Niech (a_i)-ciąg liczbowy. Wtedy *funkcją tworzącą* nazywamy szereg

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

$\forall (a_i)\ \exists R \geq 0\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w zbiorze $|x| < R$. Można szereg w tym zbiorze różniczkować i całkować wyraz po wyrazie.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Przykład: $a_i = i!$ Wtedy szereg $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i! x^i$ jest rozbieżny $\forall x > 0$.
Wykładniczą funkcją tworzącą nazywamy szereg

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i.$$

Przykład: $a_i = i!$ Wtedy szereg $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ w zbiorze $|x| < 1$.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i = e^x$$

1. *Permutacje n-elementowe.* $a_n = n a_{n-1}$ i $a_0 = 1$.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i a_{i-1}}{i!} x^i = 1 + x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i-1}}{(i-1)!} x^{i-1} = 1 + x f(x)$$

Stąd $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ czyli $a_i = i!$

2. *Proste na płaszczyźnie.*
$a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n$.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{i-1} x^i + \sum_{i=1}^{\infty} i x^i = 1 + x f(x) + x(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)' = 1 + x f(x) + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Stąd

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i + x \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+2}{2} x^i$$

czyli $a_i = 1 + \binom{i+1}{2}$.

Uwaga. Jeśli $r \in R$ to $(1+x)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} x^i$, gdzie $\binom{r}{i} = \frac{r(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-i+2)(r-i+1)}{i!}$.

3. *Wieże Hanoi.*
$a_n = 2a_{n-1} + 1$, $a_0 = 0$. Wtedy

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=1}^{\infty} 2a_{i-1} x^i + \sum_{i=1}^{\infty} x^i = 2x f(x) + \frac{x}{1-x}.$$

Stąd

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} ((2x)^i - x^i)$$

czyli $a_i = 2^i - 1$.

4. *Ciąg Fibonacciego.* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_0 = 1,\ F_1 = 1$. Wtedy

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i = 1 + x + \sum_{i=2}^{\infty}(F_{i-1} + F_{i-2})x^i = 1 + xf(x) + x^2 f(x).$$

Stąd

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} \right) x^i$$

czyli $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} \right)$.

5. *Nieporządki.*

$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}),\ D_1 = 0,\ D_0 = 1$. Wtedy $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D_i}{i!} x^i$. Stąd

$$f'(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{D_i}{(i-1)!} x^{i-1} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{D_{i-1} + D_{i-2}}{(i-2)!} x^{i-1} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{D_{i-1}}{(i-2)!} x^{i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{D_{i-2}}{(i-2)!} x^{i-1} = xf'(x) + xf(x).$$

Wtedy $f'(x)(1-x) = xf(x)$ i $f(0) = 1$. Stąd

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} x^l = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j}{j!} x^i$$

czyli $D_i = i! \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j}{j!}$.

6. *Kolejność mnożenia.*

$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$. Wtedy

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = x + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} a_k a_{i-k} x^i = x + (f(x))^2$$

oraz $f(0) = 0$. Stąd

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{i} (-4x)^i = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \binom{\frac{1}{2}}{i} (-4x)^i,$$

ale $\binom{\frac{1}{2}}{i} = \frac{(-1)^{i-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2i-3)}{2^i i!}$, czyli

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2i-3)}{2^i i!} (-1)^i 4^i x^i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \frac{1}{i} \frac{\cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2i-3)}{(i-1)!} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \frac{(2i-2)!}{(i-1)!(i-1)!} x^i.$$

Stąd $a_i = \frac{1}{i}\binom{2i-2}{i-1}$ – jest to $i-1$ liczba Catalana.

7. *Liczby Bella.*

$B_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j$ Wtedy $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} x^i$. Stąd

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{(i-1)!} x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j} B^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{x^i}{(i-j)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} e^x = f(x) e^x$$

oraz $f(0) = 1$. Stąd

$$f(x) = e^{e^x} - 1 = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} e^{ix} = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} i^j x^j,$$

czyli $B_j = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} i^j$.