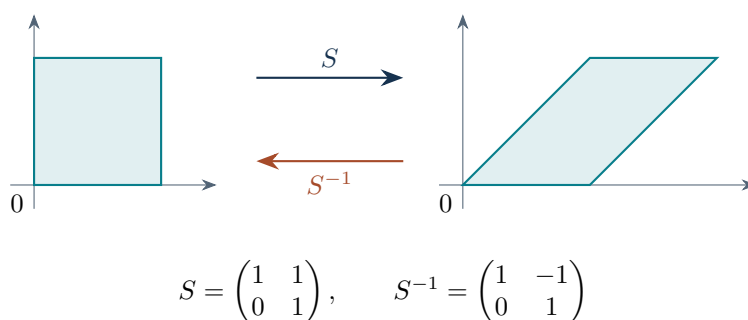


Macierze kwadratowe

Odwracalność

Wykład 11

Pierścień i algebra macierzy. Macierz odwrotna.



Kiedy można cofnąć działanie macierzy?

Macierz kwadratowa jest odwracalna dokładnie wtedy, gdy ma pełny rząd. Jej odwrotność odwzorowuje każdy wektor wejściowy z jego obrazu. Przy odwracaniu iloczynu trzeba cofać działania w odwrotnej kolejności.

Spis treści

1	Macierze kwadratowe jako pierścień	3
2	Przykłady pierścieni i pojęcie algebry	4
3	Macierz jednostkowa i macierze skalarne	5
4	Macierze bazowe i wybieranie wierszy lub kolumn	6
5	Centrum pierścienia macierzy	7
6	Macierz odwrotna i jej jednoznaczność	8
7	Obliczanie odwrotności metodą Gaussa–Jordana	10
8	Kiedy wystarczy odwrotność jednostronna?	13
9	Własności macierzy odwrotnej	14
10	Odwracalne czynniki nie zmieniają rzędu	16
11	Rozwiązywanie równań macierzowych	17
A	Zestawienie pojęć i metod	18

Oznaczenia i konwencje

$\mathbb{K}$ jest ciałem, a $n \geq 1$. $M_n(\mathbb{K}) = M_{n \times n}(\mathbb{K})$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n . 0_n jest macierzą zerową, I_n macierzą jednostkową, a E_{ij} macierzą z jedynką na pozycji (i, j) i zerami poza nią. A^T oznacza transpozycję, $\text{rank } A$ rząd, a A^{-1} odwrotność, o ile istnieje. Przykłady liczbowe i rysunki dotyczą $\mathbb{R}$, chyba że wskazano inny pierścień lub inne ciało. W definicji pierścienia nie wymagamy istnienia jedności; gdy istnieje, mówimy o pierścieniu z jednością.

1 Macierze kwadratowe jako pierścień

Dla $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ określamy

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Suma i iloczyn znów należą do $M_n(\mathbb{K})$. Dla macierzy kwadratowych tego samego rozmiaru oba iloczyny AB i BA są zawsze określone, choć na ogół nie są sobie równe.

Definicja 1.1. Zbiór $\mathcal{R}$ z dodawaniem i mnożeniem nazywamy *pierścieniem*, jeżeli spełnia następujące aksjomaty dla wszystkich $a, b, c \in \mathcal{R}$:

1. dodawanie jest łączne i przemienne;
2. istnieje zero 0 , takie że $a + 0 = 0 + a = a$;
3. każdy a ma element przeciwny $-a$, taki że $a + (-a) = 0$;
4. mnożenie jest łączne: $(ab)c = a(bc)$;
5. zachodzą oba prawa rozdzielności:

$$(a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac.$$

Jeżeli istnieje 1 spełniające $1a = a1 = a$, jest to *pierścień z jednością*. Jeżeli dodatkowo $ab = ba$, pierścień jest *przemienny*.

Twierdzenie 1.2. $M_n(\mathbb{K})$, z dodawaniem i mnożeniem macierzy, jest pierścieniem z jednością.

Dowód. Własności dodawania wynikają ze współrzędnych: zerem jest 0_n , a macierzą przeciwną do A jest $-A = (-a_{ij})$. Łączność mnożenia i prawa rozdzielności wynikają ze wzoru na iloczyn oraz z przemieniania kolejności skończonych sum. Jednością jest I_n , ponieważ $I_n A = A I_n = A$. $\square$

Przykład 1.1. Nieprzemienność już dla stopnia 2

Dla

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mamy $PN = 0_2$, lecz $NP = N \neq 0_2$. Dlatego $M_2(\mathbb{K})$ nie jest pierścieniem przemennym. Dla $n > 2$ te same macierze można umieścić w lewym górnym bloku, wypełniając pozostałe pozycje zerami. Dla $n = 1$ mamy $M_1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$.

2 Przykłady pierścieni i pojęcie algebry

Podstawowe przykłady

- $\mathbb{Z}$, ze zwykłymi działaniami, jest pierścieniem przemiennym z jednością. Nie jest ciałem: np. 2 nie ma odwrotności w $\mathbb{Z}$.
- Każde ciało $\mathbb{K}$, rozpatrywane tylko z dodawaniem i mnożeniem, jest pierścieniem przemiennym z jednością.
- $\mathbb{K}[t]$ jest pierścieniem wielomianów. Jednością jest wielomian stały 1. Wielomian t nie ma odwrotności wielomianowej: dla niezerowego q stopień tq jest dodatni, więc $tq \neq 1$.
- Dla $r \geq 2$ klasy reszt $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, z działaniami modulo r , tworzą pierścień przemienny z jednością.

Przykład 2.1. Mnożenie i odwracalność modulo 6

W $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ liczby reprezentują klasy reszt. Mamy

$$2 \cdot 3 = 0 \pmod{6}, \quad 5 \cdot 5 = 1 \pmod{6}.$$

Niezerowe elementy mogą więc mieć zerowy iloczyn, a 5 jest swoją własną odwrotnością. Element 2 nie ma odwrotności: iloczyny $2x$ dają tylko klasy 0, 2, 4, nigdy klasę 1.

Definicja 2.1. *Algebra nad $\mathbb{K}$* to przestrzeń liniowa $\mathcal{A}$ nad $\mathbb{K}$ wyposażona w mnożenie $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, które jest liniowe względem każdego argumentu osobno. Oznacza to

$$\begin{aligned} (u+v)w &= uw + vw, & u(v+w) &= uv + uw, \\ (\lambda u)v &= \lambda(uv), & u(\lambda v) &= \lambda(uv). \end{aligned}$$

Jeśli mnożenie jest łączne, mówimy o *algebrze łącznej*; jeśli ma element neutralny, o algebrze z jednością.

$M_n(\mathbb{K})$ jest **łączną algebrą z jednością nad $\mathbb{K}$** . Mnożenie przez skalar jest dane wzorem $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$, a zgodność działań wyraża równość

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Jako przestrzeń liniowa algebra ta ma wymiar n^2 .

Trzy rodzaje informacji

Przestrzeń liniowa ma dodawanie i mnożenie przez skalary. Pierścień ma dodawanie i mnożenie swoich elementów. Algebra łączy te struktury przez zgodność mnożenia ze skalarami. Słowo „algebra” samo w sobie nie wymusza przemienności mnożenia.

3 Macierz jednostkowa i macierze skalarne

Definiujemy symbol Kroneckera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Kolumny I_n tworzą bazę standardową $\mathbb{K}^n$, więc $\text{rank } I_n = n$. Ze wzoru na iloczyn wynika

$$(I_n A)_{ij} = \sum_k \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}, \quad (A I_n)_{ij} = \sum_k a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}.$$

Zatem $I_n A = A I_n = A$.

Definicja 3.1. Macierz *skalarna* ma postać

$$\lambda I_n = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda).$$

Macierz *diagonalna* $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ ma zera poza przekątną; jej elementy na przekątnej nie muszą być równe.

Każda macierz skalarna jest diagonalna. Dla każdej $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$(\lambda I_n)A = \lambda A = A(\lambda I_n).$$

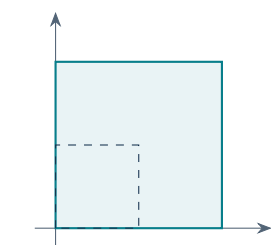
Macierze skalarne *komutują* więc ze wszystkimi macierzami, czyli można je przestawić w każdym iloczynie.

Przykład 3.1. Diagonalna nie musi oznaczać skalarnej

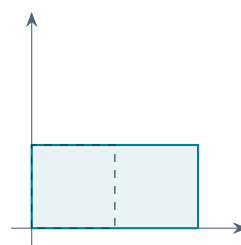
Nad $\mathbb{R}$ macierz $D = \text{diag}(2, 1)$ nie jest skalarna. Dla $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mamy

$$D E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem D nie komutuje ze wszystkimi macierzami. Geometrycznie $2I_2$ skaluje obie współrzędne jednakowo, a D skaluje tylko pierwszą.



$$2I_2 : (x, y) \mapsto (2x, 2y)$$



$$D : (x, y) \mapsto (2x, y)$$

Przerwany kontur oznacza kwadrat jednostkowy, a kolorowy jego obraz.

4 Macierze bazowe i wybieranie wierszy lub kolumn

Macierz E_{ij} ma jedynkę na pozycji (i, j) i zera poza nią:

$$(E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ki}\delta_{j\ell}.$$

Macierze te tworzą bazę $M_n(\mathbb{K})$, ponieważ $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$, a odczytanie każdej pozycji dowodzi ich niezależności. W szczególności

$$I_n = \sum_{i=1}^n E_{ii}, \quad \boxed{E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}.}$$

Ostatni wzór wynika z mnożenia: jedynka może powstać tylko wtedy, gdy indeks kolumny j pierwszego czynnika zgadza się z indeksem wiersza k drugiego.

Przykład 4.1. Mnożenie macierzy bazowych

W $M_3(\mathbb{K})$ mamy $E_{12}E_{23} = E_{13}$, bo środkowe indeksy są równe. Natomiast $E_{23}E_{12} = 0_3$, bo $3 \neq 1$.

Co robi mnożenie dowolnej macierzy przez E_{ij} ?

Dla $Z = (z_{k\ell})$ obliczamy

$$(ZE_{ij})_{k\ell} = z_{ki}\delta_{j\ell}, \quad (E_{ij}Z)_{k\ell} = \delta_{ki}z_{j\ell}.$$

Stąd:

- ZE_{ij} ma w kolumnie j kolumnę i macierzy Z , a wszystkie inne kolumny są zerowe;
- $E_{ij}Z$ ma w wierszu i wiersz j macierzy Z , a wszystkie inne wiersze są zerowe.

Przykład 4.2. Wybór drugiej kolumny i trzeciego wiersza

Niech $Z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$. Wtedy

$$ZE_{23} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

$$E_{23}Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g & h & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Te dwa produkty na ogół są różne. Porównywanie ich elementów pozwoli wyznaczyć macierze komutujące ze wszystkimi E_{ij} .

5 Centrum pierścienia macierzy

Definicja 5.1. Centrum $M_n(\mathbb{K})$ jest zbiorem macierzy komutujących ze wszystkimi macierzami:

$$\text{Cent}(M_n(\mathbb{K})) = \{Z \in M_n(\mathbb{K}) : ZA = AZ \text{ dla każdego } A \in M_n(\mathbb{K})\}.$$

Twierdzenie 5.2. Macierz $Z \in M_n(\mathbb{K})$ komutuje z każdą macierzą stopnia n dokładnie wtedy, gdy jest skalarna. Zatem

$$\text{Cent}(M_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Dowód. Macierz λI_n komutuje z każdą A , ponieważ oba iloczyny są równe λA .

Odwrotnie, niech $ZE_{ij} = E_{ij}Z$ dla wszystkich i, j . Jest to konieczne, jeśli Z komutuje ze wszystkimi macierzami.

Krok 1: zera poza przekątną. Dla E_{jj} porównujemy elementy na pozycji (k, j) , gdzie $k \neq j$:

$$(ZE_{jj})_{kj} = z_{kj}, \quad (E_{jj}Z)_{kj} = 0.$$

Stąd $z_{kj} = 0$ dla każdego $k \neq j$, a więc $Z = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

Krok 2: równe elementy przekątnej. Dla macierzy diagonalnej

$$ZE_{ij} = d_i E_{ij}, \quad E_{ij}Z = d_j E_{ij}.$$

Porównanie pozycji (i, j) daje $d_i = d_j$. Wszystkie d_i są więc równe pewnemu λ , czyli $Z = \lambda I_n$. Dla $n = 1$ każda macierz ma już tę postać. $\square$

Przykład 5.1. Bezpośredni rachunek dla macierzy 2×2

Niech $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Warunek $ZE_{11} = E_{11}Z$ daje

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = c = 0.$$

Teraz $ZE_{12} = E_{12}Z$ przyjmuje postać $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, więc $a = d$. Otrzymujemy $Z = aI_2$.

Znaczenie słowa „każda”

Komutowanie z jedną ustaloną macierzą jest znacznie słabszym warunkiem. Na przykład z I_n komutuje dowolna macierz, także nieskalarna. Twierdzenie wymaga $ZA = AZ$ dla wszystkich $A \in M_n(\mathbb{K})$.

6 Macierz odwrotna i jej jednoznaczność

Definicja 6.1. Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest *odwracalna*, jeśli istnieje $B \in M_n(\mathbb{K})$, takie że

$$AB = BA = I_n.$$

Macierz B nazywamy odwrotną do A i oznaczamy A^{-1} . W definicji występują obie kolejności mnożenia.

Lemat 6.2. Jeśli $AX = I_n$ i $YA = I_n$, to $X = Y$.

Dowód. Łączność mnożenia daje

$$Y = YI_n = Y(AX) = (YA)X = I_nX = X.$$

□

W szczególności dwie macierze odwrotne do tej samej A muszą być równe. Symbol A^{-1} jest więc jednoznaczny.

Przykład 6.1. Odwrotność macierzy diagonalnej

Macierz $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ jest odwracalna, jeśli wszystkie $d_i \neq 0$, i wtedy

$$D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1}).$$

Oba iloczyny są diagonalne z samymi jedynekami na przekątnej. Jeśli $d_j = 0$, to $De_j = 0$, a istnienie odwrotności prowadziłoby do sprzeczności $e_j = D^{-1}De_j = 0$. Na przykład $\text{diag}(2, 3)^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

Przykład 6.2. Cofnięcie ścinania

Dla $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mamy

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad SS^{-1} = S^{-1}S = I_2.$$

Mapa S wysyła (x, y) na $(x+y, y)$. Aby odzyskać wejście z (u, v) , obliczamy $(u-v, v)$, czyli działamy macierzą S^{-1} .

Odwracalność jako odzyskiwanie wejścia

Jeśli $y = Ax$, to dla odwracalnej A mamy $x = A^{-1}y$. Macierz, która wysyła dwa różne wektory na ten sam obraz, nie może mieć odwrotności. W szczególności 0_n nie jest odwracalna dla $n \geq 1$. Odwrotność oznacza odwrócenie całego działania macierzy, a nie osobne odwrócenie każdego jej elementu.

6.1 Odwracalność a pełny rząd

Definicja 6.3. Macierz $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest *nieosobliwa*, gdy $\text{rank } A = n$, a *osobliwa*, gdy $\text{rank } A < n$.

Twierdzenie 6.4. Macierz kwadratowa jest odwracalna dokładnie wtedy, gdy jest nieosobliwa:

$$A \text{ jest odwracalna} \iff \text{rank } A = n.$$

Dowód. **Odwracalność daje pełny rząd.** Z oszacowania rzędu iloczynu otrzymujemy

$$n = \text{rank } I_n = \text{rank}(AA^{-1}) \leq \text{rank } A \leq n.$$

Zatem $\text{rank } A = n$.

Pełny rząd daje odwrotność. Kolumny A tworzą bazę $\mathbb{K}^n$. Dla każdego j istnieje więc wektor x_j taki, że $Ax_j = e_j$. Tworzymy macierz $X = [x_1 \cdots x_n]$. Wtedy

$$AX = [Ax_1 \cdots Ax_n] = [e_1 \cdots e_n] = I_n.$$

Trzeba jeszcze uzyskać iloczyn jednostkowy w drugiej kolejności. Ponieważ $\text{rank } A^T = n$, ten sam argument dla A^T daje macierz C spełniającą $A^T C = I_n$. Transponując, otrzymujemy

$$C^T A = I_n.$$

Mamy prawostronną odwrotność X i lewostronną C^T . Z lematu 6.2 wynika $X = C^T$, więc $AX = XA = I_n$. Tym samym $X = A^{-1}$. $\square$

Równoważne kryteria dla $A \in M_n(\mathbb{K})$

Każdy z poniższych warunków oznacza odwracalność:

- $\text{rank } A = n$, czyli po eliminacji występuje n pivotów;
- kolumny A tworzą bazę $\mathbb{K}^n$;
- równanie $Ax = 0$ ma tylko rozwiązanie $x = 0$;
- dla każdego $b \in \mathbb{K}^n$ układ $Ax = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie;
- mapa $x \mapsto Ax$ jest bijekcją $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Kolumny są niezależne dokładnie wtedy, gdy nie istnieje nietrywialna relacja $Ax = 0$. Dla n kolumn w $\mathbb{K}^n$ niezależność jest równoważna byciu bazą, a baza daje istnienie i jednoznaczność współrzędnych każdego b .

7 Obliczanie odwrotności metodą Gaussa–Jordana

Równość $AX = I_n$ oznacza n układów równań:

$$Ax_1 = e_1, \quad \dots, \quad Ax_n = e_n,$$

gdzie x_j są kolumnami szukanej odwrotności. Rozwiązujemy je jednocześnie, stosując te same operacje na wierszach do obu bloków macierzy uzupełnionej:

$$\boxed{[A \mid I_n] \longrightarrow [I_n \mid A^{-1}]}.$$

Pełny rząd pozwala sprowadzić lewy blok do I_n . Po tych samych operacjach prawe strony układów stają się kolumnami ich rozwiązań. Jeśli lewy blok ma mniej niż n pivotów, odwrotność nie istnieje.

Przykład 7.1. Pełna redukcja macierzy 2×2

Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Zapisujemy

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

Następnie eliminujemy element nad drugim pivotem:

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

Lewy blok jest równy I_2 , więc

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Sprawdzamy oba iloczyny:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 7-6 & -2+2 \\ 21-21 & -6+7 \end{pmatrix} = I_2,$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7-6 & 14-14 \\ -3+3 & -6+7 \end{pmatrix} = I_2.$$

Operacje wykonujemy na całych wierszach

Zmiana w lewym bloku musi być powtórzona w prawym. Nie wolno niezależnie redukować A i pozostawić I_n bez zmian. Do odczytania odwrotności potrzebny jest lewy blok równy I_n , a nie tylko dowolna postać schodkowa.

7.1 Przykład 3×3 i rozwiązanie układu

Przykład 7.2. Odwrotność z ułamkami

Niech $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wykonujemy kolejno $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$, a potem $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Normalizujemy trzeci pivot przez $R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

Teraz $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$, a następnie $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$, używając już nowego drugiego wiersza:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

Zatem

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzenie daje

$$CC^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3.$$

Zastosowanie: $Cx = (2, 1, 3)^T$

Mnożymy prawą stronę przez odwrotność:

$$x = C^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - 1 + 3 \\ 2 + 1 - 3 \\ -2 + 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kontrola: $C(2, 0, 1)^T = (2, 1, 3)^T$. Jest to jedyne rozwiązanie, ponieważ C jest odwracalna.

7.2 Przykład z parametrem: kiedy odwrotność znika?

Przykład 7.3. Rodzina macierzy A_λ

Dla $\lambda \in \mathbb{R}$ rozważmy

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Eliminacja daje

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

Przypadek $\lambda \neq 1$

Istnieją dwa pivoty, więc macierz jest odwracalna. Dzielimy drugi wiersz przez $\lambda - 1$, a potem odejmujemy go od pierwszego:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda-1} & -\frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda-1} & \frac{1}{\lambda-1} \end{array} \right].$$

Otrzymujemy

$$A_\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda-1} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 1.$$

Można to sprawdzić bez eliminacji:

$$A_\lambda \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

Dla $\lambda = 3$ mamy $A_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Przypadek $\lambda = 1$

W lewym bloku drugi wiersz staje się zerowy, więc $\text{rank } A_1 = 1$. Nie ma odwrotności. Również

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

pokazuje, że niezerowy wektor zostaje utracony. Układ $A_1 x = (b_1, b_2)^T$ ma rozwiązanie dokładnie wtedy, gdy $b_1 = b_2$. Wtedy wszystkie rozwiązania to $x = (b_1 - t, t)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

Ważny moment w rachunku

Przed dzieleniem przez wyrażenie zależne od parametru trzeba rozważyć oddzielnie wartości, dla których to wyrażenie jest zerowe. W tym przykładzie zmienia się wtedy rząd i znika odwracalność.

8 Kiedy wystarczy odwrotność jednostronna?

Twierdzenie 8.1. Dla $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ każdy z warunków $AB = I_n$ lub $BA = I_n$ oznacza, że A jest odwracalna i $B = A^{-1}$.

Dowód. Załóżmy $AB = I_n$. Wówczas

$$n = \text{rank } I_n = \text{rank}(AB) \leq \text{rank } A \leq n,$$

więc $\text{rank } A = n$. Z twierdzenia 6.4 istnieje A^{-1} . Mnożąc $AB = I_n$ z lewej przez A^{-1} , dostajemy

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}.$$

Stąd także $BA = I_n$.

Jeżeli zamiast tego $BA = I_n$, to ta sama nierówność dla rzędu daje $\text{rank } A = n$, a pomnożenie $BA = I_n$ z prawej przez A^{-1} prowadzi do $B = A^{-1}$. $\square$

Przykład 8.1. Dlaczego założenie o macierzach kwadratowych jest potrzebne?

Niech

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

Wtedy

$$UV = (1) = I_1, \quad VU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2.$$

Jeden iloczyn jest macierzą jednostkową, lecz drugi nią nie jest. Obie macierze mają maksymalny możliwy rząd równy 1.

Interpretacja map. Mapa $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zanurza oś w płaszczyźnie, a $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ odczytuje pierwszą współrzędną:

$$\begin{aligned} s &\xrightarrow{V} (s, 0) \xrightarrow{U} s, \\ (x, y) &\xrightarrow{U} x \xrightarrow{V} (x, 0). \end{aligned}$$

Pierwsze złożenie jest identycznością na $\mathbb{R}$. Drugie jest rzutem w $\mathbb{R}^2$ i nie odtwarza współrzędnej y .

Co wolno sprawdzić w praktyce?

Dla dwóch macierzy kwadratowych tego samego stopnia wystarczy potwierdzić jeden z iloczynów $AB = I_n$, $BA = I_n$: drugi wynika z twierdzenia. Ten wniosek nie przenosi się bezpośrednio na macierze prostokątne. Wzór z definicji odwrotności zawsze dotyczy obu stron.

9 Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 9.1. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ będą odwracalne, a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} I_n^{-1} &= I_n, & (A^{-1})^{-1} &= A, \\ \boxed{(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}}, & \boxed{(A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T}, \\ (\lambda A)^{-1} &= \lambda^{-1}A^{-1}. \end{aligned}$$

W szczególności iloczyn dwóch odwracalnych macierzy jest odwracalny.

Dowód. Pierwsze dwie równości wynikają wprost z definicji.

Iloczyn. Sprawdzamy obie kolejności:

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n, \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n. \end{aligned}$$

Z jednoznaczności odwrotności wynika wzór dla AB .

Transpozycja. Transponowanie odwraca kolejność czynników, więc

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n, \quad (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

Macierz $(A^{-1})^T$ jest zatem odwrotna do A^T .

Skalar. Ze zgodności mnożenia macierzy ze skalarami mamy

$$(\lambda A)(\lambda^{-1}A^{-1}) = \lambda\lambda^{-1}AA^{-1} = I_n,$$

a w odwrotnej kolejności otrzymujemy ten sam wynik. □

Więcej czynników i potęgi

Wielokrotne zastosowanie wzoru dla dwóch czynników daje

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Dla jednej odwracalnej macierzy i $k \geq 1$ wynika stąd $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Suma zachowuje się inaczej

Suma macierzy odwracalnych nie musi być odwracalna: $I_n + (-I_n) = 0_n$. Nawet gdy odwrotność sumy istnieje, na ogół $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$. Nad $\mathbb{R}$, dla $A = B = I_n$, lewa strona to $\frac{1}{2}I_n$, a prawa $2I_n$.

9.1 Odwrócona kolejność na konkretnych macierzach

Przykład 9.1. Najpierw skalowanie, potem ścinanie

Niech

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Iloczyn SD najpierw skaluje pierwszą współrzędną, a następnie ścina:

$$SD = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad SD(x, y) = (2x + y, y).$$

Znamy odwrotności obu czynników:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odwrotność złożenia ma postać

$$(SD)^{-1} = D^{-1}S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

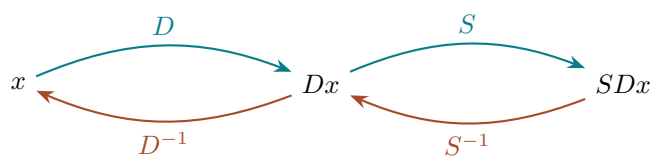
Najpierw odejmujemy drugą współrzędną od pierwszej, a potem dzielimy pierwszą przez 2. Tak odwracamy wzór $(u, v) = (2x + y, y)$:

$$x = \frac{u - v}{2}, \quad y = v.$$

Zmiana kolejności daje inną macierz:

$$S^{-1}D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (SD)(S^{-1}D^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2.$$

Nie jest to odwrotność SD .



Cofamy najpierw ostatnią wykonaną operację.

Dla $x = (1, 2)^T$ droga w przód to $(1, 2) \mapsto (2, 2) \mapsto (4, 2)$, a droga powrotna to $(4, 2) \mapsto (2, 2) \mapsto (1, 2)$.

10 Odwracalne czynniki nie zmieniają rzędu

Twierdzenie 10.1. Niech $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, a $P \in M_m(\mathbb{K})$, $Q \in M_n(\mathbb{K})$ będą odwracalne. Wtedy

$$\text{rank}(PAQ) = \text{rank } A.$$

Dowód. Z nierówności dla rzędu iloczynu mamy

$$\text{rank}(PAQ) \leq \text{rank}(PA) \leq \text{rank } A.$$

Z drugiej strony $A = P^{-1}(PAQ)Q^{-1}$, więc

$$\text{rank } A = \text{rank}(P^{-1}(PAQ)Q^{-1}) \leq \text{rank}(PAQ).$$

Obie nierówności razem dają równość. Biorąc $P = I_m$ lub $Q = I_n$, otrzymujemy też $\text{rank}(AQ) = \text{rank } A$ oraz $\text{rank}(PA) = \text{rank } A$. $\square$

Przykład 10.1. Operacje na wierszach i kolumnach jako mnożenie

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierze skrajne są odwracalne, ponieważ

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

bezpośrednie mnożenie w obu kolejnościach daje odpowiednie macierze jednostkowe.

Mnożenie z lewej przez P wykonuje operację $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mnożenie z prawej przez Q zastępuje kolumnę drugą przez $C_2 - 2C_1$, a trzecią przez $C_3 - 3C_1$:

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Końcowa macierz ma rząd 1, zatem $\text{rank } A = 1$. Potwierdza to fakt, że drugi wiersz A jest dwukrotnością pierwszego.

Dlaczego potrzebna jest odwracalność?

Odwracalny czynnik pozwala odzyskać A z PAQ , co daje drugie oszacowanie rzędu. Bez tego rząd może się zmniejszyć: $\text{rank } I_2 = 2$, ale $\text{rank}(\text{diag}(1, 0)I_2) = 1$. Macierz prostokątna A w tym twierdzeniu sama nie musi mieć odwrotności.

11 Rozwiązywanie równań macierzowych

Niech $A \in M_m(\mathbb{K})$ i $B \in M_n(\mathbb{K})$ będą odwracalne, a $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Równanie

$$AXB = C$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $X \in \mathbb{K}^{m \times n}$:

$$\boxed{X = A^{-1}CB^{-1}}.$$

Istotnie, mnożymy równość z lewej przez A^{-1} , a z prawej przez B^{-1} . Otrzymany wzór jest konieczny, a podstawienie potwierdza jego wystarczalność:

$$A(A^{-1}CB^{-1})B = (AA^{-1})C(B^{-1}B) = C.$$

Przykład 11.1. Obliczenie nieznanej macierzy X

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

Z przykładu 7.1 znamy A^{-1} , a B jest macierzą ścinania. Mamy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Najpierw liczymy

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 35 - 34 & 28 - 28 \\ -15 + 17 & -12 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Następnie

$$X = (A^{-1}C)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Sprawdzenie w równaniu wyjściowym:

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 17 & -3 \end{pmatrix}, \quad (AX)B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 17 & 14 \end{pmatrix} = C.$$

Znaczenie strony mnożenia

Z $AX = C$ wynika $X = A^{-1}C$, natomiast z $XB = C$ wynika $X = CB^{-1}$. Nie można dowolnie przestawiać macierzy odwrotnych. W równaniu $AXB = C$ czynnik A usuwamy z lewej, a B z prawej.

A Zestawienie pojęć i metod

Pojęcie lub własność	Warunek lub wzór
Pierścień macierzy	$M_n(\mathbb{K})$ z dodawaniem i mnożeniem; jednością jest I_n
Algebra macierzy	dodatkowo mnożenie przez skalary zgodne z iloczynem
Macierz skalarna	$\lambda I_n = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$
Centrum	$ZA = AZ$ dla wszystkich A dokładnie wtedy, gdy $Z = \lambda I_n$
Odwrotność	$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$; jest jednoznaczna
Nieosobliwość	$\text{rank } A = n$; równoważna odwracalności
Odwrotność iloczynu	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Odwrotność transpozycji	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Zachowanie rzędu	$\text{rank}(PAQ) = \text{rank } A$ dla odwracalnych P, Q
Równanie macierzowe	$AXB = C \implies X = A^{-1}CB^{-1}$, gdy A, B są odwracalne

Algorytm obliczania A^{-1}

1. Sprawdź, czy A jest kwadratowa. Zapisz $[A \mid I_n]$.
2. Wykonuj odwracalne operacje na całych wierszach obu bloków. Przy parametrach oddziel przypadki zerowania się potencjalnych pivotów.
3. Jeśli lewy blok ma mniej niż n pivotów, macierz jest osobliwa. Jeśli ma n pivotów, sprowadź go do I_n .
4. Odczytaj prawy blok jako A^{-1} . Sprawdź iloczyn z macierzą wyjściową; dla macierzy kwadratowych jeden iloczyn równy I_n wystarczy.

Jak rozpoznać, że odwrotność nie istnieje?

Wystarczy wykazać $\text{rank } A < n$ lub znaleźć $v \neq 0$, dla którego $Av = 0$. Wtedy mapa $x \mapsto Ax$ nie odróżnia wejść 0 i v , więc nie da się jednoznacznie odtworzyć wejścia.

Reguły, które porządkują rachunek

Macierz diagonalna nie musi komutować ze wszystkimi macierzami; taką własność mają dokładnie macierze skalarne. W odwracanym iloczynie odwracamy kolejność czynników. Przy równaniach mnożymy przez odwrotność po właściwej stronie. Pełny rząd oznacza istnienie zwykłej macierzy odwrotnej w przypadku macierzy kwadratowych.