miejsc.

   Stąd $a_n = na_{n-1}$ i $a_1 = 1$. Rozwiązaniem jest $a_n = n!$

   Dowód indukcyjny: $a_n = na_{n-1} = n(n-1)! = n!$

2. *Proste na płaszczyźnie.* a_n-liczba spójnych obszarów, na które dzieli płaszczyznę n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne 3 nie przecinają się w jednym punkcie.

   Mamy $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n$, skąd $a_n = a_{n-1} + n = 1 + 1 + 2 + ... + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

3. *Wieże Hanoi.* a_n-minimalna liczba ruchów na przeniesienie n krążków.

   Aby największy n-ty krążek przenieść na trzeci palik, trzeba najpierw przenieść $n-1$ pozostałych na drugi palik. Następnie trzeba je przenieść z drugiego palika na trzeci.

   Otrzymujemy więc równanie $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$, $a_1 = 1$.

   Stąd indukcyjnie $a_n = 2^n - 1$.

4. *Podzbiory bez sąsiadów.* a_n-liczba podzbiorów zbioru $\{1, 2, ..., n\}$ (włącznie z $\emptyset$) nie zawierających sąsiednich liczb.

   -liczba takich podzbiorów niezawierających 1 wynosi a_{n-1}

   -liczba takich podzbiorów zawierających 1 wynosi a_{n-2}

   Stąd $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ a_0 = 1,\ a_1 = 2$.

5. *Systemy różnych reprezentantów.* Niech $B = \{B_1, ..., B_n\}$ będzie rodziną zbiorów. *Systemem różnych reprezentantów* rodziny B nazywamy zbiór $\{b_1, ..., b_n\}$ taki, że $b_i \in B_i$ dla $i = 1, ..., n$ oraz $b_i \neq b_j$ dla $i \neq j$.

   a_n-liczba systemów różnych reprezentantów rodziny:

   $$B_1 = \{1, 2\}\,,\ B_i = \{i-1, i, i+1\}\ \ i = 2, ..., n-2,\ B_n = \{n-1, n\}$$

   Wtedy

   a_{n-1}-liczba systemów różnych reprezentantów tej rodziny, w których $b_1 = 1$ (stąd $b_2 = 2$ lub $b_2 = 3$ itd.)

   a_{n-2}-liczba systemów różnych reprezentantów tej rodziny, w których $b_1 = 2$ (stąd $b_2 = 1$ i $b_3 = 3$ lub $b_3 = 4$ itd.)

   Stąd $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ a_0 = 1,\ a_1 = 2$.

6. *Ciąg Fibonacciego.* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_0 = 1,\ F_1 = 1$, czyli $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

Rozwiązywanie *jednorodnych liniowych równań rekurencyjnych o stałych współczynnikach:*

$$a_n + c_1 a_{n-1} + ... + c_r a_{n-r} = 0.$$

Podstawiamy $a_j = x^j$. Wtedy otrzymujemy *równanie charakterystyczne*:

$$x^r + c_1 x^{r-1} + ... + c_r = 0.$$

W C ma ono dokładnie r pierwiastków (liczonych z krotnościami). Każdemu k_i-krotnemu pierwiastkowi x_i odpowiada k_i rozwiązań równania jednorodnego rekurencyjnego postaci:

$$x_i^n, nx_i^n, n^2 x_i^n, ..., n^{k_i - 1} x_i^n.$$

Dowolne rozwiązanie jest kombinacją liniową powyższych.

Uwaga. Jeśli $c_i \in R$ dla $i = 1, ..., r$ i $x_i \notin R$, to $\bar{x}_i$ też jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, a rzeczywistymi rozwiązaniami danego równania odpowiadającymi rozwiązaniom zespolonym $n^l x_i^n$ i $n^l \bar{x}_i^n$ są $Re(n^l x_i^n)$ i $Im(n^l \bar{x}_i^n)$.

Przykład:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_0 = 1,\ F_1 = 1.$$

Równanie charakterystyczne:

$$x^2 = x + 1$$

Jego pierwiastki:

$$x_1 = (1+\sqrt{5})/2 \ i \ x_2 = (1-\sqrt{5})/2.$$

Stąd $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$.

7. *Nieporządki,* czyli permutacje bez punktów stałych.

   Niech D_n-liczba nieporządków rzędu n. Mamy $D_1 = 0, D_2 = 1$.

   Nieporządki rzędu n dzielimy na dwie grupy:

   - Zawierające transpozycję (n, i), gdzie $i < n$. i można wybrać na $n-1$ sposobów, a pozostałe elementy tworzą nieporządek rzędu $n-2$.
   - Pozostałe. Na n-tym miejscu stoi i, ale na i-tym nie stoi n. Na pierwszych $n-1$ miejscach otrzymamy nieporządek rzędu $n-1$, jeśli w miejsce n napiszemy i.

   Stąd

   $$D_n = (n-1)D_{n-2} + (n-1)D_{n-1} = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

   Niech $B_j = D_j/j!$ Wtedy

   $$nB_n = (n-1)B_{n-1} + B_{n-2}$$

   czyli

   $$n(B_n - B_{n-1}) = -(B_{n-1} - B_{n-2}).$$

   Niech $C_n = B_n - B_{n-1}$. Wtedy

   $$C_n = -C_{n-1}/n, \quad C_2 = B_2 - B_1 = \frac{1}{2}D_2 - D_1 = \frac{1}{2}.$$

   Indukcyjnie otrzymujemy $C_n = (-1)^n/n!$, czyli $B_n = C_n + B_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$. Stąd

   $$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

8. *Kolejność mnożenia.*

   a_n-liczba sposobów, na które można ustawić $n-2$ pary nawiasów określające kolejność mnożenia w iloczynie

   $$c_1 \cdot c_2 \cdot ... \cdot c_n.$$

   Napierw ustalamy, które iloczyny biorą udział w ostatnim mnożeniu. Wybieramy $k \in \{1, ..., n-1\}$ i na końcu mnożymy $c_1 \cdot ... \cdot c_k$ i $c_{k+1} \cdot ... \cdot c_n$. Stąd

   $$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.$$

9. *Liczby Bella.*

   B_{n+1}-liczba wszystkich podziałów zbioru $n+1$-elementowego na rozłączne i niepuste zbiory. Kolejność występowania zbiorów w podziale nie jest ważna.

   Ten zbiór, który zawiera element $n+1$, może zawierać i innych elementów. Można je wybrać na $\binom{n}{i}$ sposobów, a resztę zbioru można podzielić na B_{n-i} sposobów. Stąd

   $$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j.$$