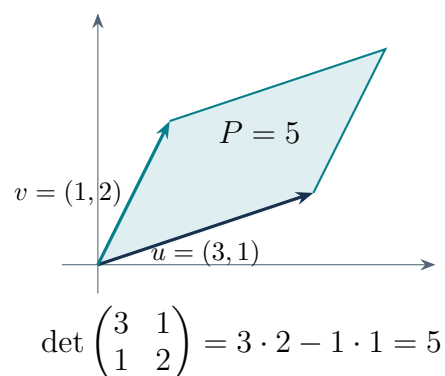


Permutacje i wyznaczniki

Wykłady 13–14

Od znaku permutacji do objętości i wzorów Cramera.



Jedna liczba, kilka interpretacji

Wyznacznik opisuje zmianę zorientowanej objętości, wykrywa odwracalność macierzy i pozwala zapisać rozwiązanie układu równań. Jego definicja łączy wszystkie sposoby wyboru po jednym elemencie z każdego wiersza i każdej kolumny, z odpowiednimi znakami.

Spis treści

1	Od układu równań do wyznacznika	3
2	Znaczenie geometryczne wyznacznika	4
3	Permutacje i grupa symetryczna	6
4	Cykle, potęgi i rząd permutacji	7
5	Transpozycje i znak permutacji	9
6	Definicja wyznacznika: wzór Leibniza	11
7	Wieloliniowość i alternowanie	13
8	Operacje elementarne i eliminacja	15
9	Charakteryzacja wyznacznika	17
10	Minory i rozwinięcie Laplace’a	18
11	Wyznaczniki macierzy blokowych	20
12	Wyznacznik iloczynu i odwracalność	21
13	Macierz dołączona i wzór na odwrotność	23
14	Wzory Cramera	25
15	Zadania utrwalające z rozwiązaniami	27
16	Najważniejsze wzory i dobór metody	28

Oznaczenia i konwencje

$\mathbb{K}$ jest ciałem, $M_n(\mathbb{K})$ oznacza macierze kwadratowe stopnia n , I_n macierz jednostkową, a A^T transpozycję. Wiersze oznaczamy przez R_i , kolumny przez C_j lub a_j . Przykłady liczbowe i geometryczne dotyczą $\mathbb{R}$, o ile nie zaznaczono inaczej.

Permutacje składamy od prawej do lewej: $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. $\text{sgn } \sigma \in \{1, -1\}$ to znak permutacji, a $\text{ord}(\sigma)$ jej rząd. Minor M_{ij} jest liczbą, dopełnienie algebraiczne oznaczamy przez $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, a macierz dołączoną przez $\text{adj } A$.

WYKŁAD 13 Permutacje i definicja wyznacznika

1 Od układu równań do wyznacznika

Dla macierzy stopnia 1 przyjmujemy $\det[a] = a$. Równanie $ax = b$ ma dla $a \neq 0$ jedyne rozwiązanie $x = b/a$. Analogiczny mianownik pojawia się przy dwóch niewiadomych.

Rozważmy układ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez a_{22} , drugie przez $-a_{12}$ i dodając, dostajemy

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

Analogiczne wyeliminowanie x_1 daje $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$.

Definicja 1.1. Wyznacznik macierzy $A \in M_2(\mathbb{K})$ to

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Jeśli $\det A \neq 0$, rozwiązanie ma postać

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Są to wzory Cramera dla dwóch niewiadomych.

Przykład 1.1. Rozwiązanie układu 2×2

Niech $3x + y = 7$ oraz $x + 2y = 4$. Liczymy

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Zatem $x = D_1/D = 2$ i $y = D_2/D = 1$. Sprawdzenie: $3 \cdot 2 + 1 = 7$ oraz $2 + 2 \cdot 1 = 4$.

Warunek niezerowego mianownika

Gdy $\det A = 0$, powyższe ilorazy nie są określone. Układ trzeba wtedy zbadać eliminacją: może być sprzeczny albo mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

2 Znaczenie geometryczne wyznacznika

2.1 Pole i orientacja na płaszczyźnie

Niech $u = (a, c)^T$, $v = (b, d)^T$ i $A = [u \ v]$. Wektory te rozpinają równoległobok

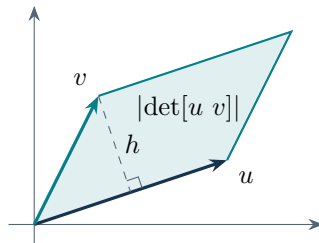
$$\mathcal{R}(u, v) = \{su + tv : 0 \leq s, t \leq 1\}.$$

Twierdzenie 2.1. Pole tego równoległoboku jest równe $|\det A| = |ad - bc|$.

Dowód. Jeśli któryś wektor jest zerowy, obie strony są równe zero. W pozostałym przypadku niech α, β będą argumentami wektorów utożsamionych z liczbami zespolonymi $u = a + ic$, $v = b + id$. Wówczas

$$\frac{v}{u} = \frac{|v|}{|u|} (\cos(\beta - \alpha) + i \sin(\beta - \alpha)) = \frac{ab + cd + i(ad - bc)}{a^2 + c^2}.$$

Porównanie części urojonych daje $ad - bc = |u| |v| \sin(\beta - \alpha)$. Pole jest iloczynem długości podstawy i wysokości, czyli $|u| |v| |\sin(\beta - \alpha)| = |ad - bc|$. $\square$



Wysokość h jest odległością końca v od prostej rozpiętej przez u .

Znak niesie informację o orientacji

Jeśli $\det[u \ v] > 0$, uporządkowana para (u, v) ma orientację dodatnią; jeśli $\det[u \ v] < 0$, ujemną. Zamiana kolejności daje $\det[v \ u] = -\det[u \ v]$, lecz nie zmienia pola. Wyznacznik zerowy oznacza współliniowość wektorów.

2.2 Objętość i skala przekształcenia liniowego

Dla $A = [a_1 \ \cdots \ a_n] \in M_n(\mathbb{R})$ równoległoscian rozpięty przez kolumny to

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j a_j : 0 \leq t_j \leq 1 \right\} = A([0, 1]^n).$$

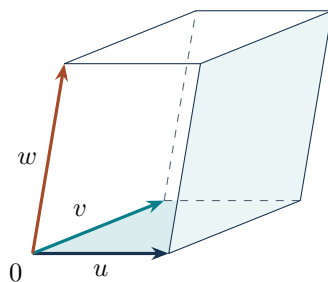
Jego n -wymiarowa objętość jest równa $|\det A|$. W wymiarze 1 jest to długość, w wymiarze 2 pole, a w wymiarze 3 zwykła objętość. Wyznacznik bez wartości bezwzględnej opisuje *objętość zorientowaną*.

Przykład 2.1. Równoległoscian i czworościan

Niech

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podstawa rozpięta przez u, v ma pole $2 \cdot 2 = 4$, a wysokość w kierunku prostopadłym do podstawy wynosi 3. Zatem objętość wynosi 12, zgodnie z $\det A = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.



Objętość równoległoscianu jest zawsze nieujemna.

Czworościan o wierzchołkach $0, u, v, w$ ma objętość $12/6 = 2$. Analogicznie trójkąt $0, u, v$ w $\mathbb{R}^2$ ma pole $|\det[u \ v]|/2$.

Dlaczego występuje wartość bezwzględna? Zamiana dwóch kierunków odwraca orientację, lecz nie zmienia bryły. Operacje ścinania zachowują objętość, a skalowanie jednego kierunku przez λ mnoży ją przez $|\lambda|$. Redukcja do postaci trójkątnej sprowadza więc wzór do iloczynu wysokości. Jeśli $\text{rank } A < n$, obraz leży w podprzestrzeni niższego wymiaru i ma zerową objętość n -wymiarową.

3 Permutacje i grupa symetryczna

Definicja 3.1. Permutacją zbioru $\{1, \dots, n\}$ nazywamy bijekcję tego zbioru na siebie. Zbiór wszystkich takich bijekcji oznaczamy przez S_n .

Permutację zapisujemy w dwóch wierszach:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Dolny wiersz zawiera każdą liczbę $1, \dots, n$ dokładnie raz. Stąd $|S_n| = n!$.

Definicja 3.2. Grupa to zbiór G z działaniem $G \times G \rightarrow G$, które jest łączne, ma element neutralny e , a każdy $g \in G$ ma element odwrotny g^{-1} . Jeśli dodatkowo $gh = hg$ dla wszystkich g, h , grupa jest abelowa.

Permutacje z działaniem składania tworzą **grupę symetryczną** S_n : składanie funkcji jest łączne, identyczność jest elementem neutralnym, a odwrotność bijekcji jest bijekcją. Przyjmujemy konwencję

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)),$$

czyli najpierw wykonujemy permutację zapisaną po prawej.

Przykład 3.1. Dwa porządki składania

Niech

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Każdy argument śledzimy osobno:

i	1	2	3	4
$\tau(i)$	2	3	1	4
$\sigma(\tau(i))$	2	1	4	3
$\sigma(i)$	4	2	1	3
$\tau(\sigma(i))$	4	3	2	1

Zatem

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wyniki są różne. Ogólnie S_n nie jest abelowa dla $n \geq 3$. Odwrotność odczytujemy, odwracając wszystkie strzałki: $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Cykle, potęgi i rząd permutacji

Definicja 4.1. Cykl $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k)$ wysyła i_1 w i_2 , i_2 w i_3 , aż do i_k w i_1 , a pozostałe elementy pozostawia na miejscu.

Cykle są rozłączne, jeśli nie mają wspólnych elementów. Rozłączne cykle komutują, ponieważ każdy działa na innej części zbioru. Zapis cyklu można obrócić, np. $(1 \ 4 \ 3) = (4 \ 3 \ 1) = (3 \ 1 \ 4)$.

Twierdzenie 4.2 (Rozkład na cykle rozłączne). Każda permutacja jest iloczynem rozłącznych cykli. Rozkład jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności cykli i cyklicznego przesunięcia ich zapisów. Cykle jednoelementowe można pomijać.

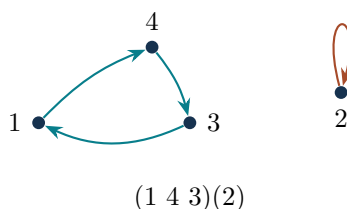
Dowód. Dla ustalonej permutacji π definiujemy $i \sim j$, gdy $j = \pi^s(i)$ dla pewnego $s \in \mathbb{Z}$. Relacja jest zwrotna ($s = 0$), symetryczna (potęga $-s$) i przechodnia (dodawanie wykładników). Jej klasy to orbity permutacji.

Każda orbita ma postać $\{i, \pi(i), \dots, \pi^{k-1}(i)\}$, gdzie k jest najmniejszą dodatnią liczbą spełniającą $\pi^k(i) = i$. Na tej orbicie π działa jak cykl $(i \ \pi(i) \ \dots \ \pi^{k-1}(i))$. Orbity są rozłączne i pokrywają cały zbiór, więc iloczyn tych cykli daje π . W każdym innym rozkładzie na cykle rozłączne cykl zawierający i musi kolejno zawierać $\pi(i), \pi^2(i), \dots$. To dowodzi jednoznaczności. $\square$

Przykład 4.1. Odczytywanie cykli

Dla σ z poprzedniego przykładu $1 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 1$ oraz $2 \mapsto 2$, stąd $\sigma = (1 \ 4 \ 3)(2) = (1 \ 4 \ 3)$. Podobnie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 4 \ 2), \quad \tau\sigma = (1 \ 4)(2 \ 3).$$



4.1 Potęgowanie przez przesuwanie po cyklach

Dla $s \in \mathbb{Z}$ przyjmujemy $\pi^0 = e$, dodatnie potęgi oznaczają wielokrotne składanie, a $\pi^s = (\pi^{-1})^{-s}$ dla $s < 0$. Zachodzi $\pi^s \pi^t = \pi^{s+t}$. Odwrotność cyklu czytamy w przeciwnym kierunku:

$$(i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_k)^{-1} = (i_1 \ i_k \ i_{k-1} \ \cdots \ i_2).$$

Definicja 4.3. Rząd permutacji to $\text{ord}(\pi) = \min\{q \geq 1 : \pi^q = e\}$.

Twierdzenie 4.4. Jeśli długości rozłącznych cykli permutacji wynoszą $k_1, \dots, k_r$, to

$$\text{ord}(\pi) = \text{NWW}(k_1, \dots, k_r).$$

Punkty stałe można uwzględnić jako cykle długości 1; w szczególności $\text{ord}(e) = 1$.

Dowód. Na cyklu długości k potęga q przesuwa każdy element o q miejsc. Jest identycznością dokładnie wtedy, gdy k dzieli q . Cała permutacja jest identycznością wtedy, gdy ten warunek zachodzi jednocześnie dla wszystkich cykli. Najmniejsze takie q jest ich NWW. $\square$

Przykład 4.2. Kwadrat i sześcián permutacji

Dla $\sigma = (1 \ 4 \ 3)$ otrzymujemy

$$\sigma^2 = (1 \ 3 \ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = e.$$

Ani σ , ani σ^2 nie jest identycznością, więc $\text{ord}(\sigma) = 3$.

Przykład 4.3. Duża i ujemna potęga

Niech $\pi = (1 \ 4 \ 3)(2 \ 5) \in S_6$; element 6 jest stały. Mamy $\text{ord}(\pi) = \text{NWW}(3, 2) = 6$ oraz

$$\pi^{-1} = (1 \ 3 \ 4)(2 \ 5).$$

Ponieważ $2026 \equiv 1 \pmod{3}$ i $2026 \equiv 0 \pmod{2}$, dostajemy

$$\pi^{2026} = (1 \ 4 \ 3).$$

Z kolei $-1 \equiv 5 \pmod{6}$, więc $\pi^{-1} = \pi^5$. Można zawsze redukować wykładnik modulo rząd całej permutacji, albo osobno modulo długość każdego cyklu.

Dwa znaczenia słowa „rząd”

Rząd permutacji jest okresem jej potęg. Rząd macierzy jest wymiarem przestrzeni jej kolumn. Są to odrębne pojęcia.

5 Transpozycje i znak permutacji

Definicja 5.1. Transpozycja to cykl długości 2, czyli zamiana dwóch elementów.

Każdy cykl długości $k \geq 2$ jest iloczynem $k - 1$ transpozycji:

$$(i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_k) = (i_1 \ i_k)(i_1 \ i_{k-1}) \cdots (i_1 \ i_3)(i_1 \ i_2).$$

Sprawdzamy to, śledząc kolejno obrazy $i_1, \dots, i_k$. Z rozkładu na cykle wynika więc, że każda permutacja jest iloczynem transpozycji. Sam rozkład nie jest jednoznaczny: można wstawić $(i \ j)(i \ j) = e$ i zwiększyć liczbę czynników o 2.

5.1 Dlaczego parzystość liczby transpozycji jest stała?

Definicja 5.2. Inwersją permutacji σ jest para indeksów (i, j) , dla której $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$. Liczbę inwersji oznaczamy przez $N(\sigma)$.

Zamiana dwóch sąsiednich pozycji w ciągu $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ zmienia $N(\sigma)$ o 1 lub -1 : odwraca porządek tylko tej pary, a łączny wkład par z innymi pozycjami pozostaje taki sam.

Dowolną zamianę pozycji $i < j$ można wykonać przez $2(j - i) - 1$ zamian sąsiednich: przesunąć element z i na j , a element stojący wcześniej na j przesunąć z $j - 1$ na i . Liczba kroków jest nieparzysta, więc każda transpozycja odwraca parzystość liczby inwersji.

Jeśli $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ jest iloczynem transpozycji, to startując od identyczności i dołączając kolejne czynniki z prawej, otrzymujemy

$$N(\sigma) \equiv k \pmod{2}.$$

Lewa strona zależy tylko od σ . Każdy rozkład tej samej permutacji ma więc tę samą parzystość liczby transpozycji.

Definicja 5.3. Znak permutacji to

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{N(\sigma)} = (-1)^k,$$

gdzie k jest liczbą transpozycji w dowolnym jej rozkładzie. Permutacja jest parzysta, gdy znak wynosi 1, i nieparzysta, gdy wynosi -1 .

Wniosek

Identyczność jest parzysta. Nie można przedstawić jej jako iloczynu nieparzystej liczby transpozycji. Znak jest określony niezależnie od wybranej metody rozkładu.

5.2 Obliczanie znaku w praktyce

Z definicji przez liczbę transpozycji wynikają wzory

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau, \quad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn} \sigma.$$

Pierwszy wynika z połączenia dwóch rozkładów, a drugi z $1 = \operatorname{sgn} e = \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \sigma^{-1}$. Cykl długości k ma znak $(-1)^{k-1}$, zatem

Jeżeli rozłączne cykle mają długości $k_1, \dots, k_r$, to

$$\operatorname{sgn} \sigma = \prod_{j=1}^r (-1)^{k_j-1}.$$

Jeśli liczymy także punkty stałe jako cykle długości 1, to $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{n-r}$. Permutacja jest nieparzysta dokładnie wtedy, gdy liczba cykli parzystej długości jest nieparzysta.

Przykład 5.1. Dwie metody obliczania znaku

Dla $\sigma = (1\ 4\ 3)$ cykl ma długość 3, więc $\operatorname{sgn} \sigma = 1$. W zapisie $(4, 2, 1, 3)$ inwersje to

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3).$$

Jest ich 4, co ponownie daje znak $(-1)^4 = 1$. Dla $\pi = (1\ 4\ 3)(2\ 5) \in S_6$ otrzymujemy $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^2(-1)^1 = -1$. Punkt stały 6 nie zmienia znaku.

Wszystkie permutacje trzech elementów

Permutacja	$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$	$N(\sigma)$	$\operatorname{sgn} \sigma$
e	$(1, 2, 3)$	0	+1
$(1\ 2)$	$(2, 1, 3)$	1	-1
$(1\ 3)$	$(3, 2, 1)$	3	-1
$(2\ 3)$	$(1, 3, 2)$	1	-1
$(1\ 2\ 3)$	$(2, 3, 1)$	2	+1
$(1\ 3\ 2)$	$(3, 1, 2)$	2	+1

Znak a długość cyklu

Cykl długości nieparzystej jest permutacją parzystą, ponieważ rozkłada się na parzystą liczbę transpozycji. Cykl długości parzystej jest nieparzysty.

6 Definicja wyznacznika: wzór Leibniza

Definicja 6.1. Dla $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ definiujemy

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

W każdym składniku wybieramy dokładnie jeden element z każdego wiersza. Ponieważ σ jest bi-jekcją, wybrane elementy pochodzą także z różnych kolumn. Jest $n!$ takich wyborów. Znak ± 1 traktujemy we wzorze jako odpowiedni element ciała $\mathbb{K}$.

Przykład 6.1. Jeden składnik sumy

Dla $n = 4$ i $\sigma = (1\ 3\ 4\ 2)$ mamy $(\sigma(1), \dots, \sigma(4)) = (3, 1, 4, 2)$. Znak cyklu długości 4 jest ujemny, więc jego składnik to

$$-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}.$$

Nie wolno wybrać dwóch elementów tej samej kolumny: taki wybór nie odpowiada żadnej permutacji i nie występuje w sumie.

6.1 Stopnie 1, 2 i 3

Dla $n = 1$ jedynym składnikiem jest a_{11} . Dla $n = 2$ permutacje e i $(1\ 2)$ dają

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Dla $n = 3$ trzy permutacje parzyste i trzy nieparzyste prowadzą do

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Dwie pomocne konwencje

Wyznacznik macierzy jednostkowej wynosi 1: jedyny niezerowy składnik wzoru Leibniza pochodzi od identyczności.

Przyjmujemy też, że wyznacznik pustej macierzy 0×0 jest równy 1. Dzięki temu wzory na minory i macierz dołączoną obejmują również stopień 1.

Definicja dotyczy macierzy kwadratowych. Dla macierzy prostokątnej można rozpatrywać wyznaczniki jej kwadratowych podmacierzy, lecz nie wyznacznik całej macierzy w powyższym sensie.

6.2 Reguła Sarrusa i macierze rzadkie

Reguła Sarrusa jest sposobem zapamiętania sześciu składników dla 3×3 . Dopisujemy dwie pierwsze kolumny. Trzy iloczyny po przekątnych biegnących w dół w prawo dodajemy, a trzy biegnące w dół w lewo odejmujemy.

Przykład 6.2. Wyznacznik macierzy stopnia 3

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1	2	0	1	2	
0	1	1	0	1	
2	0	1	2	0	
					iloczyny dodawane

1	2	0	1	2	
0	1	1	0	1	
2	0	1	2	0	
					iloczyny odejmowane

$$\det A = (1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0) - (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1) = 5.$$

Do tej macierzy wrócimy przy dopełnieniach algebraicznych i wzorach Cramera.

Zakres reguły

Reguła Sarrusa działa dla macierzy 3×3 . Dopisanie kolumn do macierzy większego stopnia nie daje analogicznego wzoru: na przykład dla 4×4 wzór Leibniza zawiera 24 składniki.

Przykład 6.3. Tylko jeden niezerowy składnik

Dla macierzy

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

jedyny niezerowy wybór odpowiada ciągowi $(2, 4, 1, 3)$. Ma on trzy inwersje, zatem znak wynosi -1 . Stąd

$$\det B = (-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

WYKŁAD 14 Własności i zastosowania wyznacznika

7 Wieloliniowość i alternowanie

Definicja 7.1. Funkcja $D: V^n \rightarrow \mathbb{K}$ jest wieloliniowa, jeśli jest liniowa w każdym argumencie przy ustalonych pozostałych argumentach:

$$D(\dots, u + \lambda v, \dots) = D(\dots, u, \dots) + \lambda D(\dots, v, \dots).$$

Kropki oznaczają te same, niezmienione argumenty po obu stronach. Z wieloliniowości wynikają

$$D(\dots, 0, \dots) = 0, \quad D(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) = \lambda^n D(v_1, \dots, v_n).$$

Przykład 7.1. Wieloliniowość nie jest liniowością wszystkich zmiennych naraz

Funkcja $D(x, y, z) = 2xyz$ nad $\mathbb{R}$ jest trójliniowa: przy ustalonych y, z jest liniowa w x , i analogicznie dla innych zmiennych. Jednak $D(2x, 2y, 2z) = 8D(x, y, z)$. Jako funkcja jednej zmiennej wektorowej (x, y, z) nie jest więc liniowa.

Definicja 7.2. Funkcja D jest **alternująca**, jeśli jest równa zero zawsze, gdy dwa jej argumenty są równe. Jest **antysymetryczna**, jeśli zamiana dwóch argumentów zmienia jej wartość na przeciwną.

Alternowanie i wieloliniowość implikują antisymetrię. Rozwijając w dwóch wybranych miejscach, dostajemy

$$\begin{aligned} 0 &= D(\dots, u + v, \dots, u + v, \dots) \\ &= D(\dots, u, \dots, v, \dots) + D(\dots, v, \dots, u, \dots), \end{aligned}$$

bo dwa pozostałe składniki mają powtórzony argument. To jest dokładnie zmiana znaku przy zamianie.

Jeżeli $1 + 1 \neq 0$ w $\mathbb{K}$, zachodzi też implikacja odwrotna: z antisymetrii mamy $D(\dots, v, \dots, v, \dots) = -D(\dots, v, \dots, v, \dots)$, czyli $2D = 0$ i w konsekwencji $D = 0$.

Ciało charakterystyki 2

Gdy $1 + 1 = 0$, samo równanie $D = -D$ nie wymusza $D = 0$. Na przykład $D(x, y) = xy$ nad $\mathbb{F}_2$ jest dwuliniowe i antisymetryczne w tym sensie, ale $D(1, 1) = 1$. Warunek alternowania działa nad każdym ciałem i właśnie jego używamy w ogólnych twierdzeniach o wyznaczniku.

7.1 Własności wynikające ze wzoru Leibniza

Twierdzenie 7.3. Wyznacznik jest wieloliniową, alternującą funkcją wierszy oraz spełnia $\det I_n = 1$. Te same własności ma jako funkcja kolumn.

Dowód. Wieloliniowość w wierszach. W każdym iloczynie wzoru Leibniza występuje dokładnie jeden element ustalonego wiersza. Podstawienie $R_i = u + \lambda v$ rozбивa każdy składnik na dwa, dając sumę wyznaczników z wierszami u i λv .

Alternowanie. Jeśli wiersze $i \neq j$ są równe, łączymy permutację σ w parę z $\sigma(i \ j)$. Ich iloczyn elementów macierzy są równe, a znaki przeciwne. Żadna permutacja nie jest sparowana sama ze sobą. Każda para sumuje się do zera, więc cały wyznacznik jest zerowy. Argument pozostaje prawdziwy w charakterystyce 2.

Normalizacja. Dla I_n jedyny niezerowy składnik pochodzi od e i wynosi 1. Własności dla kolumn wynikną z poniższej równości $\det A^T = \det A$. $\square$

Twierdzenie 7.4 (Transpozycja). Dla każdej macierzy kwadratowej A zachodzi $\det A^T = \det A$.

Dowód. Stosujemy wzór Leibniza, a następnie podstawiamy $j = \sigma(i)$ oraz $\rho = \sigma^{-1}$:

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{j, \sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn} \rho \prod_{j=1}^n a_{j, \rho(j)} = \det A. \end{aligned}$$

Przejsie do odwrotności przebiega wszystkie permutacje dokładnie raz i nie zmienia ich znaków. $\square$

Symetria metod wierszowych i kolumnowych

Każdy wzór opisujący wpływ operacji na wierszach ma odpowiednik dla kolumn. Możemy wybierać tę stronę, która upraszcza obliczenia. Nie łączymy jednak dowolnych zmian wierszy i kolumn bez śledzenia ich wpływu na wartość wyznacznika.

8 Operacje elementarne i eliminacja

Z wieloliniowości i alternowania otrzymujemy reguły:

Operacja na A prowadząca do B	Nowy wyznacznik
$R_i \leftrightarrow R_j, i \neq j$	$\det B = -\det A$
$R_i \leftarrow \lambda R_i$	$\det B = \lambda \det A$
$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j, i \neq j$	$\det B = \det A$

Te same reguły obowiązują dla kolumn. Trzeci wzór wynika z rozwinięcia względem zmienianego wiersza: drugi składnik ma dwa jednakowe wiersze, więc znika. Wiersz zerowy, dwa równe wiersze albo dwa proporcjonalne wiersze powodują zerowanie wyznacznika.

Skalowanie jednego wiersza i całej macierzy

Skalar wyciągnięty z jednego wiersza pojawia się raz. Ponieważ macierz λA ma przeskalowane wszystkie n wierszy,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Przykład 8.1. Wyznacznik nie jest funkcją liniową macierzy

Dla $A = B = I_2$ mamy

$$\det(A + B) = \det(2I_2) = 4, \quad \det A + \det B = 2.$$

Wieloliniowość dotyczy pojedynczego wiersza lub kolumny przy ustalonych pozostałych, a nie dodawania całych macierzy.

Twierdzenie 8.1 (Macierz trójkątna). Jeśli U jest górno-lub dolnotrójkątna, to

$$\det U = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn}.$$

Dowód. Dla macierzy górnortrójkątnej niezerowy składnik wzoru Leibniza może wystąpić tylko wtedy, gdy $\sigma(i) \geq i$ dla każdego i . Jednocześnie $\sum_i \sigma(i) = \sum_i i$, więc wszystkie te nierówności muszą być równościami. Pozostaje wyłącznie składnik identyczności. Przypadek dolnotrójkątny wynika z transpozycji. $\square$

W praktyce sprowadzamy macierz do postaci trójkątnej, zapisując liczbę zamian i wszystkie skale. Jeśli używamy tylko dodawania wielokrotności innych wierszy oraz s zamian, to $\det A = (-1)^s \prod_i u_{ii}$.

8.1 Pełny rachunek z kontrolą znaków i skal

Przykład 8.2. Wyznacznik macierzy 4×4 metodą eliminacji

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Zamiana wierszy

Zamieniamy R_1 i R_2 , co mnoży wyznacznik przez -1 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det B = -\det A.$$

2. Zerowanie pierwszej kolumny

Wykonujemy $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ i $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det C = \det B.$$

3. Skalowanie drugiego wiersza i dalsza eliminacja

Mnożymy R_2 przez $1/2$, a potem wykonujemy $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$ i $R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det D = \frac{1}{2} \det C.$$

4. Ostatni krok i odzyskanie początkowej wartości

Po $R_4 \leftarrow R_4 - 2R_3$ otrzymujemy

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det U = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$

Łączny wpływ operacji to $\det U = -\frac{1}{2} \det A$. Zatem $\boxed{\det A = -2 \cdot 8 = -16}$.

Wybór wygodnych pivotów

Dzielenie wiersza nie jest konieczne do obliczenia wyznacznika. Jeśli je wykonujemy, zapisujemy czynnik skali od razu. Pozwala to odróżnić wartość wyznacznika bieżącej macierzy od wartości szukanej.

9 Charakteryzacja wyznacznika

Twierdzenie 9.1 (Jednoznaczność z dokładnością do stałej). Niech $D: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ będzie wieloliniową, alternującą funkcją wierszy. Wtedy dla każdej macierzy A zachodzi

$$D(A) = D(I_n) \det A.$$

Dowód. Niech e_j^T oznacza j -ty wiersz macierzy jednostkowej. Wiersz i macierzy A ma postać $R_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j^T$. Rozwijając D kolejno we wszystkich argumentach, dostajemy

$$D(A) = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n \left(\prod_{i=1}^n a_{i,j_i} \right) D(e_{j_1}^T, \dots, e_{j_n}^T).$$

Gdy dwa indeksy j_i się powtarzają, odpowiedni składnik jest zerowy. Pozostałe ciągi indeksów to dokładnie $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ dla $\sigma \in S_n$. Ponieważ zamiana dwóch argumentów zmienia znak,

$$D(e_{\sigma(1)}^T, \dots, e_{\sigma(n)}^T) = \operatorname{sgn} \sigma D(e_1^T, \dots, e_n^T) = \operatorname{sgn} \sigma D(I_n).$$

Zatem

$$D(A) = D(I_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = D(I_n) \det A.$$

□

Trzy własności wyznaczające wyznacznik

Wyznacznik jest jedyną funkcją macierzy, która jest:

1. wieloliniowa względem wierszy;
2. alternująca względem wierszy;
3. równa 1 na macierzy jednostkowej.

Równoważną charakteryzację otrzymujemy, zastępując wiersze kolumnami.

Przykład 9.1. Odtwarzanie nieznanej formy dwuliniowej

Niech $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dwuliniowa i alternująca, a $F((1, 1), (1, -1)) = 6$. Istnieje stała c taka, że $F(u, v) = c \det \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$. Ponieważ

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2, \quad 6 = -2c,$$

otrzymujemy $c = -3$. Stąd

$$F((2, 1), (3, 4)) = -3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3(8 - 3) = -15.$$

10 Minory i rozwinięcie Laplace’a

Definicja 10.1. Niech $A_{\widehat{i},\widehat{j}}$ oznacza macierz uzyskaną przez usunięcie wiersza i i kolumny j z A . Liczbę

$$M_{ij} = \det A_{\widehat{i},\widehat{j}}$$

nazywamy minorem odpowiadającym pozycji (i, j) , a liczbę $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ jej dopełnieniem algebraicznym.

Znaki dopełnień układają się naprzemiennie:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 10.2 (Rozwinięcie Laplace’a). Dla dowolnego ustalonego wiersza i oraz dowolnej ustalonej kolumny j :

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik}C_{ik}, \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj}C_{kj}.$$

Dowód. Ustalmy wiersz i . Zapis $R_i = \sum_j a_{ij}e_j^T$ i wieloliniowość rozbijają wyznacznik na sumę n składników. W składniku odpowiadającym j wiersz i ma jedynkę na pozycji j i zera poza nią.

Przesuwamy ten wiersz na pierwsze miejsce przez $i-1$ zamian sąsiednich wierszy i kolumnę j na pierwsze miejsce przez $j-1$ zamian kolumn. Łączny znak to $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$. Po tym przestawieniu pierwszy wiersz jest równy $(1, 0, \dots, 0)$. We wzorze Leibniza przeżywają tylko wybory pierwszej jedynki, a pozostała suma jest równa M_{ij} . Wkład składnika to więc $a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij} = a_{ij}C_{ij}$. Sumując po j , otrzymujemy rozwinięcie względem wiersza. Wersja kolumnowa wynika z transpozycji. $\square$

Jak wybrać wiersz lub kolumnę?

Najwygodniej rozwijać tam, gdzie jest najwięcej zer. Można najpierw wytworzyć zera przez dodanie wielokrotności innego wiersza lub kolumny; ta operacja nie zmienia wyznacznika.

Minor jest wyznacznikiem mniejszej macierzy, a nie samą tą macierzą. Dopełnienie algebraiczne zawiera dodatkowo znak zależny od pozycji.

10.1 Przykłady rozwinięcia i wyboru minoru

Przykład 10.1. Minor M_{23} i dopełnienie C_{23}

Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ usuwamy drugi wiersz i trzecią kolumnę:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{usuń } R_2, C_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 4.$$

Ujemny minor i ujemny znak pozycji dają dodatnie dopełnienie.

Przykład 10.2. Dwa kolejne rozwinięcia macierzy 4×4

Niech

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

W drugiej kolumnie jedynym niezerowym elementem jest $g_{22} = 4$. Rozwinięcie względem tej kolumny daje

$$\det G = 4(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

W otrzymanej macierzy rozwijamy względem trzeciej kolumny. Jej jedyny niezerowy element, równy 7, leży teraz na pozycji $(2, 3)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7(1 - 4) = 21.$$

Ostatecznie $\boxed{\det G = 4 \cdot 21 = 84}$.

Indeksy po usunięciu wiersza i kolumny

W każdym kolejnym rozwinięciu numerujemy pozycje w aktualnej, mniejszej macierzy. Znak drugiego rozwinięcia wynika z pozycji $(2, 3)$ wewnątrz macierzy 3×3 .

11 Wyznaczniki macierzy blokowych

Twierdzenie 11.1. Jeśli $A \in M_p(\mathbb{K})$, $B \in M_q(\mathbb{K})$ i $C \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$, to

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B.$$

Analogicznie $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det A \det B$ dla $D \in M_{q \times p}(\mathbb{K})$.

Dowód. Ustalamy A, C i traktujemy wyznacznik pierwszej macierzy jako funkcję $F(B)$ wierszy macierzy B . Jest wieloliniowa i alternująca, więc $F(B) = F(I_q) \det B$. Kolejne rozwinięcia względem ostatnich q wierszy macierzy $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ dają $F(I_q) = \det A$. Nie wymaga to odwracalności żadnego bloku. Wersja dolnotrójkątna wynika z transpozycji. $\square$

Przykład 11.1. Blok poza przekątną nie wpływa na wynik

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Liczby 7 i 8 można zastąpić dowolnymi skalarami bez zmiany wartości.

11.1 Bloki ustawione w przeciwnej kolejności

Przesunięcie bloku q kolumn przed blok p kolumn wymaga pq zamian pojedynczych kolumn. Dlatego

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{pq} \det A \det B.$$

Tutaj szerokości dwóch bloków wynoszą odpowiednio q i p , a wysokości p i q . Po zamianie bloków kolumn dostajemy $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Przykład 11.2. Nieparzysta liczba zamian blokowych

Dla $p = 1$, $q = 3$, $A = [2]$, $B = \text{diag}(1, 3, 4)$:

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^3 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 4) = -24.$$

Granice wzoru blokowego

Wzór iloczynowy wymaga zerowego bloku pod albo nad przekątną. Dla ogólnej macierzy $\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$ nie można po prostu pomnożyć wyznaczników bloków diagonalnych.

12 Wyznacznik iloczynu i odwracalność

Twierdzenie 12.1 (Twierdzenie Cauchy’ego–Bineta dla macierzy kwadratowych). Dla $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ zachodzi $\det(AB) = \det A \det B$.

Dowód. Ustalamy B i definiujemy $F(A) = \det(AB)$. Wiersz i iloczynu AB jest równy $R_i(A)B$. Mnożenie przez B jest liniowe, więc F jest wieloliniowa względem wierszy A . Jeśli dwa wiersze A są równe, odpowiednie wiersze AB też są równe; zatem F jest alternująca. Charakterystyka wyznacznika daje

$$F(A) = F(I_n) \det A = \det B \det A.$$

Dowód nie zakłada odwracalności A ani B . □

Konsekwencje

$$\det(A_1 \cdots A_k) = \prod_{j=1}^k \det A_j,$$

$$\det(A^k) = (\det A)^k \quad (k \geq 0),$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \quad (A \text{ odwracalna}),$$

$$\det(S^{-1}AS) = \det A \quad (S \text{ odwracalna}).$$

Dla odwracalnej A wzór na potęgę obowiązuje także dla $k < 0$.

Wzór na odwrotność wynika z $1 = \det I_n = \det A \det(A^{-1})$. Równość $\det(AB) = \det(BA)$ nie wymaga równości macierzy AB i BA .

Twierdzenie 12.2 (Kryterium odwracalności). Dla macierzy $A \in M_n(\mathbb{K})$ równoważne są warunki

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ odwracalna} \iff \text{rank } A = n.$$

Dowód. Jeśli A jest odwracalna, z $\det A \det A^{-1} = 1$ wynika $\det A \neq 0$. Odwrotnie, sprowadźmy A odwracalnymi operacjami wierszowymi do postaci górnotrójkątnej U . Operacje mnożą wyznacznik przez niezerowe czynniki, więc $\det U \neq 0$. Iloczyn elementów diagonalnych jest niezerowy, zatem wszystkie pivoty istnieją i $\text{rank } A = n$. Macierz pełnego rzędu jest odwracalna. □

Równoważnie $\det A = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy kolumny A są liniowo zależne; ten sam warunek dotyczy wierszy i istnienia niezerowego rozwiązania $Ax = 0$.

12.1 Obliczenia na iloczynach i przykład z parametrem

Przykład 12.1. Wyznacznik bez mnożenia macierzy

Niech $P, Q \in M_3(\mathbb{R})$, $\det P = -2$, $\det Q = 3$. Obie macierze są odwracalne. Korzystając z poznanych własności:

$$\begin{aligned}\det(2P^{-1}Q^TP) &= 2^3 \det(P^{-1}) \det(Q^T) \det P \\ &= 8 \cdot \frac{1}{-2} \cdot 3 \cdot (-2) = 24.\end{aligned}$$

Skalar 2 mnoży całą macierz stopnia 3, dlatego pojawia się 2^3 . Podobnie

$$\det(-P^2Q^{-1}) = (-1)^3 (\det P)^2 \frac{1}{\det Q} = -\frac{4}{3}.$$

Przykład 12.2. Kiedy macierz zależna od parametru jest odwracalna?

Rozważmy nad $\mathbb{R}$

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Do pierwszej kolumny dodajemy drugą i trzecią. Następnie wyciągamy czynnik $t+2$ z pierwszej kolumny:

$$\det A(t) = \begin{vmatrix} t+2 & 1 & 1 \\ t+2 & t & 1 \\ t+2 & 1 & t \end{vmatrix} = (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

Jest to zastosowanie wieloliniowości, bez dzielenia przez $t+2$; równość obowiązuje także dla $t = -2$. Odejmując pierwszy wiersz od drugiego i trzeciego, dostajemy

$$\det A(t) = (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = \boxed{(t+2)(t-1)^2}.$$

Macierz jest odwracalna dokładnie dla $t \notin \{-2, 1\}$. W pozostałych przypadkach:

- $t = 1$: wszystkie wiersze są równe i niezerowe, więc rząd wynosi 1, a wymiar jądra 2;
- $t = -2$: suma kolumn jest zerowa, ale minor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ jest niezerowy. Rząd wynosi 2, a jądro to $\text{span}\{(1, 1, 1)^T\}$.

Sam warunek $\det A = 0$ nie rozstrzyga, o ile rząd jest mniejszy od n .

13 Macierz dołączona i wzór na odwrotność

Definicja 13.1. Macierz dołączona do A jest transpozycją macierzy dopełnień algebraicznych:

$$\operatorname{adj} A = (C_{ij})^T = (C_{ji}).$$

Dopełnienie z pozycji (i, j) trafia więc na pozycję (j, i) .

Twierdzenie 13.2. Dla każdej macierzy $A \in M_n(\mathbb{K})$ zachodzą tożsamości

$$A \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A A = (\det A) I_n.$$

Dowód. Element (i, j) iloczynu $A \operatorname{adj} A$ jest równy

$$(A \operatorname{adj} A)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{jk}.$$

Jeśli $i = j$, jest to rozwinięcie Laplace’a względem wiersza i , czyli $\det A$. Jeśli $i \neq j$, zastąpmy w A wiersz j kopią wiersza i . Nowa macierz ma dwa jednakowe wiersze, więc wyznacznik zerowy. Jej dopełnienia w wierszu j są jednak nadal równe C_{jk} , bo przy ich obliczaniu usuwamy właśnie zmieniony wiersz. Rozwinięcie względem niego daje $\sum_k a_{ik} C_{jk} = 0$.

Otrzymaliśmy $(A \operatorname{adj} A)_{ij} = \delta_{ij} \det A$. Analogicznie, rozwijając względem kolumny i zastępując jedną kolumnę kopią innej, uzyskujemy

$$(\operatorname{adj} A A)_{ij} = \sum_{k=1}^n C_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \det A.$$

□

Odwrotność przez dopełnienia algebraiczne

Jeżeli $\det A \neq 0$, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Zatem kolejność działań to: obliczyć minory, uwzględnić znaki, przetransponować macierz dopełnień i podzielić przez wyznacznik.

Tożsamość z macierzą dołączoną obowiązuje również dla macierzy osobliwej; wówczas $A \operatorname{adj} A = 0$, lecz nie można dzielić przez $\det A$. Dla stopnia 1 konwencja $\det(0 \times 0) = 1$ daje $\operatorname{adj}[a] = [1]$.

13.1 Dziewięć dopełnień i pełna odwrotność

Przykład 13.1. Macierz dołączona macierzy 3×3

Ponownie bierzemy $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dla której $\det A = 5$.

1. Wszystkie minory

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & M_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 & M_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 & M_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 & M_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 & M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & M_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

2. Znaki i transpozycja

Stosujemy $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, a następnie transponujemy:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{adj } A = C^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dzielenie przez wyznacznik

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sprawdzenie

Mnożymy macierze przed podzieleniem przez 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Iloczyn w odwrotnej kolejności także wynosi $5I_3$. Na przykład element $(1, 2)$ pierwszego iloczynu to $1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 0$, a element $(2, 2)$ to $0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 5$.

Dobór sposobu odwracania

Wzór z macierzą dołączoną jest wygodny w rachunkach symbolicznych i przy małych macierzach. Przy większych rozmiarach zwykle prościej wykonać eliminację Gaussa–Jordana na $[A \mid I_n]$.

14 Wzory Cramera

Twierdzenie 14.1. Niech $A = [a_1 \ \cdots \ a_n] \in M_n(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$ i $\det A \neq 0$. Macierz $A_j(b)$ powstaje przez zastąpienie kolumny j wektorem b . Układ $Ax = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dowód. Niezerowy wyznacznik gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązania. Z równania $Ax = b$ mamy $b = \sum_{k=1}^n x_k a_k$. Wstawiamy tę sumę do kolumny j i korzystamy z wieloliniowości:

$$\det A_j(b) = \sum_{k=1}^n x_k \det [a_1 \ \cdots \ a_{j-1} \ a_k \ a_{j+1} \ \cdots \ a_n].$$

Dla $k \neq j$ występują dwie równe kolumny, więc składnik jest zerowy. Dla $k = j$ otrzymujemy $x_j \det A$. Stąd $\det A_j(b) = x_j \det A$ i po podzieleniu przez $\det A$ dostajemy wzór. $\square$

Związek z macierzą dołączoną. Z $x = A^{-1}b = (\text{adj } A)b / \det A$ wynika

$$x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^n C_{ij} b_i.$$

Licznik jest rozwinięciem $\det A_j(b)$ względem kolumny j , ponieważ jej zastąpienie nie zmienia dopełnień C_{ij} .

Co robić, gdy wyznacznik jest zerowy?

Wzory Cramera nie rozstrzygają wtedy ogólnie zgodności układu. Należy porównać rzędy A i $[A \mid b]$ lub przeprowadzić eliminację. Nawet zerowanie wszystkich wyznaczników licznikowych nie gwarantuje istnienia rozwiązania.

Przykład 14.1. Wszystkie wyznaczniki zerowe, a układ sprzeczny

Weźmy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zachodzi $\det A = \det A_1(b) = \det A_2(b) = \det A_3(b) = 0$, lecz drugie równanie układu ma postać $0 = 1$. Rząd A wynosi 1, a rząd macierzy rozszerzonej 2.

14.1 Obliczenia i przypadki szczególne parametru

Przykład 14.2. Trzy niewiadome

Rozwiążmy układ z macierzą $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i wektorem $b = (-1, 1, 4)^T$. Wiemy, że $D = \det A = 5$.

Zastępujemy kolejno każdą kolumnę:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2(1 - 4) = 5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 4) - (-1)(0 - 2) = -5,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2(-2) + (-1)(-2) = 10.$$

Stąd $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Sprawdzenie w równaniach: $1 + 2(-1) = -1$, $-1 + 2 = 1$, $2 \cdot 1 + 2 = 4$.

Przykład 14.3. Skracanie wzoru a wyjątkowe wartości parametru

Niech $t \in \mathbb{R}$ i

$$\begin{cases} tx + y = 1, \\ x + ty = 1. \end{cases} \quad D = t^2 - 1, \quad D_1 = D_2 = t - 1.$$

Dla $t \notin \{-1, 1\}$ stosujemy wzory Cramera:

$$x = y = \frac{t - 1}{(t - 1)(t + 1)} = \frac{1}{t + 1}.$$

Dla $t = 1$ oba równania są takie same: $x + y = 1$. Wszystkie rozwiązania to $(x, y) = (s, 1 - s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Dla $t = -1$ równania $-x + y = 1$ i $x - y = 1$ po dodaniu dają $0 = 2$, więc układ jest sprzeczny.

Skrócony wzór $1/(t+1)$ ma wartość dla $t = 1$, ale nie opisuje wtedy wszystkich rozwiązań. Wartości wykluczone przez pierwotny mianownik trzeba zbadać w samym układzie.

15 Zadania utrwalające z rozwiązaniami

Zadanie 1. Cykl, znak i duża potęga

Dla $\pi = (1\ 5\ 2\ 4)(3\ 6)$ wyznacz rząd, znak, odwrotność i π^{2026} .

Rozwiązanie. Rozłączne cykle mają długości 4 i 2, zatem

$$\text{ord}(\pi) = 4, \quad \text{sgn } \pi = (-1)^3(-1) = 1, \quad \pi^{-1} = (1\ 4\ 2\ 5)(3\ 6).$$

Ponieważ $2026 \equiv 2 \pmod{4}$, mamy $\pi^{2026} = \pi^2 = (1\ 2)(5\ 4)$. Cykl $(3\ 6)$ po podniesieniu do parzystej potęgi znika.

Zadanie 2. Macierz trójkątna z parametrem

Zbadaj odwracalność $H(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie. $\det H(t) = t^2(t-2)$, więc macierz jest odwracalna dla $t \notin \{0, 2\}$. Dla $t = 0$ niezależne są kolumny 2 i 3; dla $t = 2$ niezależne są kolumny 1 i 2. W obu przypadkach osobliwych rząd wynosi 2, a wymiar jądra 1.

Zadanie 3. Śledzenie zmian wyznacznika

Macierz $A \in M_5(\mathbb{R})$ ma wyznacznik 3. Zamieniono jej pierwszą i ostatnią kolumnę, trzeci wiersz pomnożono przez -2 , a następnie całą otrzymaną macierz pomnożono przez 2. Oblicz końcowy wyznacznik.

Rozwiązanie. Po zamianie kolumn wyznacznik wynosi -3 . Skalowanie jednego wiersza daje $(-2)(-3) = 6$. Skalowanie całej macierzy stopnia 5 mnoży wynik przez 2^5 , zatem

$$\det B = 2^5 \cdot 6 = 192.$$

Zadanie 4. Pole i orientacja

Wyznacz pole trójkąta o wierzchołkach 0 , $u = (-1, 2)$ i $v = (3, 1)$ oraz orientację pary (u, v) .

Rozwiązanie.

$$\det[u\ v] = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7.$$

Pole równoległoboku wynosi 7, a trójkąta $7/2$. Para (u, v) ma orientację ujemną.

16 Najważniejsze wzory i dobór metody

Permutacje

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)), \quad \text{ord}(\pi) = \text{NWW}(k_1, \dots, k_r),$$

$$\text{sgn } \pi = (-1)^{N(\pi)} = \prod_{j=1}^r (-1)^{k_j-1},$$

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn } \sigma \text{sgn } \tau, \quad \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn } \sigma.$$

k_j są długościami rozłącznych cykli, a $N(\pi)$ liczbą inwersji.

Wyznaczniki i zastosowania

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)},$$

$$\det A^T = \det A, \quad \det(AB) = \det A \det B, \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det A,$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{\widehat{i}, \widehat{j}}, \quad \det A = \sum_j a_{ij} C_{ij} = \sum_i a_{ij} C_{ij},$$

$$\text{adj } A = (C_{ij})^T, \quad A \text{adj } A = \text{adj } A A = (\det A) I_n,$$

$$\det A \neq 0 \implies A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}, \quad x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A}.$$

W rozwinięciu wierszowym ustalamy i , a w kolumnowym j .

Która metoda będzie najkrótsza?

Postać lub cel	Metoda
Stopień 2 lub 3	Wzór $ad - bc$ lub reguła Sarrusa.
Macierz trójkątna	Iloczyn elementów na przekątnej.
Wiele zer w wierszu/kolumnie	Rozwinięcie Laplace'a.
Większa macierz pełna	Eliminacja ze śledzeniem znaków i skal.
Macierz blokowo trójkątna	Iloczyn wyznaczników bloków diagonalnych.
Iloczyn, potęga, odwrotność	Własności wyznacznika bez mnożenia macierzy.
Parametr	Rozkład wyznacznika na czynniki i osobne badanie jego zer.
Pole lub objętość	Wartość bezwzględna wyznacznika; dla trójkąta podziel przez 2, dla czworościanu przez 6.