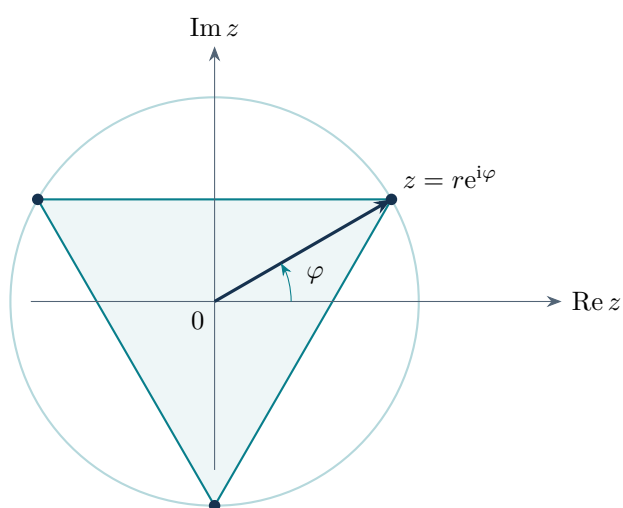


Liczby zespolone

Wykłady 1–2

Rozwinięte i skorygowane notatki



Co zawierają notatki

Definicje i twierdzenia z całego materiału, pełniejsze dowody, przykłady obliczone krok po kroku oraz rysunki pokazujące sens geometryczny działań. Szczególnie dokładnie opracowano argument, pierwiastki i dowód podstawowego twierdzenia algebry.

Podstawa opracowania: Wojciech Domitrz, *Algebra Liniowa z Geometrią 1*, wykłady 1–2: *Liczby zespolone*

Spis treści

1	Od liczb rzeczywistych do zespolonych	3
2	Postać algebraiczna i rachunki	4
3	Ciała i przykłady struktur algebraicznych	6
4	Sprzężenie, moduł i odległość	9
5	Argument i postać trygonometryczna	11
6	Potęgi i postać wykładnicza	14
7	Pierwiastki liczb zespolonych	17
8	Wielomiany i rozkład na czynniki	21
9	Dlaczego $\mathbb{C}$ nie jest ciałem uporządkowanym?	23
10	Dowód podstawowego twierdzenia algebry	24
A	Ściąga: wzory i wybór metody	26

Przyjęte oznaczenia

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $i^2 = -1$. Litery a, b, c, d oznaczają zwykle liczby rzeczywiste, a z, w liczby zespolone. Wszystkie kąty są podawane w radianach.

Dla $z \neq 0$ symbol $\arg z$ oznacza *zbiór* wszystkich argumentów, natomiast $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$ oznacza argument główny.

Jak czytać ten materiał

Najpierw opanuj rachunki w postaci algebraicznej. Następnie przejdź do modułu i argumentu: to one upraszczają mnożenie, potęgowanie i pierwiastkowanie. Rozdziały o wielomianach korzystają z obu tych opisów.

Dowód podstawowego twierdzenia algebry wymaga dodatkowo znanego z analizy twierdzenia Weierstrassa: funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga minimum i maksimum. Wszystkie pozostałe potrzebne kroki są rozpisane w notatkach.

1 Od liczb rzeczywistych do zespolonych

Oznaczenia:

Zbiór liczb naturalnych to $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Zbiór liczb całkowitych to $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$.

Zbiór liczb wymiernych to $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$.

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ to zbiór wszystkich granic ciągów liczb wymiernych. Mamy naturalne zawierania

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R},$$

1.1 Dlaczego potrzebujemy nowej liczby?

Równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązania rzeczywistego, ponieważ $x^2 \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wprowadzamy liczbę i spełniającą $i^2 = -1$. W $\mathbb{C}$ otrzymujemy

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i), \quad x = i \text{ lub } x = -i.$$

Uwaga

Symbol i oznacza jeden z dwóch pierwiastków równania $x^2 = -1$. Nie wolno bez dodatkowych ustaleń traktować zespolonego pierwiastkowania tak jak pierwiastka nieujemnej liczby rzeczywistej; wróćmy do tego w rozdziale 7.

1.2 Równanie kwadratowe o współczynnikach rzeczywistych

Niech $a \neq 0$ oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$. Uzupełnienie do kwadratu daje

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}. \end{aligned}$$

Stąd dla $\Delta \geq 0$ mamy $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$. Jeżeli $\Delta < 0$, to $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$, więc

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Przykład 1.1. Ujemny wyróżnik

Dla $x^2 - 2x + 5 = 0$ mamy $\Delta = 4 - 20 = -16$, zatem

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

Sprawdzenie: $(1+2i)^2 - 2(1+2i) + 5 = (-3+4i) - 2-4i+5 = 0$. Równoważnie $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$.

1.3 Cykl potęg jednostki urojonej

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^{k+4} = i^k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Na przykład $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, więc $i^{2026} = -1$, a $i^{-1} = 1/i = -i$.

2 Postać algebraiczna i rachunki

2.1 Definicja i interpretacja geometryczna

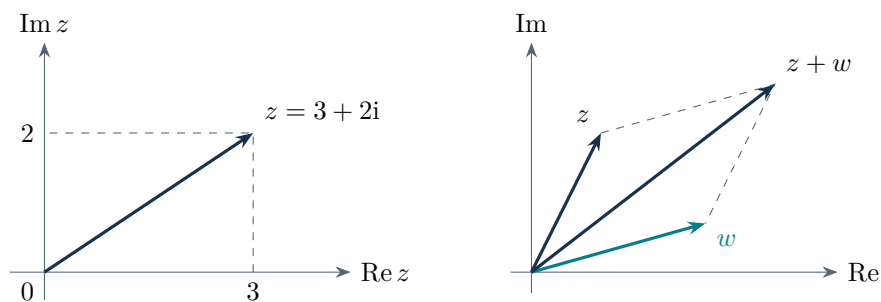
Definicja 2.1. Liczbę zespoloną zapisujemy jednoznacznie jako $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczby $\operatorname{Re} z = a$ oraz $\operatorname{Im} z = b$ nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną.

W szczególności $\operatorname{Im}(2 - 3i) = -3$, a nie $-3i$. Równość $a + bi = c + di$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$.

Ścisła konstrukcja polega na przyjęciu $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ z działaniami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Wtedy $1 = (1, 0)$, $i = (0, 1)$, a $i^2 = (-1, 0) = -1$. Liczbę rzeczywistą a utożsamiamy z $(a, 0)$.



Płaszczyzna zespolona i reguła równoległoboku dla dodawania.

2.2 Dodawanie, odejmowanie i mnożenie

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Drugi wzór wynika z wymnożenia nawiasów i zastąpienia i^2 przez -1 .

Przykład 2.1. Trzy podstawowe działania

Niech $z = 2 - 3i$ i $w = -1 + 4i$. Wtedy

$$\begin{aligned} z + w &= (2 - 1) + (-3 + 4)i = 1 + i, \\ z - w &= (2 + 1) + (-3 - 4)i = 3 - 7i, \\ zw &= -2 + 8i + 3i - 12i^2 = 10 + 11i. \end{aligned}$$

2.3 Odwrotność i dzielenie

Dla $z = a + bi \neq 0$ liczba $a^2 + b^2$ jest dodatnia. Korzystając z $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, dostajemy

Odwrotność

$$\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Rzeczywiście $z \cdot z^{-1} = (a^2 + b^2)/(a^2 + b^2) = 1$.

Liczba $a - bi$ to *sprzężenie* liczby z ; oznaczamy ją przez $\bar{z}$. Mnożąc licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika, otrzymujemy dla $c + di \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i. \end{aligned}$$

Przykład 2.2. Dzielenie z pełnym sprawdzeniem

$$\begin{aligned} \frac{3 + 2i}{1 - i} &= \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \\ &= \frac{3 + 3i + 2i + 2i^2}{1 - i^2} = \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i. \end{aligned}$$

Sprawdzamy wynik przez mnożenie:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right)(1 - i) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)i = 3 + 2i.$$

Przykład 2.3. Równanie liniowe nad $\mathbb{C}$

Rozwiążmy $(2 + i)z = 5 - i$. Ponieważ $2 + i \neq 0$, dzielimy:

$$z = \frac{5 - i}{2 + i} = \frac{(5 - i)(2 - i)}{5} = \frac{10 - 5i - 2i + i^2}{5} = \frac{9}{5} - \frac{7}{5}i.$$

To jedyne rozwiązanie. Równoważnie po podstawieniu $z = x + yi$ otrzymujemy układ $2x - y = 5$, $x + 2y = -1$, którego rozwiązaniem jest $(x, y) = (9/5, -7/5)$.

Dwie różne operacje

Liczba przeciwna do $z = a + bi$ to $-z = -a - bi$. Odwrotność to z^{-1} , określona tylko dla $z \neq 0$. Sprzężenie $\bar{z} = a - bi$ jest jeszcze inną operacją.

3 Ciała i przykłady struktur algebraicznych

3.1 Aksjomaty ciała

Definicja 3.1. *Ciało* to zbiór F z dwoma działaniami wewnętrznymi $+: F \times F \rightarrow F$ oraz $\cdot: F \times F \rightarrow F$, w którym istnieją różne elementy $0 \neq 1$ i zachodzą poniższe własności.

W tabeli $x, y, z \in F$; pomijamy kropkę mnożenia.

Własność	Treść
Łączność dodawania	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Element neutralny dodawania	$x + 0 = 0 + x = x$
Element przeciwny	Dla każdego x istnieje $-x$ z $x + (-x) = 0$
Przemienność dodawania	$x + y = y + x$
Łączność mnożenia	$(xy)z = x(yz)$
Element neutralny mnożenia	$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
Element odwrotny	Dla każdego $x \neq 0$ istnieje x^{-1} z $xx^{-1} = 1$
Przemienność mnożenia	$xy = yx$
Rozdzielność	$x(y + z) = xy + xz$

3.2 Dlaczego $\mathbb{C}$ jest ciałem?

Własności dodawania wynikają ze współrzednego dodawania w $\mathbb{R}^2$. Przemienność i rozdzielność mnożenia sprawdzamy, rozwijając wzór $(a + bi)(c + di)$. Dla łączności można porównać obie strony:

$$((a + bi)(c + di))(e + fi) = (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i.$$

Taki sam wynik daje $(a + bi)((c + di)(e + fi))$. Elementami neutralnymi są $0 + 0i$ i $1 + 0i$, a wzór na odwrotność z poprzedniego rozdziału rozstrzyga ostatnią istotną kwestię.

Ważny wniosek: brak dzielników zera

W dowolnym ciele $xy = 0$ pociąga $x = 0$ lub $y = 0$. Jeżeli bowiem $x \neq 0$, to po pomnożeniu przez x^{-1} dostajemy $y = 0$.

3.3 Przykłady i nieprzykłady

Zwykle działania czynią $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ciałami. Zbiór $\mathbb{Z}$ nie jest ciałem: element 2 nie ma odwrotności całkowitej. Zbiór $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ nie zawiera nawet zera; także $\mathbb{N}_0$ nie jest ciałem, bo nie zawiera liczby przeciwnej do 1.

3.4 Arytmetyka modulo i ciała skończone

Dla $m \geq 2$ zbiór $\mathbb{Z}_m$ składa się z klas reszt modulo m . Reprezentujemy je przez $0, 1, \dots, m-1$. Dodajemy i mnożymy zwykłe liczby całkowite, a następnie bierzemy resztę z dzielenia przez m .

Twierdzenie 3.2. $\mathbb{Z}_m$ z działaniami modulo m jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy m jest liczbą pierwszą.

Dowód. Jeżeli $m = p$ jest pierwsza i $a \in \{1, \dots, p-1\}$, to $\gcd(a, p) = 1$. Z tożsamości Bézouta istnieją całkowite u, v takie, że $ua + vp = 1$. Redukcja modulo p daje $ua \equiv 1 \pmod{p}$, więc klasa u jest odwrotnością klasy a . Pozostałe aksjomaty dziedziczymy z działań całkowitych.

Jeżeli $m = ab$, gdzie $1 < a, b < m$, to klasy a i b są niezerowe, lecz $ab \equiv 0 \pmod{m}$. W ciele jest to niemożliwe. $\square$

Przykład 3.1. Rachunki w $\mathbb{Z}_5$

$$3 +_5 4 = 2, \quad 3 \cdot_5 4 = 2, \quad -_5 2 = 3.$$

W pierwszym rachunku $7 = 1 \cdot 5 + 2$, w drugim $12 = 2 \cdot 5 + 2$. Odwrotności znajdujemy, szukając iloczynu dającego resztę 1:

a	1	2	3	4
a^{-1} w $\mathbb{Z}_5$	1	3	2	4

Na przykład $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$. Równanie $3x + 4 = 2$ w $\mathbb{Z}_5$ rozwiązujemy następująco:

$$3x = 2 - 4 \equiv 3, \quad x = 2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Sprawdzenie: $3 \cdot 1 + 4 = 7 \equiv 2 \pmod{5}$.

Przykład 3.2. Dlaczego $\mathbb{Z}_4$ nie jest ciałem?

Klasa 2 jest niezerowa, a $2 \cdot_4 2 = 0$. Gdyby istniało q z $q \cdot_4 2 = 1$, to

$$0 = q \cdot_4 0 = q \cdot_4 (2 \cdot_4 2) = (q \cdot_4 2) \cdot_4 2 = 1 \cdot_4 2 = 2,$$

co jest sprzecznością w $\mathbb{Z}_4$. Bezpośrednio możliwe reszty iloczynów $2q$ to tylko 0 i 2, nigdy 1.

Uwaga

W $\mathbb{Z}_5$ zapis $1/2$ oznacza element 3, bo $2 \cdot_5 3 = 1$. Nie jest to zwykła rzeczywista liczba 0,5. Sens działań zależy od tego, w jakim ciele pracujemy.

3.5 Rozszerzenie $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Rozważmy podzbiór liczb rzeczywistych

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Dodawanie i mnożenie zachowują ten zbiór, ponieważ

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2}, \\ (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Zawiera on 0, 1, a liczbą przeciwną do $a + b\sqrt{2}$ jest $-a - b\sqrt{2}$. Łączność, przemienność i rozdzielność dziedziczymy z $\mathbb{R}$. Pozostaje wykazać istnienie odwrotności.

Odwrotność w $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Dla $a + b\sqrt{2} \neq 0$ mamy

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

Mianownik jest niezerowy, a oba współczynniki są wymierne.

Dlaczego $a^2 - 2b^2 \neq 0$? Jeśli $b = 0$, to $a \neq 0$. Jeśli $b \neq 0$ i $a^2 = 2b^2$, mielibyśmy $(a/b)^2 = 2$, czyli $a/b = \pm\sqrt{2}$, wbrew niewymierności $\sqrt{2}$.

Przykład 3.3. Dzielenie bez przybliżeń dziesiętnych

Ponieważ $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$,

$$\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Dalej

$$\begin{aligned}\frac{1 + \sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} &= (1 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 = -1 + \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Sprawdzenie: $(-1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$.

3.6 Co oznacza słowo „rozszerzenie”?

Mamy $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$: każda liczba wymierna to $a + 0\sqrt{2}$, ale $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jest najmniejszym podciałem $\mathbb{R}$, które zawiera $\mathbb{Q}$ oraz $\sqrt{2}$. Każde takie podciało musi bowiem zawierać wszystkie sumy $a + b\sqrt{2}$.

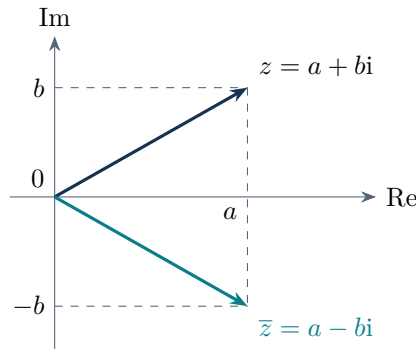
Istotne rozróżnienie

To $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, a nie samo $\mathbb{Q}$, jest rozszerzeniem ciała $\mathbb{Q}$ o pierwiastek równania $x^2 - 2 = 0$. Analogicznie $\mathbb{C}$ otrzymujemy z $\mathbb{R}$, dołączając element i spełniający $i^2 = -1$.

4 Sprzężenie, moduł i odległość

4.1 Sprzężenie

Dla $z = a + bi$ definiujemy $\bar{z} = a - bi$. Geometrycznie jest to odbicie względem osi rzeczywistej.



Własności sprzężenia

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w}, & \overline{zw} &= \bar{z}\bar{w}, & \overline{\bar{z}} &= z, \\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0), & z \in \mathbb{R} &\iff \bar{z} = z, \\ \operatorname{Re} z &= \frac{z + \bar{z}}{2}, & \operatorname{Im} z &= \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{aligned}$$

Na przykład dla $z = a + bi$, $w = c + di$ obie strony równości $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ wynoszą $(ac - bd) - (ad + bc)i$. Z własności $\overline{\bar{z}} = z$ wynika też bijektywność sprzężenia: jest ono własną funkcją odwrotną.

4.2 Moduł

Definicja 4.1. Moduł liczby $z = a + bi$ to nieujemna liczba rzeczywista $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Jest to odległość punktu z od początku układu.

Podstawowe własności są następujące:

$$|z| = 0 \iff z = 0, \quad z\bar{z} = |z|^2, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad |zw| = |z||w|.$$

Ostatni wzór wynika z $|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = |z|^2|w|^2$ i nieujemności modułów. W szczególności

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0), \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0).$$

Dla $z = 3 - 4i$ mamy $\bar{z} = 3 + 4i$, $|z| = 5$ i $z^{-1} = (3 + 4i)/25$.

4.3 Nierówność trójkąta i nierówność odwrotna

Twierdzenie 4.2. Dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Dowód. Dla każdej liczby u mamy $\operatorname{Re} u \leq |u|$. Wobec tego

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując obie nieujemne strony, otrzymujemy nierówność trójkąta. Następnie

$$|z| = |(z + w) - w| \leq |z + w| + |w|,$$

więc $|z| - |w| \leq |z + w|$. Zamiana ról z, w daje $|w| - |z| \leq |z + w|$, co kończy dowód. $\square$

Zastępując w przez $-w$, dostajemy również

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

W nierówności $|z + w| \leq |z| + |w|$ równość zachodzi, gdy jeden ze składników jest zerem albo niezerowe wektory z, w mają ten sam kierunek i zwrot. Dla dolnego oszacowania sumy zwroty są przeciwne.

Przykład 4.1. Obliczenie i sprawdzenie oszacowania

Dla $z = 3 + 4i$ oraz $w = -3 + 4i$ mamy

$$|z| = |w| = 5, \quad z + w = 8i, \quad |z + w| = 8.$$

Nierówność przyjmuje postać $0 \leq 8 \leq 10$.

4.4 Moduł różnicy opisuje odległość

Odległość między punktami z i w wynosi $|z - w|$. Dlatego $|z - z_0| = r$, gdzie $r > 0$, jest równaniem okręgu, a $|z - z_0| \leq r$ opisuje koło domknięte.

Przykład 4.2. Okrąg i symetralna odcinka

Po podstawieniu $z = x + yi$ warunek $|z - (1 + i)| = 2$ daje $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Natomiast

$$\begin{aligned} |z - 1| = |z + 1| &\iff (x - 1)^2 + y^2 = (x + 1)^2 + y^2 \\ &\iff -2x = 2x \iff x = 0. \end{aligned}$$

Jest to oś urojona: zbiór punktów równo odległych od 1 i -1 .

5 Argument i postać trygonometryczna

5.1 Argument nie jest jednoznaczny

Dla $z = a + bi \neq 0$ argumentem jest każdy kąt skierowany φ od dodatniej półosi rzeczywistej do wektora z . Spełnia on

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}.$$

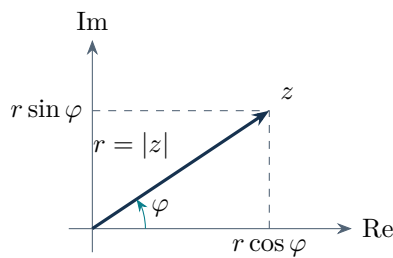
Jeśli φ jest jednym argumentem, to wszystkie mają postać $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. W tych notatkach

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi].$$

Postać trygonometryczna

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |z| > 0, \quad \varphi \in \arg z.$$

Liczba 0 nie ma argumentu. Można wprowadzić napis $0 = 0(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ dla dowolnego φ , ale ten zapis nie wyznacza żadnego kierunku.



Przykład 5.1. Moduł, ćwiartka i argument

Dla $z = -\sqrt{3} + i$ mamy $r = \sqrt{3 + 1} = 2$. Zatem $\cos \varphi = -\sqrt{3}/2$, $\sin \varphi = 1/2$. Punkt leży w II ćwiartce, więc

$$\operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{6}, \quad z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

Wszystkie argumenty to $5\pi/6 + 2k\pi$.

z	1	i	-1	-i	1 - i
$\operatorname{Arg} z$	0	$\pi/2$	π	$-\pi/2$	$-\pi/4$

Uwaga

Sam wzór $\arctan(b/a)$ nie rozpoznaje ćwiartki i nie działa dla $a = 0$. Zawsze sprawdzaj jednocześnie znak części rzeczywistej i urojonej.

5.2 Mnożenie to obrót i zmiana skali

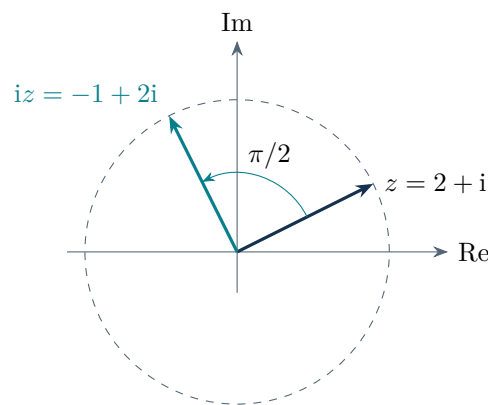
Niech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = s(\cos \psi + i \sin \psi)$, gdzie $r, s > 0$. Z wzorów na sinus i cosinus sumy wynika

$$\begin{aligned} zw &= rs[(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) \\ &\quad + i(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi)] \\ &= rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)), \\ \frac{z}{w} &= \frac{r}{s}(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)), \\ z^{-1} &= r^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)). \end{aligned}$$

Mnożenie przez ustalone $w \neq 0$ obraca płaszczyznę o argument w i skaluje odległości od zera przez $|w|$.

W szczególności mnożenie przez i to obrót o $\pi/2$: $i(a + bi) = -b + ai$.



Mnożenie przez i zachowuje moduł i zmienia kierunek o ćwierć obrotu.

Przykład 5.2. Iloczyn w postaci trygonometrycznej

$1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ oraz $\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$, zatem

$$\begin{aligned} (1 + i)(\sqrt{3} + i) &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \\ &= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i. \end{aligned}$$

Pierwszy wynik pokazuje moduł i kąt, drugi części rzeczywistą i urojoną.

5.3 Dlaczego potrzebne jest „modulo 2π ”?

Dla niezerowych liczb

$$\operatorname{Arg}(zw) \equiv \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \pmod{2\pi}, \quad \operatorname{Arg}(z/w) \equiv \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w \pmod{2\pi}.$$

Nie są to zawsze zwykłe równości liczb rzeczywistych. Dla $z = w = -1$ mamy $\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = 2\pi$, ale $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} 1 = 0$. Sumę lub różnicę kątów trzeba sprowadzić do przedziału $(-\pi, \pi]$.

5.4 Geometryczna konstrukcja odwrotności

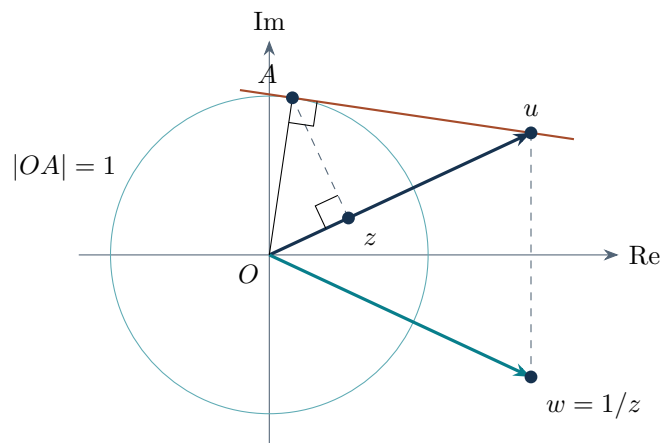
Wzór

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

rozdziela konstrukcję na dwa kroki: zamień odległość r od zera na $1/r$, zachowując kierunek, a następnie odbij otrzymany punkt względem osi rzeczywistej.

Przypadek $0 < |z| < 1$

1. Narysuj okrąg jednostkowy o środku $O = 0$.
2. Przez z poprowadź prostą prostopadłą do Oz . Jeden z jej punktów przecięcia z okręgiem oznacz przez A .
3. Styczna do okręgu w A przecina półprostą Oz w punkcie u .
4. Odbij u względem osi rzeczywistej. Otrzymasz $w = 1/z$.



Inwersja względem okręgu jednostkowego, a potem sprzężenie.

Trójkąty OzA i OAu są prostokątne i mają ten sam kąt przy O . Z podobieństwa

$$\frac{|Ou|}{|OA|} = \frac{|OA|}{|Oz|}, \quad |Ou| = \frac{1}{|z|}.$$

Punkt u ma argument φ , a jego odbicie w argument $-\varphi$. Stąd $w = |z|^{-1} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = 1/z$.

Pozostałe przypadki

Gdy $|z| > 1$, poprowadź z z styczną do okręgu jednostkowego, oznacz punkt styczności przez A , a następnie rzuć A prostopadle na prostą Oz . Otrzymany punkt u spełnia $|Ou| = 1/|z|$; ponownie należy go odbić względem osi rzeczywistej. Dla $|z| = 1$ wystarcza samo odbicie: $1/z = \bar{z}$.

6 Potęgi i postać wykładnicza

6.1 Wzór de Moivre'a

Twierdzenie 6.1. Dla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ i każdego $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Dla $z = 0$ potęgi o wykładniku $n \geq 1$ są równe zeru. Nie definiujemy tutaj 0^0 ani ujemnych potęg zera.

Dowód. Dla $n = 1$ wzór jest oczywisty. Jeśli jest prawdziwy dla $n \geq 1$, to wzór na iloczyn w postaci trygonometrycznej daje

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= r^{n+1} (\cos((n+1)\varphi) + i \sin((n+1)\varphi)). \end{aligned}$$

To kończy indukcję. Dla $n = 0$ obie strony są równe 1. Dla $n = -m < 0$ stosujemy dodatnią potęgę m do $z^{-1} = r^{-1} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$. $\square$

Przykład 6.1. Wysoka potęga bez mnożenia dziesięciu nawiasów

$$\begin{aligned} (1+i)^{10} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{10} \\ &= (\sqrt{2})^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right) \\ &= 32 \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right) = 32i. \end{aligned}$$

Kontrola algebraiczna: $(1+i)^2 = 2i$, więc $(1+i)^{10} = (2i)^5 = 32i$.

Przykład 6.2. Potęga ilorazu

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} \right)^6 &= \left[\frac{2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))} \right]^6 \\ &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \right]^6 \\ &= 8 \left(\cos \frac{7\pi}{2} + i \sin \frac{7\pi}{2} \right) = -8i. \end{aligned}$$

Kąt $7\pi/2$ jest równoważny $3\pi/2$ modulo 2π .

Przykład 6.3. Wykładnik ujemny

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+i)^{-3} &= \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^{-3} \\ &= \frac{1}{8} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -\frac{i}{8}. \end{aligned}$$

To także odwrotność $(\sqrt{3}+i)^3 = 8i$.

6.2 Wzory na sinus i cosinus wielokrotnego kąta

Łączymy wzór de Moivre'a z dwumianem Newtona:

$$\begin{aligned}\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cos^{n-j} \varphi i^j \sin^j \varphi.\end{aligned}$$

Wyrazy z parzystym $j = 2k$ są rzeczywiste, bo $i^{2k} = (-1)^k$. Wyrazy z nieparzystym $j = 2k + 1$ są urojone, bo $i^{2k+1} = i(-1)^k$. Porównując części, dla $n \geq 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\cos(n\varphi) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi, \\ \sin(n\varphi) &= \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} \varphi \sin^{2k+1} \varphi.\end{aligned}$$

Są to sumy skończone; podane górne granice zapobiegają pojawieniu się niepotrzebnych ujemnych wykładników.

Przykład 6.4. Potrójny kąt

Dla $n = 3$ rozwinięcie ma postać

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ &\quad - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \\ \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi.\end{aligned}$$

W ostatnim kroku użyliśmy $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

Przykład 6.5. Podwójny kąt i konkretna kontrola

Dla $n = 2$ mamy

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Jeżeli $\varphi = \pi/6$, to druga równość daje $\sin(\pi/3) = 2 \cdot (1/2) \cdot (\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/2$. Takie sprawdzenie pozwala szybko wykryć zgubiony znak lub współczynnik.

6.3 Wzór Eulera i funkcja wykładnicza

Definiujemy

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \boxed{e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

W konsekwencji dla $z \neq 0$

$$z = |z| e^{i\varphi} \quad (\varphi \in \arg z).$$

To *postać wykładnicza liczby z* . Nie należy jej mylić z obliczeniem wartości funkcji e^z .

Reguły rachunkowe

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^z e^w, & e^0 &= 1, & e^z &\neq 0, \\ |e^{a+bi}| &= e^a, & e^{z+2k\pi i} &= e^z \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ e^{i\pi} &= -1, & e^{2\pi i} &= 1. \end{aligned}$$

Pierwsza równość wynika z rzeczywistego prawa $e^{a+c} = e^a e^c$ oraz wzorów na sinus i cosinus sumy. Funkcja wykładnicza na $\mathbb{C}$ nie jest różnowartościowa: jej okres to $2\pi i$.

Przykład 6.6. Dwa różne zastosowania notacji wykładniczej

$$-1 + \sqrt{3}i = 2e^{2\pi i/3}, \quad e^{1+\pi i/2} = e \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = ei.$$

Ponadto równanie $e^z = -1$, po zapisaniu $z = a + bi$, daje $e^a = 1$, czyli $a = 0$, oraz $b = \pi + 2k\pi$. Wszystkie rozwiązania to $z = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.4 Związek z granicą znaną z analizy

Liczba Eulera spełnia $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$. Dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzi też $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$. Dla czysto urojonego argumentu można sprawdzić analogicznie

$$e^{i\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n.$$

Istotnie, moduł wyrażenia po prawej to

$$\left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2} \right)^{n/2} \longrightarrow 1,$$

ponieważ jego logarytm jest między 0 a $\varphi^2/(2n)$. Jednym z argumentów jest $n \arctan(\varphi/n) \rightarrow \varphi$, gdyż $\arctan t/t \rightarrow 1$ dla $t \rightarrow 0$; dla $\varphi = 0$ wynik jest oczywisty. Otrzymujemy zatem granicę $\cos \varphi + i \sin \varphi$.

7 Pierwiastki liczb zespolonych

7.1 Wzór na wszystkie pierwiastki

Niech $n \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Pierwiastkiem n -tego stopnia z z nazywamy każdą liczbę w , dla której $w^n = z$.

Jeśli $z = 0$, jedynym rozwiązaniem jest $w = 0$. Niech więc $z = re^{i\varphi} \neq 0$ i $w = \rho e^{i\psi}$. Wzór de Moivre'a daje

$$w^n = z \iff \rho^n = r \quad \text{ i } \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \quad \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}.$$

Twierdzenie 7.1. Dla $z = re^{i\varphi} \neq 0$ istnieje dokładnie n różnych pierwiastków n -tego stopnia:

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Symbol $\sqrt[n]{r}$ oznacza tutaj dodatni pierwiastek rzeczywisty z $r > 0$.

Dlaczego jest ich dokładnie n ?

Podniesienie każdego w_k do potęgi n daje $re^{i\varphi + 2k\pi i} = z$, więc wszystkie są rozwiązaniami. Jeżeli $w_k = w_\ell$, to

$$e^{2\pi i(k-\ell)/n} = 1 \iff \frac{k-\ell}{n} \in \mathbb{Z}.$$

Dla $0 \leq k, \ell < n$ jest to możliwe tylko przy $k = \ell$. Każda inna całkowita wartość indeksu powtarza jeden z tych pierwiastków, bo $w_{k+n} = w_k$.

Geometria

Wszystkie pierwiastki mają moduł $\sqrt[n]{r}$, a kolejne argumenty różnią się o $2\pi/n$. Dla $n \geq 3$ są wierzchołkami foremnego n -kąta o środku w zerze. Dla $n = 2$ są końcami średnicy; dla $n = 1$ mamy jeden punkt. Zmiana wybranego argumentu φ o 2π tylko przestawia kolejność tego samego zbioru rozwiązań.

Algorytm rozwiązywania $w^n = z$

1. Sprawdź osobno przypadek $z = 0$.
2. Oblicz $r = |z|$ i wybierz jeden poprawny argument φ .
3. Wyznacz promień $\sqrt[n]{r}$ i kąty $(\varphi + 2k\pi)/n$.
4. Wypisz n wartości dla $k = 0, \dots, n-1$.
5. W razie potrzeby przekształć wyniki do postaci algebraicznej.

7.2 Pierwiastki jako wierzchołki wielokąta

Przykład 7.1. Wszystkie rozwiązania $w^3 = -8$

Zapisujemy $-8 = 8e^{i\pi}$. Promień wynosi $\sqrt[3]{8} = 2$, a kąty to $\pi/3, \pi, 5\pi/3$. Zatem

$$w_0 = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$w_1 = 2(-1 + 0i) = -2,$$

$$w_2 = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

Sprawdzenie pierwszego rozwiązania: $(1 + \sqrt{3}i)^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$, a po ponownym pomnożeniu przez $1 + \sqrt{3}i$ otrzymujemy -8 .

Przykład 7.2. Wszystkie rozwiązania $w^4 = -4$

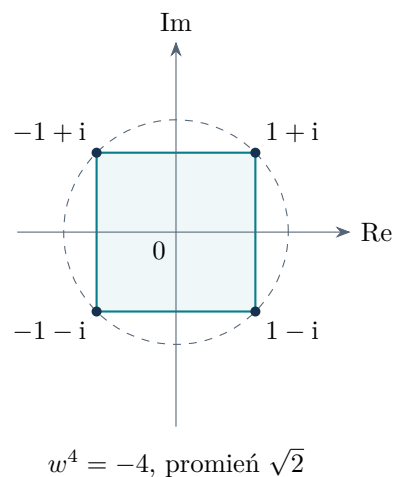
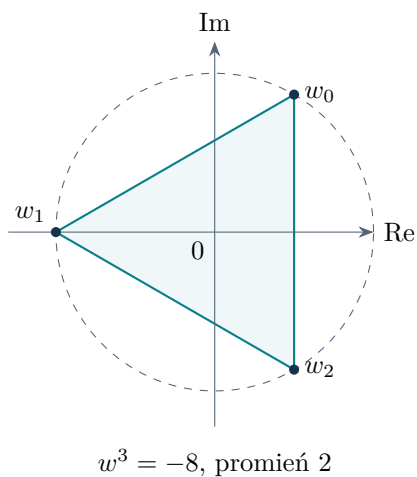
Mamy $-4 = 4e^{i\pi}$, więc $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ oraz

$$w_k = \sqrt{2}e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Kątom $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ odpowiadają kolejno

$$\boxed{1 + i, \quad -1 + i, \quad -1 - i, \quad 1 - i.}$$

Na przykład $(1 + i)^2 = 2i$, zatem $(1 + i)^4 = -4$.



Równomierne rozmieszczenie argumentów pozwala sprawdzić, czy wypisano wszystkie pierwiastki.

7.3 Pierwiastek kwadratowy metodą algebraiczną

Gdy nie znamy prostego argumentu, wygodnie przyjąć $w = u + vi$. Warunek $w^2 = a + bi$ jest równoważny układowi

$$u^2 - v^2 = a, \quad 2uv = b.$$

Dodatkowo $|w|^2 = |w^2| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$, więc

$$u^2 + v^2 = r, \quad u^2 = \frac{r+a}{2}, \quad v^2 = \frac{r-a}{2}.$$

Znaki u, v dobieramy tak, aby $2uv = b$. Dla niezerowego z otrzymujemy dwie liczby przeciwne.

Przykład 7.3. Rozwiązanie $w^2 = 3 + 4i$

Tutaj $r = 5$, więc $u^2 = (5+3)/2 = 4$, $v^2 = (5-3)/2 = 1$. Ponieważ $2uv = 4 > 0$, znaki są zgodne. Dostajemy

$$w = 2 + i \quad \text{lub} \quad w = -2 - i.$$

Istotnie $(2+i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$.

7.4 Równanie kwadratowe ze współczynnikami zespolonymi

Dla $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, nadal liczymy $\Delta = b^2 - 4ac$. Wybieramy *jedną* liczbę δ spełniającą $\delta^2 = \Delta$ i otrzymujemy

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Zamiana δ na $-\delta$ tylko zamienia miejscami rozwiązania. Przy $\Delta = 0$ oba zapisy dają ten sam, podwójny pierwiastek.

Przykład 7.4. Pełne rozwiązanie równania $z^2 - 2z - 2 - 4i = 0$

Wyróżnik wynosi

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-2 - 4i) = 12 + 16i.$$

Szukamy $\delta = u + vi$. Ponieważ $|\Delta| = \sqrt{144 + 256} = 20$, $u^2 = 16$, $v^2 = 4$, a $2uv = 16$. Możemy wybrać $\delta = 4 + 2i$. Stąd

$$z_1 = \frac{2 + 4 + 2i}{2} = 3 + i, \quad z_2 = \frac{2 - 4 - 2i}{2} = -1 - i.$$

Kontrola: $z_1 + z_2 = 2$, $z_1 z_2 = -2 - 4i$, zgodnie ze wzorami Viète'a.

Pułapka z symbolem pierwiastka

Nie wolno bezwarunkowo stosować $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ dla zespolonych pierwiastków głównych. Dla $z = w = -1$ lewa strona wynosi $\sqrt{1} = 1$, a prawa $i \cdot i = -1$.

7.5 Pierwiastki z jedności

Wszystkie rozwiązania $\varepsilon^n = 1$ mają postać

$$\varepsilon_k = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Leżą na okręgu jednostkowym, a $\varepsilon_0 = 1$. Ich iloczyny odpowiadają dodawaniu indeksów modulo n :

$$\varepsilon_k \varepsilon_\ell = \varepsilon_{(k+\ell) \bmod n}, \quad \varepsilon_k^{-1} = \varepsilon_{(-k) \bmod n}.$$

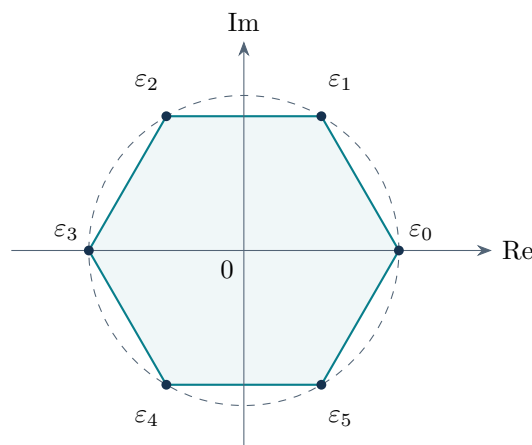
Jeśli znamy jeden pierwiastek $w_0 \neq 0$ równania $w^n = z$, wszystkie pozostałe to $w_0 \varepsilon_k$. Wynika to z $(w_0 \varepsilon_k)^n = w_0^n \varepsilon_k^n = z$.

Przykład 7.5. Sześć pierwiastków z jedności

Dla $n = 6$ kolejne kąty to $0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$, zatem

$$1, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Na przykład $\varepsilon_4 \varepsilon_5 = \varepsilon_3 = -1$, bo $4 + 5 \equiv 3 \pmod{6}$.



Pierwiastki szóstego stopnia z jedności tworzą sześciokąt foremny.

7.6 Suma wszystkich pierwiastków z jedności

Dla $n \geq 2$ niech $\zeta = e^{2\pi i/n} \neq 1$. Wtedy

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = 1 + \zeta + \dots + \zeta^{n-1} = \frac{\zeta^n - 1}{\zeta - 1} = 0.$$

Wzór wynika z sumy ciągu geometrycznego. Geometrycznie wektory skierowane do równomiernie rozmieszczonych wierzchołków równoważą się. Dla $n = 1$ suma wynosi 1.

8 Wielomiany i rozkład na czynniki

8.1 Pierwiastek wielomianu i jego krotność

Wielomian stopnia n ma postać

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Liczba α jest jego pierwiastkiem, jeśli $p(\alpha) = 0$. Z dzielenia przez $z - \alpha$ otrzymujemy

$$p(z) = (z - \alpha)q(z) + p(\alpha).$$

Zatem $p(\alpha) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z - \alpha$ jest dzielnikiem p . To twierdzenie o czynniku liniowym (twierdzenie Bézouta dla wielomianów).

Definicja 8.1. Pierwiastek α ma krotność $k \geq 1$, jeśli

$$p(z) = (z - \alpha)^k q(z), \quad q(\alpha) \neq 0.$$

Inaczej mówiąc, k jest największą potęgą czynnika $z - \alpha$ dzielącą wielomian.

8.2 Podstawowe twierdzenie algebry

Twierdzenie 8.2 (Gaussa). Każdy niestały wielomian o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wielokrotne stosowanie twierdzenia o czynniku liniowym daje rozkład

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j).$$

Liczby α_j mogą się powtarzać. Wielomian stopnia n ma więc dokładnie n pierwiastków *liczonych z krotnościami*, a co najwyżej n różnych pierwiastków. Dowód istnienia pierwiastka podamy w rozdziale 10.

Przykład 8.1. Liczba pierwiastków a liczba różnych pierwiastków

Dla $p(z) = (z - 1)^3(z + 2)^2$ stopień wynosi 5, ale różne pierwiastki są tylko dwa: 1 o krotności 3 i -2 o krotności 2. Suma krotności wynosi $3 + 2 = 5$.

8.3 Sprzężone pierwiastki wielomianu rzeczywistego

Jeśli wszystkie współczynniki p są rzeczywiste, to

$$p(\bar{z}) = \overline{p(z)}.$$

Dlatego $p(\alpha) = 0$ pociąga $p(\bar{\alpha}) = 0$. Co więcej, krotności obu pierwiastków są równe. Jeśli $p(z) = (z - \alpha)^k q(z)$, $q(\alpha) \neq 0$, to sprzęgając tożsamość po zastąpieniu z przez $\bar{z}$, otrzymujemy

$$p(z) = (z - \bar{\alpha})^k \tilde{q}(z), \quad \tilde{q}(z) = \overline{q(\bar{z})}.$$

Funkcja $\tilde{q}$ jest wielomianem, a $\tilde{q}(\bar{\alpha}) = \overline{q(\alpha)} \neq 0$. Zatem krotność $\bar{\alpha}$ jest dokładnie równa k .

8.4 Rozkład nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$

Para nierzeczywistych pierwiastków sprzężonych $\alpha = a + bi$, $\bar{\alpha} = a - bi$, gdzie $b \neq 0$, daje rzeczywisty czynnik

$$\begin{aligned}(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) &= x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x - a)^2 + b^2.\end{aligned}$$

Jego wyróżnik wynosi $-4b^2 < 0$, więc nie rozkłada się dalej na czynniki liniowe o współczynnikach rzeczywistych.

Każdy niezerowy wielomian rzeczywisty rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na stałą oraz czynniki liniowe i nierozkładalne czynniki kwadratowe. Nad $\mathbb{C}$ każdy niestały wielomian rozkłada się na czynniki liniowe.

Przykład 8.2. Rozkład wielomianu $x^4 + 4$

Z poprzednich przykładów znamy pierwiastki równania $z^4 = -4$: $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$. Nad $\mathbb{C}$

$$x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i).$$

Łączymy pary sprzężone:

$$\begin{aligned}(x - 1 - i)(x - 1 + i) &= (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2, \\ (x + 1 - i)(x + 1 + i) &= (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2.\end{aligned}$$

Zatem nad $\mathbb{R}$

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

Sprawdzenie bez mnożenia wszystkich wyrazów:

$$((x^2 + 2) - 2x)((x^2 + 2) + 2x) = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4.$$

Oba czynniki kwadratowe mają wyróżnik -4 .

Przykład 8.3. Sprzężenie zachowuje także krotność

Rozważmy $p(x) = (x^2 + 2x + 5)^2(x - 3)$. Ponieważ $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$, jego pierwiastki to $-1 \pm 2i$. Wobec tego

$$p(x) = (x + 1 - 2i)^2(x + 1 + 2i)^2(x - 3).$$

Pierwiastki $-1 + 2i$ i $-1 - 2i$ mają krotność 2, a 3 ma krotność 1. Suma $2 + 2 + 1 = 5$ jest stopniem wielomianu.

Uwaga

Warunek rzeczywistości współczynników jest niezbędny. Wielomian $p(z) = z - i$ ma pierwiastek i , ale nie ma pierwiastka $-i$, bo $p(-i) = -2i \neq 0$.

9 Dlaczego $\mathbb{C}$ nie jest ciałem uporządkowanym?

W $\mathbb{R}$ porządek jest zgodny z działaniami: suma i iloczyn liczb dodatnich są dodatnie. Na $\mathbb{C}$ nie można wprowadzić porządku liniowego o takich samych własnościach.

Twierdzenie 9.1. Nie istnieje porządek liniowy na $\mathbb{C}$, który czyni $\mathbb{C}$ ciałem uporządkowanym, czyli jest zgodny z dodawaniem i mnożeniem przez liczby dodatnie.

Dowód. Załóżmy, że taki porządek istnieje. W szczególności:

1. dla każdej liczby z zachodzi *dokładnie jedna* z możliwości $z > 0$, $z = 0$, $-z > 0$;
2. jeśli $z > 0$ i $w > 0$, to $z + w > 0$ oraz $zw > 0$.

Każdy kwadrat elementu niezerowego musiałby być dodatni. Rzeczywiście, jeśli $z > 0$, to $z^2 > 0$, a jeśli $-z > 0$, to $z^2 = (-z)^2 > 0$.

Dla $z = 1$ dostajemy $1 = 1^2 > 0$, a dla $z = i$ $-1 = i^2 > 0$. Wtedy dodatnia byłaby również suma

$$1 + (-1) = 0 > 0,$$

co przeczy ścisłości porządku. Założenie było fałszywe. □

9.1 Co z tego wynika w praktyce?

Nie używamy zapisu $z > 0$ dla dowolnej liczby zespolonej bez zdefiniowania innej, szczególnej relacji. Natomiast nierówności

$$|z| > 2, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad \operatorname{Im} z < 1$$

są w pełni sensowne: porównujemy w nich *liczby rzeczywiste*.

Przykład 9.1. Porównywanie modułów nie porządkuje liczb zespolonych

Liczby $1, -1, i, -i$ są różne, lecz każda ma moduł 1. Relacja oparta wyłącznie na porównywaniu modułów nie odróżnia tych liczb, więc nie daje porządku liniowego na $\mathbb{C}$.

Przykład 9.2. Porządek leksykograficzny nie współpracuje z mnożeniem

Można porównywać pary (a, b) najpierw według a , a przy równości według b . To porządek liniowy na zbiorze $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. W nim $i = (0, 1) > (0, 0)$, ale $i^2 = (-1, 0) < (0, 0)$. Iloczyn dodatniej liczby przez nią samą byłby ujemny, więc nie jest to porządek ciała.

Twierdzenie mówi o braku porządku *zgodnego z działaniami ciała*. Nie mówi, że zbioru liczb zespolonych nie da się w żaden sposób uporządkować.

10 Dowód podstawowego twierdzenia algebry

10.1 Lemat d'Alemberta: lokalne zmniejszenie modułu

Lemat 10.1. Niech p będzie *niestałym* wielomianem zespolonym, a $p(z_0) \neq 0$. Wtedy dla każdego $r > 0$ istnieje z_1 takie, że

$$0 < |z_1 - z_0| < r \quad \text{oraz} \quad |p(z_1)| < |p(z_0)|.$$

Dowód. 1. Pierwszy niezerowy wyraz. Rozwijamy wielomian względem przesunięcia $h = z - z_0$. Po podzieleniu przez niezerowe $p(z_0)$ możemy zapisać

$$\frac{p(z_0 + h)}{p(z_0)} = 1 + ah^m + h^{m+1}q(h), \quad a \neq 0, \quad m \geq 1,$$

gdzie m jest najmniejszym dodatnim wykładnikiem o niezerowym współczynniku, a q jest wielomianem (być może zerowym). Takie m istnieje, bo p nie jest stały. W szczególności m nie musi być równe 1.

2. Wybór kierunku. Wybierzmy u o module 1, dla którego

$$u^m = -\frac{|a|}{a}.$$

Istnienie u wynika z udowodnionego wcześniej wzoru na pierwiastki liczby zespolonej; nie korzystamy tu z twierdzenia o wielomianach. Dla $h = \rho u$, $\rho > 0$, mamy $ah^m = -|a|\rho^m$: ten składnik przesuwają liczbę 1 w stronę zera.

3. Kontrola reszty. Na $|h| \leq 1$ istnieje stała $M \geq 1$ z $|q(h)| \leq M$. Można wziąć M równe 1 plus sumie modułów współczynników q . Wybieramy ρ tak małe, aby

$$0 < \rho < \min \left\{ r, 1, \frac{|a|}{2M}, |a|^{-1/m} \right\}.$$

Wówczas $|a|\rho^m < 1$ oraz $M\rho < |a|/2$. Z nierówności trójkąta

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(z_0 + \rho u)}{p(z_0)} \right| &\leq |1 - |a|\rho^m| + \rho^{m+1}|q(\rho u)| \\ &\leq 1 - |a|\rho^m + M\rho^{m+1} \\ &\leq 1 - \frac{|a|}{2}\rho^m < 1. \end{aligned}$$

Liczba $z_1 = z_0 + \rho u$ ma więc wymagane własności. □

Dlaczego sam wyraz liniowy nie wystarczy?

Dla $p(z) = 1 + z^2$ i $z_0 = 0$ wyraz liniowy znika, choć $p(0) \neq 0$. Trzeba użyć wyrazu kwadratowego: $p(i\rho) = 1 - \rho^2$, którego moduł jest mniejszy od 1 dla $0 < \rho < 1$.

10.2 Wielomian osiąga globalne minimum modułu

Niech $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, gdzie $n \geq 1$ oraz $a_n \neq 0$. Dla $|z| \geq 1$, przy $S = \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|$, mamy

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |a_n| |z|^n - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| |z|^j \\ &\geq |a_n| |z|^n - S |z|^{n-1} \\ &= |z|^{n-1} (|a_n| |z| - S). \end{aligned}$$

Dla $|z| \geq \max\{1, 2S/|a_n|\}$ prawa strona jest co najmniej $\frac{1}{2} |a_n| |z|^n$. W konsekwencji

$$|p(z)| \rightarrow \infty \quad \text{gdy} \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Wybieramy zatem $R > 0$ tak duże, żeby

$$|z| > R \implies |p(z)| > |p(0)| + 1.$$

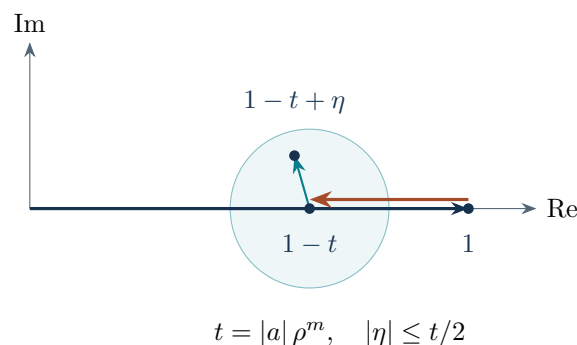
Funkcja $z \mapsto |p(z)|$ jest ciągła na $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Na zwartym kole $K = \{z : |z| \leq R\}$ osiąga więc minimum w pewnym punkcie w , na mocy twierdzenia Weierstrassa. Ponieważ $0 \in K$, zachodzi $|p(w)| \leq |p(0)|$. Poza K wszystkie wartości są większe od $|p(0)| + 1$, więc w jest punktem *globalnego* minimum na całej płaszczyźnie.

10.3 Zakończenie dowodu

Gdyby $p(w) \neq 0$, lemat 10.1 dałby punkt w_1 z $|p(w_1)| < |p(w)|$, wbrew minimalności w . Zatem $p(w) = 0$: znaleźliśmy pierwiastek. To dowodzi twierdzenia 8.2. Dalszy rozkład na n czynników liniowych otrzymujemy, kolejno dzieląc przez znalezione czynniki. $\square$

Co dokładnie naprawia ten dowód?

Lokalnie używamy pierwszego *niezerowego* wyrazu rozwinięcia, niekoniecznie liniowego. Globalnie używamy warunku $|p(z)| \rightarrow \infty$, a nie nieuzasadnionej monotoniczności względem $|z|$. Wybór globalnego minimum usuwa także problem punktu na brzegu koła.



Idea lematu po normalizacji: ruch o $-t$ dominuje nad resztą η , więc $|1-t+\eta| \leq 1-t/2 < 1$. Rysunek ma charakter schematyczny.

A Ściąga: wzory i wybór metody

Dla $z = a + bi$, $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

Postać algebraiczna

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c) + (b + d)i, \\ zw &= (ac - bd) + (ad + bc)i, \\ \bar{z} &= a - bi, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \operatorname{Re} z &= \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0), \\ \frac{z}{w} &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \quad (w \neq 0). \end{aligned}$$

Dla $z = re^{i\varphi} \neq 0$, $w = se^{i\psi} \neq 0$:

Postać trygonometryczna i wykładnicza

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ zw &= rse^{i(\varphi+\psi)}, \quad z/w = (r/s)e^{i(\varphi-\psi)}, \\ z^n &= r^n e^{in\varphi} \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ u^n = z &\iff u = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi+2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (n \geq 1), \\ e^{a+bi} &= e^a (\cos b + i \sin b). \end{aligned}$$

Zadanie

Najwygodniejsza metoda

Dodawanie, część rzeczywista i urojona Postać $a + bi$.

Dzielenie Pomnożenie przez sprzężenie mianownika.

Wysoka potęga Moduł i argument; wzór de Moivre'a.

Wszystkie pierwiastki Promień $\sqrt[n]{r}$, krok kątowy $2\pi/n$.

Pierwiastek kwadratowy bez prostego kąta Układ $u^2 - v^2 = a$, $2uv = b$.

Rozkład wielomianu rzeczywistego Parowanie pierwiastków sprzężonych.

Kontrola wyniku: sprawdź niezerowość mianownika, ćwiartkę argumentu, liczbę różnych pierwiastków oraz zgodność sumy krotności ze stopniem wielomianu. Przy argumentach głównych zawsze uwzględnij redukcję modulo 2π .