

Równoważność macierzy

Jądro i obraz

Wykład 12

Macierze elementarne. Postać normalna rzędu.

Twierdzenie o wymiarach.

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \xrightarrow{PAQ} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

$J_r^{m,n}$

$$\underbrace{\dim \ker A}_{n-r} + \underbrace{\dim \operatorname{im} A}_r = n$$

Rząd wyznacza klasę równoważności

Każdą macierz rzędu r można przez odwracalne operacje na wierszach i kolumnach sprowadzić do bloku I_r uzupełnionego zerami. Liczba r opisuje wymiar obrazu, a $n - r$ — liczbę niezależnych kierunków należących do jądra.

Spis treści

1	Macierze elementarne	3
2	Odwracalność i kolejność operacji	5
3	Postać normalna macierzy danego rzędu	6
4	Równoważność macierzy i jej klasy	8
5	Macierz odwrotna przez operacje wierszowe	10
6	Jądro i obraz przekształcenia liniowego	12
7	Twierdzenie o wymiarach	14
8	Wyznaczanie baz jądra i obrazu	16
9	Rozwiązania układu jako przesunięcie jądra	18
10	Zadania utrwalające z rozwiązaniami	19
11	Najważniejsze wzory i schemat postępowania	20

Oznaczenia i konwencje

$\mathbb{K}$ oznacza ciało, a $m, n \geq 1$. $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ to zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach. I_k jest macierzą jednostkową, a $GL_k(\mathbb{K})$ zbiorem odwracalnych macierzy stopnia k .

E_{st} oznacza macierz z jedynką na pozycji (s, t) i zerami poza nią; jej rozmiar wynika z kontekstu. R_s i C_s oznaczają odpowiednio wiersz i kolumnę. Wszystkie wektory współrzędnych zapisujemy kolumnowo.

Dla $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ piszemy $T_A(x) = Ax$, $\ker A = \ker T_A$ oraz $\operatorname{im} A = \operatorname{im} T_A = \operatorname{Col} A$. Symbol $\operatorname{im} T$ oznacza obraz przekształcenia liniowego T . W przykładach liczbowych pracujemy nad $\mathbb{R}$, o ile nie podano inaczej.

Dwie strony mnożenia

W wyrażeniu PAQ macierz P ma rozmiar $m \times m$, a Q ma rozmiar $n \times n$. Mnożenie z lewej opisuje operacje na wierszach, a z prawej — na kolumnach.

1 Macierze elementarne

1.1 Trzy podstawowe typy

Macierze elementarne otrzymujemy, wykonując jedną odwracalną operację elementarną na macierzy jednostkowej. Dla ustalonego rozmiaru k i różnych indeksów $s, t \in \{1, \dots, k\}$ definiujemy:

1. Zamianę dwóch współrzędnych:

$$S_{st} = I_k - E_{ss} - E_{tt} + E_{st} + E_{ts}.$$

Macierz S_{st} powstaje z I_k przez zamianę wierszy s i t .

2. Dodanie wielokrotności jednej współrzędnej do drugiej:

$$T_{st}(\lambda) = I_k + \lambda E_{st}, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Indeks s wskazuje wiersz zmieniany, a t — wiersz dodawany. Dopuszczenie $\lambda = 0$ daje po prostu I_k .

3. Przeskalowanie jednej współrzędnej:

$$D_s(\lambda) = I_k + (\lambda - 1)E_{ss} = \text{diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1), \quad \lambda \neq 0.$$

Przykład 1.1. Macierze elementarne stopnia 3

Dla zamiany pozycji 1 i 3, dodania 2 razy wiersza 1 do wiersza 2 oraz pomnożenia wiersza 2 przez -3 otrzymujemy:

$$S_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{21}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na wektorze $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ działają one następująco:

$$S_{13}x = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad T_{21}(2)x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad D_2(-3)x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dlaczego wymagamy $\lambda \neq 0$ przy skalowaniu?

Pomnożenie wiersza przez zero usuwa zawartą w nim informację. Macierz $D_s(0)$ jest osobliwa, dlatego taka operacja nie jest odwracalną operacją elementarną.

1.2 Mnożenie z lewej i z prawej strony

Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Macierze elementarne po lewej stronie A mają stopień m , a po prawej — stopień n .

Iloczyn	Operacja na macierzy A
$S_{st}A$	$R_s \leftrightarrow R_t$
$T_{st}(\lambda)A$	$R_s \leftarrow R_s + \lambda R_t$
$D_s(\lambda)A$	$R_s \leftarrow \lambda R_s$
AS_{st}	$C_s \leftrightarrow C_t$
$AT_{st}(\lambda)$	$C_t \leftarrow C_t + \lambda C_s$
$AD_s(\lambda)$	$C_s \leftarrow \lambda C_s$

Uzasadnienie dla dodawania. Z definicji iloczynu macierzy:

$$(E_{st}A)_{ij} = \delta_{is}a_{tj}, \quad (AE_{st})_{ij} = a_{is}\delta_{tj},$$

gdzie δ_{ij} jest równa 1 dla $i = j$ i 0 w przeciwnym przypadku. Zatem $E_{st}A$ ma tylko jeden ewentualnie niezerowy wiersz, numer s , równy wierszowi t macierzy A . Natomiast AE_{st} ma tylko jedną ewentualnie niezerową kolumnę, numer t , równą kolumnie s macierzy A .

Przykład 1.2. Ta sama reguła, różne zmieniane indeksy

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Z lewej strony używamy macierzy stopnia 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 10 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2.$$

Z prawej strony używamy macierzy stopnia 3:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1.$$

Jak dodać λC_t do C_s ?

Należy pomnożyć A z prawej przez $T_{ts}(\lambda)$. W operacji kolumnowej kolejność indeksów jest odwrócona względem zapisu operacji $R_s \leftarrow R_s + \lambda R_t$.

2 Odwracalność i kolejność operacji

Wszystkie trzy typy macierzy elementarnych są odwracalne:

$$S_{st}^{-1} = S_{st}, \quad T_{st}(\lambda)^{-1} = T_{st}(-\lambda), \quad D_s(\lambda)^{-1} = D_s(\lambda^{-1}).$$

Dwukrotna zamiana przywraca początkową kolejność. Dodawanie odwracamy przez odejmowanie, a skalowanie przez pomnożenie przez odwrotność składową. Algebraicznie dla $s \neq t$ mamy $E_{st}^2 = 0$, więc

$$(I_k + \lambda E_{st})(I_k - \lambda E_{st}) = I_k.$$

Jeżeli kolejno wykonujemy operacje wierszowe opisane przez $L_1, L_2, \dots, L_a$, to otrzymujemy

$$A \mapsto L_1 A \mapsto L_2 L_1 A \mapsto \dots \mapsto L_a \dots L_1 A.$$

Przy kolejnych operacjach kolumnowych $H_1, \dots, H_b$ wynikiem jest $AH_1 \dots H_b$. W obu przypadkach kolejność czynników ma znaczenie.

Twierdzenie 2.1. Każda macierz odwracalna jest iloczynem macierzy elementarnych.

Dowód. Dla odwracalnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{K})$ eliminacja Gaussa–Jordana daje $L_a \dots L_1 A = I_n$. Stąd $A = L_1^{-1} \dots L_a^{-1}$, a odwrotność każdej macierzy elementarnej jest macierzą elementarną. $\square$

Przykład 2.1. Rozkład macierzy na czynniki elementarne

Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Wykonujemy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} I_2.$$

Zatem $T_{12}(-2)T_{21}(-3)A = I_2$, skąd

$$A = T_{21}(3)T_{12}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = T_{12}(-2)T_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Postać normalna macierzy danego rzędu

Twierdzenie 3.1 (Postać normalna rzędu). Jeżeli $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ i $\text{rank } A = r$, to istnieją $P \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$ i $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ takie, że

$$PAQ = J_r^{m,n} := \begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}.$$

Macierze P i Q można wybrać jako iloczyny macierzy elementarnych.

Dowód. Operacjami wierszowymi sprowadzamy A do zredukowanej postaci schodkowej. Jest w niej dokładnie r kolumn bazowych, zawierających wektory $e_1, \dots, e_r$ z $\mathbb{K}^m$. Zamieniamy kolumny tak, aby kolumny bazowe znalazły się na początku. Uzyskujemy

$$\begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dla każdej kolumny bloku C odejmujemy odpowiednią kombinację pierwszych r kolumn. Zerujemy w ten sposób cały blok C . Wszystkie użyte operacje są odwracalne i prowadzą do $J_r^{m,n}$. $\square$

	r kolumn	$n - r$ kolumn
r wierszy	I_r	0
$m - r$ wierszy	0	0

Niezerowa część postaci normalnej ma rozmiar $r \times r$.

Jeżeli $r = 0$, postać normalna jest macierzą zerową. Gdy $r = m$ lub $r = n$, bloki o zerowej liczbie wierszy lub kolumn pomijamy. Dla odwracalnej macierzy kwadratowej otrzymujemy $J_n^{n,n} = I_n$.

Jak zapamiętać macierze P i Q ?

Zaczynamy od $P = I_m$ i $Q = I_n$. Każdą operację wierszową na bieżącej macierzy wykonujemy także na P , a każdą operację kolumnową także na Q . Po zakończeniu zawsze zachodzi $PAQ = J_r^{m,n}$.

3.1 Pełna redukcja macierzy prostokątnej

Przykład 3.1. Macierz 3×4 rzędu 2

Rozważmy macierz, do której będziemy wracać w dalszych przykładach:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Redukcja wierszowa

Najpierw $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ i $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$, a następnie $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Są dwa pivoty, w kolumnach 1 i 3, więc $\text{rank } A = 2$.

2. Operacje kolumnowe

Zamieniamy C_2 z C_3 , potem wykonujemy $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$ oraz $C_4 \leftarrow C_4 - C_1 - C_2$:

$$R \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto J_2^{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ostatni zapis $C_4 \leftarrow C_4 - C_1 - C_2$ jest skrótem dwóch kolejnych operacji elementarnych; kolumny C_1, C_2 pozostają w nich niezmienione.

3. Macierze realizujące redukcję

Wykonując te same operacje na odpowiednich macierzach jednostkowych, otrzymujemy

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sprawdzenie

Bezpośrednie mnożenie daje $PA = R$ oraz

$$AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierze P, Q są odwracalne, ponieważ powstały z macierzy jednostkowej przez odwracalne operacje.

4 Równoważność macierzy i jej klasy

Definicja 4.1. Macierze $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ nazywamy **równoważnymi**, jeżeli istnieją $P \in GL_m(\mathbb{K})$ i $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ takie, że

$$B = PAQ.$$

Piszemy wówczas $A \sim B$.

Jest to relacja równoważności:

- **Zwrotność:** $A = I_m A I_n$.
- **Symetria:** z $B = PAQ$ wynika $A = P^{-1} B Q^{-1}$.
- **Przechodność:** jeżeli $B = P_1 A Q_1$ i $C = P_2 B Q_2$, to $C = (P_2 P_1) A (Q_1 Q_2)$; oba skrajne czynniki są odwracalne.

Twierdzenie 4.2 (Klasyfikacja przez rząd). Dwie macierze tego samego rozmiaru są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam rząd:

$$A \sim B \iff \text{rank } A = \text{rank } B.$$

Dowód. Jeżeli $B = PAQ$, to $\text{rank } B = \text{rank } A$. Istotnie, kolumny AQ generują tę samą przestrzeń co kolumny A , ponieważ $A = (AQ)Q^{-1}$. Mnożenie z lewej przez odwracalną macierz P przenosi tę przestrzeń izomorficznie na przestrzeń kolumn PAQ , więc zachowuje jej wymiar.

Odwrotnie, niech $\text{rank } A = \text{rank } B = r$. Z twierdzenia o postaci normalnej istnieją macierze odwracalne spełniające

$$P_A A Q_A = J_r^{m,n} = P_B B Q_B.$$

Po pomnożeniu przez odpowiednie odwrotności dostajemy

$$B = \underbrace{P_B^{-1} P_A}_P A \underbrace{Q_A Q_B^{-1}}_Q,$$

co dowodzi równoważności. □

Ile jest klas?

W $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ jest dokładnie $\min(m, n) + 1$ klas równoważności:

$$\mathcal{C}_r = \{A : \text{rank } A = r\}, \quad r = 0, 1, \dots, \min(m, n).$$

Każda z nich ma reprezentanta $J_r^{m,n}$. Klasa rzędu 0 składa się wyłącznie z macierzy zerowej. Wśród macierzy kwadratowych wszystkie macierze odwracalne należą do jednej klasy, reprezentowanej przez I_n .

4.1 Przykłady klasyfikacji

Przykład 4.1. Wszystkie klasy w $M_{2 \times 3}(\mathbb{K})$

Możliwe rzędy to 0, 1, 2, więc są dokładnie trzy klasy.

Rząd	Reprezentant	Własność
0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	wszystkie kolumny zerowe
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	kolumny generują prostą
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	kolumny generują $\mathbb{K}^2$

Na przykład $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ma rząd 1: drugi wiersz jest dwa razy pierwszym, a pierwszy nie jest zerowy. Należy więc do klasy $J_1^{2,3}$.

Przykład 4.2. Klasa równoważności zależna od parametru

Dla $t \in \mathbb{R}$ rozważmy

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+t & 1+t \\ 1 & 1+t & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

Odejmujemy pierwszy wiersz od drugiego i trzeciego, po czym odejmujemy nowy drugi wiersz od nowego trzeciego:

$$A(t) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & t(t-1) \end{pmatrix}.$$

Teraz $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ i wreszcie $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$. Otrzymujemy

$$A(t) \sim \text{diag}(1, t, t(t-1)).$$

Nie dzieliśmy przez wyrażenie zależne od t , więc redukcja jest ważna dla każdego parametru. Rząd odczytujemy z liczby niezerowych wyrazów na przekątnej:

$$\text{rank } A(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 2, & t = 1, \\ 3, & t \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

Dla tych trzech przypadków reprezentantami są odpowiednio $J_1^{3,3}$, $J_2^{3,3}$ oraz I_3 .

Równoważność a podobieństwo

Podobieństwo ma postać $B = S^{-1}AS$ i dotyczy macierzy kwadratowych. W równoważności czynniki P i Q wybieramy niezależnie. Na przykład nad $\mathbb{R}$ macierz $\text{diag}(1, 2)$ jest równoważna I_2 , ale nie jest do niej podobna: $S^{-1}I_2S = I_2$ dla każdego odwracalnego S .

5 Macierz odwrotna przez operacje wierszowe

5.1 Uzasadnienie metody Gaussa–Jordana

Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ będzie odwracalna. Tworzymy macierz rozszerzoną złożoną z dwóch bloków i wykonujemy operacje na *całych wierszach*:

$$[A \mid I_n] \longrightarrow [I_n \mid A^{-1}].$$

Dlaczego prawy blok jest odwrotnością? Jeżeli iloczyn wszystkich macierzy operacji wierszowych oznaczmy przez P , to

$$P[A \mid I_n] = [PA \mid P].$$

Po uzyskaniu $PA = I_n$ mamy $P = A^{-1}$, a więc prawy blok jest szukaną macierzą. W szczególności każda operacja musi obejmować także prawy blok.

Drugie spojrzenie: kilka układów jednocześnie. Jeżeli $X = [x^{(1)} \ \dots \ x^{(n)}]$, to

$$AX = I_n \iff Ax^{(j)} = e_j \text{ dla } j = 1, \dots, n.$$

Macierz $[A \mid I_n]$ pozwala rozwiązać wszystkie te układy podczas jednej eliminacji. Ich rozwiązania stają się kolumnami A^{-1} .

Przykład 5.1. Co pokazuje eliminacja dla macierzy osobliwej?

Dla $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ wykonujemy:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Lewy blok ma rząd 1, więc nie może zostać sprowadzony do I_2 . Ponadto układ $Bx = e_1$ zawiera po redukcji równanie $0 = -2$. Nie istnieje zatem macierz X spełniająca $BX = I_2$, a B nie ma odwrotności.

Operacje kolumnowe wymagają innego śledzenia

W powyższym algorytmie stosujemy wyłącznie operacje wierszowe. Jeżeli ogólnie znajdziemy $PAQ = I_n$, to $A^{-1} = QP$. Sam prawy blok otrzymany przez dowolne mieszanie operacji wierszowych i kolumnowych na $[A \mid I_n]$ nie musi być macierzą odwrotną.

5.2 Pełny przykład i rozwiązanie układu

Przykład 5.2. Odwracanie macierzy 3×3

Niech

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Zerujemy element pod pierwszym pivotem

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

2. Zerujemy element nad trzecim pivotem

Operacja $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$ prowadzi do

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

3. Zerujemy element nad drugim pivotem

Po operacji $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Kontrola i zastosowanie

Iloczyny w obu kolejnościach są równe macierzy jednostkowej:

$$BB^{-1} = B^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dla $b = (3, 5, 6)^T$ jedyne rozwiązanie układu $Bx = b$ jest równe

$$x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} -5 + 6 \\ 3 + 5 - 6 \\ -3 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzenie w równaniach: $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $1 + 2 + 3 = 6$.

Jednoznaczne rozwiązanie

Dla odwracalnej A zachodzi $Ax = b \iff x = A^{-1}b$. Gdy potrzebujemy rozwiązania tylko jednego układu, można od razu zredukować $[A \mid b]$, bez obliczania całej odwrotności.

6 Jądro i obraz przekształcenia liniowego

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$, a $T: V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym.

Definicja 6.1. **Jądro i obraz** przekształcenia T to odpowiednio

$$\ker T = \{v \in V : T(v) = 0_W\}, \quad \operatorname{im} T = T(V) = \{T(v) : v \in V\}.$$

Jądro zawiera wektory wysyłane na zero, a obraz wszystkie osiągalne wartości przekształcenia. W szczególności $\ker T \subseteq V$ i $\operatorname{im} T \subseteq W$.

Twierdzenie 6.2. Jądro jest podprzestrzenią V , a obraz jest podprzestrzenią W .

Dowód. Z liniowości $T(0_V) = 0_W$, więc oba zbiory zawierają wektor zerowy. Jeśli $u, v \in \ker T$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, to

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) = 0_W.$$

Zatem $\alpha u + \beta v \in \ker T$. Jeśli natomiast $y_1 = T(v_1)$ i $y_2 = T(v_2)$ należą do obrazu, to

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = T(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \operatorname{im} T.$$

W obu przypadkach spełnione jest kryterium podprzestrzeni. □

6.1 Przekształcenie zadane macierzą

Dla $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ mamy $T_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $T_A(x) = Ax$. Wtedy

$$\ker A = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0_{\mathbb{K}^m}\}.$$

Jeśli kolumny A oznaczymy przez $a_1, \dots, a_n$, to

$$Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n, \quad \operatorname{im} A = \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n).$$

Wynika stąd podstawowa interpretacja rzędu:

$$\dim \operatorname{im} A = \operatorname{rank} A.$$

Na przykład przekształcenie zerowe ma jądro V i obraz $\{0_W\}$, a identyczność na V ma jądro $\{0_V\}$ i obraz V .

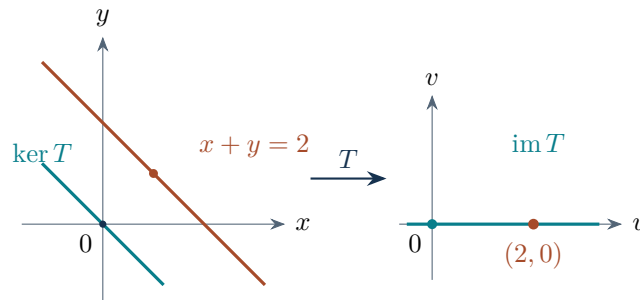
6.2 Przykłady geometryczne i wielomianowe

Przykład 6.1. Przekształcenie płaszczyzny na prostą

Niech $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 0)$. Rozwiązanie równania $x + y = 0$ oraz opis wszystkich wartości dają

$$\ker T = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \operatorname{im} T = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Każda prosta $x + y = c$ zostaje odwzorowana w jeden punkt $(c, 0)$.



Jądro przechodzi w zero; równoległa prosta $x + y = 2$ przechodzi w $(2, 0)$.

Przykład 6.2. Wartości wielomianu w dwóch punktach

Niech $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ i $T: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem $T(p) = (p(0), p(1))$. Jest to przekształcenie liniowe. Dla $p = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ warunek $T(p) = 0$ oznacza

$$a_0 = 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Stąd $p = a_2(t^2 - t) + a_3(t^3 - t)$, czyli

$$\ker T = \operatorname{span}(t^2 - t, t^3 - t), \quad \dim \ker T = 2.$$

Te dwa wielomiany są niezależne, co widać po współczynnikach przy t^2 i t^3 . Dla dowolnego $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ wielomian $p(t) = a + (b - a)t$ spełnia $T(p) = (a, b)$, zatem $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^2$ i $\dim \operatorname{im} T = 2$.

7 Twierdzenie o wymiarach

Twierdzenie 7.1 (O wymiarze jądra i obrazu). Jeżeli $T: V \rightarrow W$ jest liniowe i $\dim V = n < \infty$, to

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = \dim V.$$

Nie trzeba zakładać, że W ma skończony wymiar.

Dowód. Oznaczmy $s = \dim \ker T$. Wybieramy bazę $v_1, \dots, v_s$ jądra i uzupełniamy ją do bazy całej przestrzeni:

$$v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n.$$

Pokażemy, że $T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)$ jest bazą obrazu.

1. Generowanie obrazu

Każdy $v \in V$ ma postać $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Ponieważ $T(v_i) = 0$ dla $i \leq s$, mamy

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = \sum_{i=s+1}^n \alpha_i T(v_i).$$

Zatem podane wektory generują $\operatorname{im} T$.

2. Niezależność liniowa

Założmy, że $\sum_{i=s+1}^n \beta_i T(v_i) = 0$. Z liniowości

$$T\left(\sum_{i=s+1}^n \beta_i v_i\right) = 0,$$

wieć wektor pod znakiem T należy do jądra. Istnieją zatem $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ takie, że

$$\sum_{i=s+1}^n \beta_i v_i = \sum_{j=1}^s \gamma_j v_j, \quad -\sum_{j=1}^s \gamma_j v_j + \sum_{i=s+1}^n \beta_i v_i = 0.$$

Niezależność wszystkich wektorów bazy V wymusza $\gamma_j = 0$ i $\beta_i = 0$. Obrazy $T(v_{s+1}), \dots, T(v_n)$ są więc niezależne liniowo.

3. Obliczenie wymiaru

Znaleziona baza obrazu zawiera $n-s$ wektorów. Stąd $\dim \operatorname{im} T = n-s$, co daje $s+(n-s) = n$. Dowód obejmuje także $s=0$ i $s=n$, przy konwencji, że pusty układ jest bazą przestrzeni zerowej. $\square$

Wersja macierzowa

Dla $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ zachodzi

$$\dim \ker A = n - \operatorname{rank} A.$$

Liczba kolumn n jest wymiarem dziedziny. Rząd r odpowiada liczbie pivotów, a $n-r$ liczbie swobodnych parametrów w rozwiązaniu $Ax = 0$.

7.1 Różnowartościowość, surjektywność i izomorfizm

Przekształcenie liniowe $T: V \rightarrow W$ jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker T = \{0_V\}$. Istotnie, $T(u) = T(v)$ jest równoważne $T(u - v) = 0$. Trywialne jądro oznacza więc, że równe obrazy mogą mieć tylko równe argumenty.

Jeżeli $\dim V = n$ i $\dim W = m$, kryteria mają postać:

Własność T	Warunek przestrzenny	Warunek na rząd
różnowartościowość	$\ker T = \{0\}$	$\dim \operatorname{im} T = n$
surjektywność	$\operatorname{im} T = W$	$\dim \operatorname{im} T = m$
izomorfizm	obie powyższe własności	$\dim \operatorname{im} T = n = m$

W szczególności:

- jeśli $n > m$, żadne liniowe $T: V \rightarrow W$ nie jest różnowartościowe;
- jeśli $n < m$, żadne takie T nie jest surjektywne;
- jeśli $n = m < \infty$, różnowartościowość i surjektywność są równoważne.

Macierze kwadratowe

Dla $A \in M_n(\mathbb{K})$ równoważne są warunki:

$$A \text{ odwracalna} \iff \operatorname{rank} A = n \iff \ker A = \{0\} \iff \operatorname{im} A = \mathbb{K}^n.$$

Przykład 7.1. Różniczkowanie wielomianów

Rozważmy $D: \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $D(p) = p'$. W bazach $(1, t, t^2, t^3)$ i $(1, t, t^2)$ jego macierz to

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pochodna jest zerowa dokładnie dla wielomianów stałych, zatem $\ker D = \operatorname{span}(1)$ ma wymiar 1. Każdy wielomian $q = a + bt + ct^2$ jest pochodną wielomianu

$$p(t) = at + \frac{b}{2}t^2 + \frac{c}{3}t^3.$$

Stąd $\operatorname{im} D = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ ma wymiar 3 i D jest surjektywne. Nie jest różnowartościowe: $D(p + \lambda) = D(p)$ dla każdej stałej λ . Sprawdzenie twierdzenia o wymiarach: $1 + 3 = 4$.

8 Wyznaczanie baz jądra i obrazu

Praktyczna procedura

Sprowadź A operacjami wierszowymi do postaci schodkowej lub zredukowanej postaci schodkowej R .

1. **Jądro:** rozwiąż $Rx = 0$. Każdemu parametrowi swobodnemu przypisz jeden wektor bazowy.
2. **Obraz:** odczytaj indeksy kolumn bazowych w R i wybierz kolumny o tych samych indeksach z macierzy A .
3. **Kontrola:** liczby wektorów w obu bazach powinny sumować się do n .

Przykład 8.1. Dwie bazy dla jednej macierzy

Wróćmy do macierzy z rozdziału 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Baza jądra

Układ $Rx = 0$ ma równania $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 + x_4 = 0$. Przyjmujemy $x_2 = s$, $x_4 = t$, skąd

$$x = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_3} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_4}.$$

Wektory u_3, u_4 są niezależne: druga i czwarta współrzędna ich kombinacji odczytują odpowiednio s i t . Zatem (u_3, u_4) jest bazą $\ker A$, a $\dim \ker A = 2$.

2. Baza obrazu

Pivoty stoją w kolumnach 1 i 3. Z macierzy A wybieramy

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Są one niezależne, a pozostałe kolumny spełniają $a_2 = 2a_1$ i $a_4 = a_1 + a_3$. Stąd

$$\operatorname{im} A = \operatorname{span}(a_1, a_3) = \{(y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3 : y_3 = y_1 + y_2\}.$$

Wektor $\alpha a_1 + \beta a_3 = (\alpha, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta)^T$ spełnia to równanie, a każdą jego trójkę otrzymamy dla $\alpha = y_1$, $\beta = y_2 - 2y_1$. Ostatecznie $2 + 2 = 4$.

8.1 Znaczenie macierzy P i Q dla jąder, obrazów i baz

Dla $B = PAQ$, gdzie P, Q są odwracalne, zachodzą wzory

$$\ker B = Q^{-1}(\ker A), \quad \operatorname{im} B = P(\operatorname{im} A).$$

Pierwszy wynika z równoważności $Bx = 0 \iff AQx = 0 \iff Qx \in \ker A$. Drugi wynika z faktu, że Qx przebiega całą dziedzinę, gdy przebiega ją x . Równoważność zachowuje więc *wymiary* obu przestrzeni; ich położenie w przestrzeniach współrzędnych może się zmienić.

Jeśli $PAQ = J_r^{m,n}$, otrzymujemy bezpośrednio:

$$\ker A = \operatorname{span}(Qe_{r+1}, \dots, Qe_n), \quad \operatorname{im} A = \operatorname{span}(P^{-1}e_1, \dots, P^{-1}e_r).$$

W pierwszym wzorze $e_j \in \mathbb{K}^n$, a w drugim $e_i \in \mathbb{K}^m$. Kolumny Q tworzą nową bazę dziedziny, a kolumny P^{-1} — nową bazę przeciwdziedziny. W tych bazach macierz przekształcenia ma postać $J_r^{m,n}$.

Przykład 8.2. Bazy dopasowane do działania macierzy

Dla rozpatrywanej macierzy A mamy

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oznaczmy kolumny Q przez u_1, u_2, u_3, u_4 , a kolumny P^{-1} przez w_1, w_2, w_3 . Wtedy

$$u_1 = e_1, \quad u_2 = e_3, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Równość $AQ = P^{-1}J_2^{3,4}$ oznacza dokładnie

$$Au_1 = w_1, \quad Au_2 = w_2, \quad Au_3 = Au_4 = 0.$$

Pierwsze dwa kierunki dziedziny przechodzą na bazę obrazu, a dwa pozostałe tworzą bazę jądra. Dla współrzędnych $x = Qy$ wektor Ax ma w bazie (w_1, w_2, w_3) współrzędne $(y_1, y_2, 0)^T$.

9 Rozwiązania układu jako przesunięcie jądra

Twierdzenie 9.1. Układ $Ax = b$ jest rozwiązalny dokładnie wtedy, gdy $b \in \text{im } A$. Jeżeli x_0 jest jednym rozwiązaniem, to zbiór wszystkich rozwiązań ma postać

$$x_0 + \ker A = \{x_0 + v : v \in \ker A\}.$$

Dowód. Pierwsze stwierdzenie jest definicją obrazu. Jeśli $Ax_0 = b$, to

$$Ax = b \iff Ax - Ax_0 = 0 \iff x - x_0 \in \ker A.$$

Każde rozwiązanie jest więc sumą x_0 i wektora z jądra, i każda taka suma jest rozwiązaniem. $\square$

Zbiór rozwiązań układu zgodnego jest przestrzenią afiniczną wymiaru $n - \text{rank } A$. Dla $b = 0$ jest podprzestrzenią liniową; dla $b \neq 0$ nie zawiera zera, więc podprzestrzenią liniową nie jest.

Przykład 9.1. Warunek zgodności i wszystkie rozwiązania

Dla tej samej macierzy $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ i $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ wykonana wcześniej redukcja wierszowa daje

$$[A \mid b] \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array} \right].$$

Warunek zgodności to $b_3 = b_1 + b_2$, czyli dokładnie warunek $b \in \text{im } A$. Gdy jest spełniony, wybieramy $x_2 = s$, $x_4 = t$ i dostajemy

$$x = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_2 - 2b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Dla $b = (3, 7, 10)^T$ jest zatem

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzenie: $A(3, 0, 1, 0)^T = 3a_1 + a_3 = (3, 7, 10)^T$, a dwa pozostałe wektory należą do jądra. Rozwiązania tworzą płaszczyznę afiniczną w $\mathbb{R}^4$. Dla $b = (3, 7, 11)^T$ ostatnie równanie ma postać $0 = 1$, więc układ jest sprzeczny.

10 Zadania utrwalające z rozwiązaniami

Zadanie 1. Jądro, obraz i równanie $T(x) = b$

Niech $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x+y, y+z)$. Wyznacz bazy jądra i obrazu oraz wszystkie argumenty o obrazie (a, b) .

Rozwiązanie. Warunki $x + y = 0$ i $y + z = 0$ dają

$$(x, y, z) = s(-1, 1, -1), \quad \ker T = \text{span}\{(-1, 1, -1)\}.$$

Obrazy $T(1, 0, 0) = (1, 0)$ i $T(0, 0, 1) = (0, 1)$ tworzą bazę $\mathbb{R}^2$, więc $\text{im } T = \mathbb{R}^2$. Wymiary spełniają $1 + 2 = 3$. Dla dowolnego (a, b) równanie jest zgodne, a jego rozwiązania to

$$(x, y, z) = (a - s, s, b - s) = (a, 0, b) + s(-1, 1, -1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 2. Jądro i obraz w zależności od parametru

Dla $A(t)$ z rozdziału 4 wyznacz wymiary jądra i obrazu oraz podaj ich bazy w przypadkach osobliwych.

Rozwiązanie. Z wcześniej obliczonego rzędu i twierdzenia o wymiarach:

t	0	1	$t \notin \{0, 1\}$
$\dim \text{im } A(t)$	1	2	3
$\dim \ker A(t)$	2	1	0

Dla $t = 0$ wszystkie wiersze są równe $(1, 1, 1)$, zatem

$$\ker A(0) = \text{span}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}, \quad \text{im } A(0) = \text{span}\{(1, 1, 1)\}.$$

Dla $t = 1$ równania jądra redukują się do $x = 0$, $y + z = 0$:

$$\ker A(1) = \text{span}\{(0, -1, 1)\}, \quad \text{im } A(1) = \text{span}\{(1, 1, 1), (1, 2, 2)\}.$$

Dla pozostałych t jądro jest zerowe, a obraz równy $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 3. Czy równoważność wyznacza samo jądro?

Porównaj $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Mamy $C = BS_{12}$, więc $B \sim C$ i obie macierze mają rząd 1. Jednak $\ker B = \text{span}(e_2)$, a $\ker C = \text{span}(e_1)$. Równoważność zapewnia równość wymiarów jąder, lecz nie równość tych podprzestrzeni.

11 Najważniejsze wzory i schemat postępowania

Macierze elementarne

$$\begin{aligned} S_{st} &= I - E_{ss} - E_{tt} + E_{st} + E_{ts}, & S_{st}^{-1} &= S_{st}, \\ T_{st}(\lambda) &= I + \lambda E_{st}, & T_{st}(\lambda)^{-1} &= T_{st}(-\lambda), \\ D_s(\lambda) &= I + (\lambda - 1)E_{ss}, & D_s(\lambda)^{-1} &= D_s(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

W dwóch pierwszych wzorach $s \neq t$; przy skalowaniu $\lambda \neq 0$.

Rząd, równoważność, wymiary

$$\begin{aligned} A \sim B &\iff B = PAQ \text{ } (P, Q \text{ odwracalne}) \iff \text{rank } A = \text{rank } B, \\ A &\sim J_r^{m,n}, \quad r = \text{rank } A, \\ \dim \text{im } A &= r, \quad \dim \ker A = n - r, \\ \dim \ker T + \dim \text{im } T &= \dim V \quad (\dim V < \infty). \end{aligned}$$

Jak zmieniają się jądro i obraz?

Poniższe wzory zakładają odwracalność P i Q oraz odpowiednie rozmiary.

Macierz	Jądro	Obraz
PA	$\ker A$	$P(\text{im } A)$
AQ	$Q^{-1}(\ker A)$	$\text{im } A$
PAQ	$Q^{-1}(\ker A)$	$P(\text{im } A)$

Dobór metody do zadania

- Klasa równoważności:** oblicz rząd; przy ustalonych rozmiarach jest to pełna informacja o klasie.
- Jawne P, Q :** śledź operacje na wierszach I_m i kolumnach I_n .
- Odwrotność:** zredukuj $[A \mid I_n]$ do $[I_n \mid A^{-1}]$.
- Baza jądra:** rozwiąż układ jednorodny i wyodrębnij wektory stojące przy parametrach.
- Baza obrazu:** wybierz oryginalne kolumny o indeksach pivotów znalezionych w redukcji wierszowej.
- Układ niejednorodny:** sprawdź zgodność, znajdź jedno rozwiązanie x_0 i zapisz wszystkie rozwiązania jako $x_0 + \ker A$.