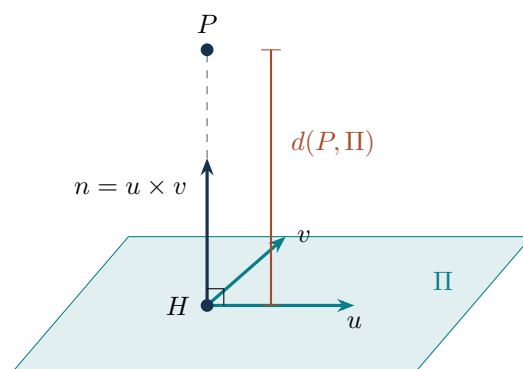


Geometria analityczna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Wykład 15

Przestrzeń afiniczna, iloczyn wektorów,
proste, płaszczyzny i odległości.



$$d(P, \Pi) = \frac{|n \cdot P - d|}{\|n\|}$$

Od wektorów do geometrii

Różnica punktów jest wektorem. Iloczyn skalarny mierzy długości i kąty, iloczyn wektorowy wyznacza normalne i pola, a iloczyn mieszany opisuje objętość i współpłaszczyznowość. Te trzy operacje prowadzą do równań prostych i płaszczyzn oraz wzorów na rzuty i odległości.

Spis treści

1	Punkty, wektory i przestrzeń afiniczna	3
2	Podprzestrzenie afiniczne i układy równań	5
3	Iloczyn skalarny, długości i kąty	6
4	Iloczyn wektorowy i iloczyn mieszany	8
5	Równania płaszczyzn i hiperpłaszczyzn	11
6	Proste w przestrzeni $\mathbb{R}^3$	13
7	Wzajemne położenie prostych i płaszczyzn	14
8	Kąty między prostymi i płaszczyznami	17
9	Rzut na płaszczyznę, odległość i symetria	18
10	Rzut na prostą i odległość od odcinka	20
11	Odległości między prostymi i płaszczyznami	22
12	Sfery, okręgi i przecięcia	24
13	Podstawowe powierzchnie kwadratowe	26
14	Zadania konstrukcyjne w $\mathbb{R}^3$	27
15	Ćwiczenia z pełnymi rozwiązaniami	29
16	Karta wzorów i wybór metody	31

Oznaczenia i konwencje

$\mathbb{K}$ jest ciałem, a V przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Od części dotyczącej iloczynu skalarnego pracujemy nad $\mathbb{R}$. Punkty oznaczamy wielkimi literami, wektory małymi; $Q - P = \overrightarrow{PQ}$. $\text{span}(u_1, \dots, u_k)$ oznacza rozpiętą podprzestrzeń liniową, a $\text{aff}(P_0, \dots, P_k)$ otoczkę afiniczną punktów.

Wzory metryczne w $\mathbb{R}^3$ zapisujemy w **ortonormalnym układzie kartezjańskim**. Iloczyn skalarny oznaczamy $u \cdot v$, normę $\|u\|$, iloczyn wektorowy $u \times v$, a odległość przez d . Wektory kierunkowe prostych i normalne płaszczyzn są zawsze niezerowe.

WYKŁAD 15 Od struktury afinicznej do geometrii euklidesowej

1 Punkty, wektory i przestrzeń afiniczna

Wektor opisuje przesunięcie, lecz nie ma wyróżnionego punktu zaczepienia. Punkt opisuje położenie. W przestrzeni afinicznej można dodać wektor do punktu i odjąć od siebie dwa punkty; dodawanie samych punktów wymaga dodatkowego objaśnienia.

Definicja 1.1. Przestrzeń afiniczna nad $\mathbb{K}$ to niepusty zbiór $\mathcal{A}$, przestrzeń wektorowa V nad $\mathbb{K}$ i działanie $\mathcal{A} \times V \rightarrow \mathcal{A}$, $(P, v) \mapsto P + v$, takie że:

1. $P + 0 = P$ dla każdego $P \in \mathcal{A}$;
2. $(P + u) + v = P + (u + v)$;
3. dla dowolnych $P, Q \in \mathcal{A}$ istnieje dokładnie jeden $v \in V$ taki, że $P + v = Q$.

Wektor z trzeciego warunku oznaczamy $Q - P$, a $\dim \mathcal{A} = \dim V$.

Z definicji wynikają reguły rachunku:

$$P + (Q - P) = Q, \quad Q - P = -(P - Q), \quad (Q - P) + (R - Q) = R - P.$$

Ostatnia równość jest regułą składania kolejnych przemieszczeń. **Translacja** o wektor v to odwzorowanie $t_v(P) = P + v$. Mamy $t_u \circ t_v = t_{u+v}$, $t_0 = \text{id}$ oraz $t_v^{-1} = t_{-v}$.

Przykład 1.1. Rachunek punktów i przesunięć

Niech $P = (1, -2, 0)$, $Q = (3, 1, -1)$ oraz $v = (-1, 2, 3)$. Wtedy

$$Q - P = (2, 3, -1), \quad P + v = (0, 0, 3), \quad Q + v = (2, 3, 2).$$

Wspólna translacja nie zmienia różnicy punktów:

$$(Q + v) - (P + v) = (2, 3, -1) = Q - P.$$

Przesunięcie $P \mapsto Q$ odwracamy, dodając $P - Q = (-2, -3, 1)$.

Początek układu a współrzędne

Wybór punktu O pozwala utożsamić punkt P z wektorem $P - O$. Po wybraniu bazy V otrzymujemy współrzędne. Zmiana początku zmienia współrzędne punktów, lecz nie zmienia wektorów $Q - P$. Sama struktura afiniczna nie wyróżnia odległości ani kątów.

Kombinacje afiniczne i środki figur

Dla środków figur i kombinacji wypukłych zakładamy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sama definicja kombinacji afinicznej działa nad dowolnym ciałem.

Jeśli $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$, definiujemy

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i := O + \sum_{i=0}^k \lambda_i (P_i - O).$$

Wynik nie zależy od wyboru O : zastąpienie O przez $O + w$ daje dodatkowo $w - (\sum_i \lambda_i)w = 0$. Takie wyrażenie nazywamy **kombinacją afiniczną**. Dla współczynników nieujemnych jest to **kombinacja wypukła**.

Środek odcinka PQ to $M = P + \frac{1}{2}(Q - P) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$. Środek ciężkości trójkąta jest równy $G = \frac{1}{3}(A + B + C)$. Punkty $P_0, \dots, P_k$ są **afinicznie niezależne**, gdy wektory $P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0$ są liniowo niezależne. Wtedy współczynniki kombinacji afinicznej punktów P_i są jednoznaczne.

Przykład 1.2. Współrzędne barycentryczne w trójkącie

Niech

$$A = (0, 1, 0), \quad B = (1, 3, 0), \quad C = (0, 4, 1).$$

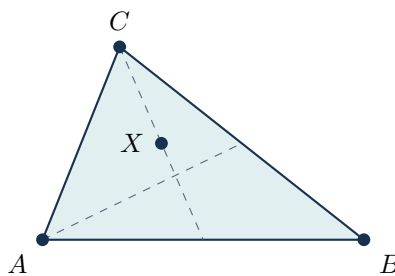
Wektory $u = B - A = (1, 2, 0)$ i $v = C - A = (0, 3, 1)$ są niezależne. Każdy punkt płaszczyzny trójkąta zapisujemy jednoznacznie jako

$$X = A + s(B - A) + t(C - A) = (1 - s - t)A + sB + tC.$$

Punkt należy do trójkąta wraz z brzegiem dokładnie wtedy, gdy $s \geq 0$, $t \geq 0$ i $s + t \leq 1$. Dla $s = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{2}$:

$$X = \left(\frac{1}{4}, 3, \frac{1}{2}\right), \quad (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Wszystkie trzy wagi są dodatnie, więc X leży we wnętrzu trójkąta. Jego środek ciężkości to $G = (\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3})$.



Kombinacja wypukła punktów trójkąta; schemat w jego płaszczyźnie.

Odcinek PQ to zbiór $(1 - t)P + tQ$, $0 \leq t \leq 1$. Ta sama formuła z $t \in \mathbb{R}$ opisuje całą prostą, jeśli $P \neq Q$.

2 Podprzestrzenie afiniczne i układy równań

Definicja 2.1. Jeśli $U \subseteq V$ jest podprzestrzenią liniową, to

$$P + U = \{P + u : u \in U\}$$

jest **podprzestrzenią afiniczną** o przestrzeni kierunkowej U i wymiarze $\dim U$. Wymiar 0 oznacza punkt, 1 prostą, a 2 płaszczyznę.

Punkt bazowy nie jest jednoznaczny: $P + U = Q + U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Q - P \in U$. Najmniejsza podprzestrzeń afiniczna zawierająca dane punkty to

$$\text{aff}(P_0, \dots, P_k) = P_0 + \text{span}(P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0).$$

Jej wymiar jest rangą macierzy z kolumnami $P_i - P_0$. W szczególności trzy punkty wyznaczają jedną płaszczyznę dokładnie wtedy, gdy nie są współliniowe.

Twierdzenie 2.2. Jeśli układ $Ax = b$ ma rozwiązanie x_0 , to jego zbiór rozwiązań wynosi

$$\{x : Ax = b\} = x_0 + \ker A.$$

Dla macierzy o n kolumnach wymiar tego zbioru jest równy $n - \text{rank } A$.

Dowód. $Ax = b = Ax_0$ jest równoważne $A(x - x_0) = 0$, czyli $x - x_0 \in \ker A$. Wymiar wynika z twierdzenia o rzędzie i jądrze. $\square$

Przykład 2.1. Prosta jako zbiór rozwiązań dwóch równań

Rozwiążmy

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 3. \end{cases}$$

Odjęcie drugiego równania od pierwszego daje $2y = -2$, więc $y = -1$. Po podstawieniu $x + z = 2$. Przyjmując $z = -t$, dostajemy

$$(x, y, z) = (2, -1, 0) + t(1, 0, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Macierz ma dwa niezależne wiersze, zatem rząd 2 i jądro wymiaru 1. Rozwiązaniem szczególnym jest $(2, -1, 0)$, a jądro jest rozpięte przez $(1, 0, -1)$.

Uwaga

Układ sprzeczny ma pusty zbiór rozwiązań. Przy przyjętej definicji przestrzeni afinicznej jest niepusta, więc wymiaru powyższego zbioru nie obliczamy jako $n - \text{rank } A$, dopóki nie sprawdzimy zgodności układu.

3 Iloczyn skalarny, długości i kąty

Definicja 3.1. Iloczyn skalarny na rzeczywistej przestrzeni V jest funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, która jest dwuliniowa, symetryczna i dodatnio określona:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \langle u, u \rangle \geq 0, \quad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0.$$

Przestrzeń afiniczna z takim iloczynem na przestrzeni kierunkowej jest **afiniczną przestrzenią euklidesową**.

W standardowym układzie w $\mathbb{R}^n$:

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \|u\| = \sqrt{u \cdot u}, \quad d(P, Q) = \|Q - P\|.$$

Wartość $u \cdot v$ może być ujemna. Dodatnia określoność dotyczy $u \cdot u$, a nie wszystkich par różnych wektorów.

Twierdzenie 3.2 (Nierówność Cauchy'ego–Schwarza). Dla $u, v \in V$ zachodzi $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$. Równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy wektory są liniowo zależne.

Dowód. Dla $v = 0$ teza jest oczywista. Dla $v \neq 0$ przyjmujemy $\lambda = (u \cdot v) / \|v\|^2$. Wówczas

$$0 \leq \|u - \lambda v\|^2 = \|u\|^2 - \frac{(u \cdot v)^2}{\|v\|^2}.$$

Po przemnożeniu przez $\|v\|^2$ otrzymujemy tezę. Równość oznacza $u - \lambda v = 0$, czyli zależność liniową. $\square$

Stąd wynika nierówność trójkąta:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Zatem d jest metryką: jest nieujemna, symetryczna, zeruje się tylko dla identycznych punktów i spełnia $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

Kąt wektorów i prostopadłość

Dla $u, v \neq 0$ jedyny kąt $\theta \in [0, \pi]$ określa równość

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

$u \perp v$ oznacza $u \cdot v = 0$. Wektor zerowy jest ortogonalny do każdego wektora, ale kąt z wektorem zerowym nie jest określony.

Rzut wektora i baza ortonormalna

Dla $v \neq 0$ każdy wektor u ma jednoznaczny rozkład

$$u = u_{\parallel} + u_{\perp}, \quad u_{\parallel} = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v, \quad u_{\perp} = u - \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v.$$

Pierwszy składnik jest równoległy do v , a drugi prostopadły do v , bo $u_{\perp} \cdot v = u \cdot v - u \cdot v = 0$. Pierwszy składnik to **rzut ortogonalny wektora u na $\text{span}(v)$** . Twierdzenie Pitagorasa daje $\|u\|^2 = \|u_{\parallel}\|^2 + \|u_{\perp}\|^2$.

Przykład 3.1. Kąt, rzut i ortogonalizacja

Niech $u = (1, 1, 0)$ i $v = (1, 0, 1)$. Obliczamy

$$u \cdot v = 1, \quad \|u\| = \|v\| = \sqrt{2}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Rzut v na kierunek u i składnik prostopadły to

$$v_{\parallel} = \frac{1}{2}(1, 1, 0), \quad v_{\perp} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Normalizujemy oba prostopadłe kierunki:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2).$$

Rzeczywiście $e_1 \cdot e_2 = (1 - 1 + 0)/\sqrt{12} = 0$ i $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$. Jest to baza ortonormalna płaszczyzny liniowej $\text{span}(u, v)$.

Proces Grama–Schmidta

Dla niezależnych $v_1, \dots, v_k$ kolejno definiujemy

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} (v_j \cdot e_i) e_i, \quad e_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}.$$

Wektory w_j są niezerowe dzięki niezależności danych wektorów. Otrzymujemy bazę ortonormalną tej samej podprzestrzeni.

Jeśli $e_1, \dots, e_k$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni U , to

$$\text{proj}_U u = \sum_{i=1}^k (u \cdot e_i) e_i.$$

W bazie nieortonormalnej standardowa suma iloczynów współrzędnych nie musi być iloczynem skalarnym: stosuje się macierz Grama $G = (b_i \cdot b_j)$ i wzór $u \cdot v = [u]_{\mathcal{B}}^T G [v]_{\mathcal{B}}$.

4 Iloczyn wektorowy i iloczyn mieszany

Ustalamy standardową orientację $\mathbb{R}^3$: uporządkowana baza (e_1, e_2, e_3) jest prawoskrętna. Iloczyn wektorowy, w przeciwieństwie do skalarnego, ma jako wynik **wektor**.

Definicja 4.1. Dla $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$ przyjmujemy

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Wzór można zapamiętać jako formalne rozwinięcie względem pierwszego wiersza:

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3.$$

Jest to zapis pomocniczy: pierwszy wiersz zawiera wektory, więc nie jest to zwykły wyznacznik macierzy o elementach liczbowych.

Przykład 4.1. Obliczenie normalnej krok po kroku

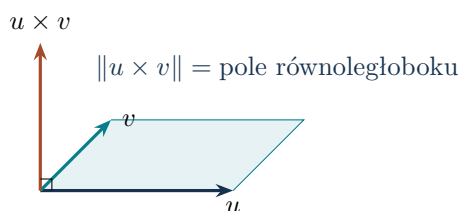
Dla $u = (1, 2, 0)$ i $v = (0, 3, 1)$ dostajemy

$$u \times v = (2 \cdot 1 - 0 \cdot 3, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0) = (2, -1, 3).$$

Kontrola prostopadłości daje

$$(2, -1, 3) \cdot (1, 2, 0) = 2 - 2 = 0, \quad (2, -1, 3) \cdot (0, 3, 1) = -3 + 3 = 0.$$

Zmiana kolejności czynników zmienia zwrot: $v \times u = (-2, 1, -3)$.



Iloczyn wektorowy jest normalny do płaszczyzny czynników. Zwrot określa reguła prawej dłoni od u do v .

Własności i znaczenie długości iloczynu wektorowego

Bezpośrednio z definicji wynikają dwuliniowość i antysymetria:

$$\begin{aligned}(au + bv) \times w &= a(u \times w) + b(v \times w), \\ u \times (av + bw) &= a(u \times v) + b(u \times w), \\ u \times v &= -v \times u, \quad u \times u = 0.\end{aligned}$$

Ponadto $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$; po rozwinięciu każdy składnik skraca się z przeciwnym. Na wektorach standardowej bazy:

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2.$$

Twierdzenie 4.2 (Tożsamość Lagrange’a). Dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}^3$ zachodzi

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

Jeżeli oba wektory są niezerowe i tworzą kąt θ , to $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$.

Dowód. Rozwijając prawą stronę pierwszej równości, grupujemy wyrazy parami:

$$\left(\sum_i u_i^2 \right) \left(\sum_i v_i^2 \right) - \left(\sum_i u_i v_i \right)^2 = \sum_{i < j} (u_i v_j - u_j v_i)^2 = \|u \times v\|^2.$$

Druga równość wynika z $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ i $\sin \theta \geq 0$ dla $0 \leq \theta \leq \pi$. □

Wysokość równoległoboku przy podstawie u wynosi $\|v\| \sin \theta$, dlatego jego pole to $\|u \times v\|$. Pole trójkąta jest o połowę mniejsze. Ponadto $u \times v = 0$ dokładnie wtedy, gdy u, v są liniowo zależne. Dla niezależnych czynników $u \times v$ wyznacza więc niezerową normalną.

Iloczyn wektorowy nie jest łączny

$e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2$, natomiast $(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0$. Nawiasów nie można pomijać. Użyteczna tożsamość podwójnego iloczynu, otrzymywana przez rozwinięcie współrzędnych, ma postać

$$u \times (v \times w) = v(u \cdot w) - w(u \cdot v).$$

Nie wolno przenosić przemienności mnożenia liczb na iloczyn wektorowy.

W obliczeniach warto sprawdzić zarówno znak drugiej współrzędnej, jak i prostopadłość wyniku do obu czynników. Zmiana orientacji układu zmienia znak iloczynu wektorowego, lecz nie zmienia jego normy.

Iloczyn mieszany, pole i objętość

Iloczyn mieszany trzech wektorów jest liczbą

$$[u, v, w] = (u \times v) \cdot w = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Jest niezmienniczy przy cyklicznej zmianie kolejności: $[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v]$, a zamiana dwóch argumentów zmienia znak. Zerowanie się iloczynu mieszanego oznacza zależność liniową trzech wektorów, czyli ich współpłaszczyznowość po zaczepieniu w jednym punkcie.

Wzory geometryczne

Dla $u = B - A$, $v = C - A$, $w = D - A$:

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \frac{1}{2} \|u \times v\|, \\ V_{\text{równoległoscianu}} &= |[u, v, w]|, \\ V_{ABCD} &= \frac{1}{6} |[u, v, w]|. \end{aligned}$$

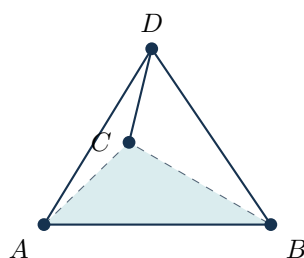
Gdy $u \times v \neq 0$, objętość równoległoscianu to pole podstawy razy wysokość, czyli $\|u \times v\| |w \cdot (u \times v)| / \|u \times v\|$. Dla czworościanu dochodzi czynnik $\frac{1}{2}$ za trójkątną podstawę i $\frac{1}{3}$ ze wzoru na objętość ostrosłupa. Dla zależnych u, v powyższe pole i obie objętości są zerowe.

Przykład 4.2. Trójkąt i czworościan z tych samych danych

Weźmy $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 4, 1)$, $D = (1, 0, 1)$. Wówczas $u = (1, 2, 0)$, $v = (0, 3, 1)$, $w = (1, -1, 1)$ oraz

$$n = u \times v = (2, -1, 3), \quad \|n\| = \sqrt{14}, \quad n \cdot w = 2 + 1 + 3 = 6.$$

Zatem $P_{ABC} = \sqrt{14}/2$, objętość równoległoscianu wynosi 6, a $V_{ABCD} = 1$. Niezerowa objętość potwierdza, że cztery punkty nie leżą w jednej płaszczyźnie.



$$V_{ABCD} = \frac{|(u \times v) \cdot w|}{6}$$

Schemat czworościanu. Kolejność punktów wpływa na znak wyznacznika, ale nie na objętość.

5 Równania płaszczyzn i hiperpłaszczyzn

Płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$ można zapisać parametrycznie:

$$\Pi = P_0 + \text{span}(u, v) = \{P_0 + su + tv : s, t \in \mathbb{R}\},$$

gdzie u, v są niezależne. Wektor $n = u \times v \neq 0$ jest **wektorem normalnym**. Równoważne równania to

$$\boxed{n \cdot (X - P_0) = 0} \quad \text{oraz} \quad \boxed{n \cdot X = d, \quad d = n \cdot P_0}.$$

Równoważność wynika z tego, że $\text{span}(u, v) \subseteq n^\perp$, a obie przestrzenie mają wymiar 2. Dla $n = (a, b, c)$ otrzymujemy równanie ogólne $ax + by + cz = d$, w którym $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Przykład 5.1. Trzy postacie tej samej płaszczyzny

Dane są $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 3, 0)$ i $C = (0, 4, 1)$.

1. Postać parametryczna

$u = B - A = (1, 2, 0)$, $v = C - A = (0, 3, 1)$, więc

$$(x, y, z) = (0, 1, 0) + s(1, 2, 0) + t(0, 3, 1), \quad \begin{cases} x = s, \\ y = 1 + 2s + 3t, \\ z = t. \end{cases}$$

2. Postać z normalną

$n = u \times v = (2, -1, 3)$, zatem

$$(2, -1, 3) \cdot (x, y - 1, z) = 0 \iff 2x - y + 3z = -1.$$

3. Kontrola i powrót do parametrów

Dla A, B, C lewa strona przyjmuje kolejno -1 , $2-3 = -1$, $-4+3 = -1$. Odwrotnie, z $2x - y + 3z = -1$ wynika $y = 1 + 2x + 3z$; przyjmując $s = x$, $t = z$, odzyskujemy parametryzację.

Płaszczyzna przez trzy punkty

Dla niewspółliniowych A, B, C jej równanie można zapisać jako

$$\det \begin{pmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Wyznacznik stwierdza współpłaszczyznowość $X - A, B - A, C - A$. Dla trzech współliniowych punktów to równanie staje się tożsamością $0 = 0$ i nie wyznacza jednej płaszczyzny.

Hiperpłaszczyzny w $\mathbb{R}^n$ i normalna z minorów

Hiperpłaszczyzna to podprzestrzeń afiniczna wymiaru $n-1$. Każda hiperpłaszczyzna w euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ma postać

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a \cdot x = b\}, \quad a \neq 0.$$

Jej przestrzeń kierunkowa jest jądrem niezerowej funkcji liniowej $x \mapsto a \cdot x$, ma więc wymiar $n-1$. Odwrotnie, dla kierunku U wymiaru $n-1$ przestrzeń $U^\perp$ ma wymiar 1 i dostarcza normalnej.

Załóżmy $n \geq 2$ i niech $v_1, \dots, v_{n-1}$ będą niezależne. Zapiszmy je jako wiersze macierzy $B \in M_{(n-1) \times n}(\mathbb{R})$. Przez $B_{\hat{j}}$ oznaczamy macierz po usunięciu kolumny j .

Konstrukcja normalnej

Wektor N o współrzędnych

$$N_j = (-1)^{1+j} \det B_{\hat{j}}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

jest niezerowy i prostopadły do wszystkich v_i . Hiperpłaszczyzna $P_0 + \text{span}(v_1, \dots, v_{n-1})$ ma równanie $N \cdot (x - P_0) = 0$.

Dowód. Rozwinięcie wyznacznika względem pierwszego wiersza daje

$$z \cdot N = \det \begin{pmatrix} z \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dla $z = v_i$ dwa wiersze są równe, więc wyznacznik znika. Ponieważ $\text{rank } B = n-1$, przynajmniej jeden minor stopnia $n-1$ jest niezerowy, zatem $N \neq 0$. $\square$

Przykład 5.2. Normalna w $\mathbb{R}^4$

Dla $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 1)$ mamy

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minory po usunięciu kolejnych kolumn wynoszą $1, -1, 1, 1$. Po uwzględnieniu znaków $+, -, +, -$ otrzymujemy $N = (1, 1, 1, -1)$. Dla $P_0 = (0, 0, 0, 2)$ równanie brzmi

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2.$$

Każdy z trzech wektorów kierunkowych daje w iloczynie z N wartość 0.

Konstrukcja używa $n-1$ argumentów. Nie jest wielokrotnym stosowaniem binarnego iloczynu wektorowego z $\mathbb{R}^3$.

6 Proste w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Prosta przechodząca przez P o wektorze kierunkowym $u \neq 0$ ma postać

$$L = P + \mathbb{R}u, \quad X = P + tu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dwa różne punkty P, Q dają kierunek $u = Q - P$. Zamiana u na λu , $\lambda \neq 0$, zmienia parametr, lecz nie zmienia prostej. Dla $P = (p_1, p_2, p_3)$ otrzymujemy równania parametryczne

$$x = p_1 + tu_1, \quad y = p_2 + tu_2, \quad z = p_3 + tu_3.$$

Jeżeli wszystkie u_i są niezerowe, równoważna postać symetryczna to

$$\frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_3}{u_3}.$$

Dla $u_i = 0$ odpowiednia współrzędna jest stała: $x_i = p_i$. Nie dzielimy przez zerową składową wektora kierunkowego.

Przykład 6.1. Prosta przez dwa punkty i jako przecięcie płaszczyzn

Niech $P = (2, -1, 0)$, $Q = (3, -1, -1)$. Wtedy $u = Q - P = (1, 0, -1)$ i

$$L : (x, y, z) = (2, -1, 0) + t(1, 0, -1).$$

Postać symetryczna ma tylko dwie części ułamkowe:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{z}{-1}, \quad y = -1.$$

Ta sama prosta jest przecięciem płaszczyzn

$$x + y + z = 1, \quad x - y + z = 3.$$

Ich normalne $n_1 = (1, 1, 1)$ i $n_2 = (1, -1, 1)$ spełniają $n_1 \times n_2 = (2, 0, -2) = 2u$. Kierunek przecięcia jest prostopadły do obu normalnych. Punkt P spełnia oba równania.

Aby sprawdzić punkt $(5, -1, -3)$, wyznaczamy z $x = 2 + t$ parametr $t = 3$. Pozostałe równania dają $y = -1$ i $z = -3$, więc punkt leży na prostej. Punkt $(5, 0, -3)$ nie leży na niej, ponieważ ma niewłaściwą współrzędną y .

Dwie płaszczyzny jako opis prostej

Jeżeli normalne n_1, n_2 są niezależne, układ $n_1 \cdot X = d_1$, $n_2 \cdot X = d_2$ opisuje prostą. Jej kierunek to $n_1 \times n_2$, a punkt bazowy znajdujemy, rozwiązując układ. Dwa niezależne równania mają rząd 2 i są w tym przypadku zgodne dla dowolnych prawych stron.

Jedno niezerowe równanie liniowe w trzech niewiadomych opisuje płaszczyznę, nie prostą. Do opisanie prostej w postaci układu potrzeba dwóch niezależnych warunków liniowych.

7 Wzajemne położenie prostych i płaszczyzn

Prosta i płaszczyzna

Niech $L = P + \mathbb{R}u$ oraz $\Pi = \{X : n \cdot X = d\}$. Podstawienie parametryzacji prostej do równania płaszczyzny daje jedno równanie:

$$n \cdot (P + tu) = d \iff t(n \cdot u) = d - n \cdot P.$$

Trzy możliwości

1. $n \cdot u \neq 0$: jeden punkt przecięcia, dla $t = \frac{d - n \cdot P}{n \cdot u}$.
2. $n \cdot u = 0$ i $n \cdot P = d$: cała prosta leży w płaszczyźnie.
3. $n \cdot u = 0$ i $n \cdot P \neq d$: prosta jest równoległa do płaszczyzny i nie ma z nią punktów wspólnych.

Warunek $n \cdot u = 0$ mówi o równoległości *kierunku* prostej do płaszczyzny. Aby rozróżnić zawieranie od braku przecięcia, trzeba jeszcze zbadać położenie punktu P .

Przykład 7.1. Wszystkie przypadki dla jednej płaszczyzny

Ustalmy $\Pi : 2x - y + 3z = -1$, czyli $n = (2, -1, 3)$, $d = -1$.

Prosta przecinająca płaszczyznę

Dla $L_1 : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ mamy $n \cdot u = 4$, $n \cdot P = 2$. Stąd

$$t = \frac{-1 - 2}{4} = -\frac{3}{4}, \quad L_1 \cap \Pi = \left\{ \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} \right) \right\}.$$

Sprawdzenie: $2(\frac{1}{4}) - (-\frac{3}{4}) + 3(-\frac{3}{4}) = -1$.

Prosta zawarta w płaszczyźnie

Dla $L_2 = (0, 1, 0) + \mathbb{R}(1, 2, 0)$ otrzymujemy $n \cdot (1, 2, 0) = 0$ i $n \cdot (0, 1, 0) = -1$. Każdy punkt L_2 leży w Π .

Prosta równoległa, rozłączna z płaszczyzną

Dla $L_3 = (1, 0, 1) + \mathbb{R}(1, 2, 0)$ kierunek znów daje iloczyn skalarny 0, lecz $n \cdot (1, 0, 1) = 5 \neq -1$. Układ jest sprzeczny.

Prosta prostopadła do płaszczyzny

Jest to prosta o kierunku równoległym do normalnej: $u = \lambda n$, $\lambda \neq 0$. Zawsze przecina płaszczyznę w dokładnie jednym punkcie, ponieważ $n \cdot u = \lambda \|n\|^2 \neq 0$.

Dwie płaszczyzny i układy wielu płaszczyzn

Dla $\Pi_1 : n_1 \cdot X = d_1$ i $\Pi_2 : n_2 \cdot X = d_2$ najpierw sprawdzamy zależność normalnych.

- Jeśli $n_1 \times n_2 \neq 0$, płaszczyzny przecinają się w prostej o kierunku $n_1 \times n_2$.
- Jeśli $n_2 = \lambda n_1$, $\lambda \neq 0$, oraz $d_2 = \lambda d_1$, płaszczyzny są identyczne.
- Jeśli $n_2 = \lambda n_1$, ale $d_2 \neq \lambda d_1$, płaszczyzny są równoległe i rozłączne.

Porównujemy te same współczynniki proporcjonalności po obu stronach równań. Samo porównanie liczb d_1, d_2 nie wystarcza.

Przykład 7.2. Normalne proporcjonalne

Dla $\Pi_1 : 2x - y + 3z = -1$ oraz $\Pi_2 : 4x - 2y + 6z = -2$ drugie równanie jest dwukrotnością pierwszego, więc $\Pi_1 = \Pi_2$. Płaszczyzna $\Pi_3 : 4x - 2y + 6z = 6$ jest do nich równoległa i rozłączna: jej równanie po podzieleniu przez 2 brzmi $2x - y + 3z = 3$.

Kilka płaszczyzn: kryterium rang

Zestaw równań płaszczyzn zapisujemy jako $AX = b$.

warunek	zbiór wspólnych punktów w $\mathbb{R}^3$
$\text{rank } A < \text{rank}[A \mid b]$	zbiór pusty
$\text{rank } A = \text{rank}[A \mid b] = 3$	jeden punkt
$\text{rank } A = \text{rank}[A \mid b] = 2$	prosta
$\text{rank } A = \text{rank}[A \mid b] = 1$	płaszczyzna

Dla trzech płaszczyzn $\det A \neq 0$ zapewnia dokładnie jeden punkt wspólny. Dla $\det A = 0$ trzeba zbadać również macierz rozszerzoną.

Przykład 7.3. Przecięcia parami nie zapewniają wspólnego punktu

Płaszczyzny $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ przecinają się parami w prostych równoległych do osi z . Wspólny punkt wszystkich trzech nie istnieje: dwa pierwsze warunki dają $x + y = 0$, sprzecznie z trzecim. Tutaj $\text{rank } A = 2$ i $\text{rank}[A \mid b] = 3$.

Natomiast układ $x + y + z = 1$, $x - y + z = 3$, $z = 0$ ma jedyne rozwiązanie $(2, -1, 0)$. Trzecia płaszczyzna wybiera jeden punkt prostej przecięcia pierwszych dwóch, a rząd macierzy współczynników wynosi 3.

Dwie proste: przecięcie, równoległość i skośność

Niech $L_1 = P + \mathbb{R}u$, $L_2 = Q + \mathbb{R}v$, $w = Q - P$ i $c = u \times v$. Punkt wspólny istnieje dokładnie wtedy, gdy można rozwiązać

$$P + tu = Q + sv \iff tu - sv = w.$$

Pełne kryterium

Warunki	Wzajemne położenie
$c = 0, w \times u = 0$	Proste pokrywają się.
$c = 0, w \times u \neq 0$	Proste są równoległe i różne.
$c \neq 0, w \cdot c = 0$	Proste przecinają się w jednym punkcie.
$c \neq 0, w \cdot c \neq 0$	Proste są skośne.

Przy $c \neq 0$ równość $w \cdot c = 0$ jest równoważna $w \in \text{span}(u, v)$; dlatego układ $tu - sv = w$ ma wtedy dokładnie jedno rozwiązanie. Proste skośne nie są równoległe, nie przecinają się i nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Przykład 7.4. Przecięcie dwóch prostych

Dla $L_1 = (0, 0, 0) + \mathbb{R}(1, 0, 0)$ i $L_2 = (1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 0)$ mamy $c = (0, 0, 1)$, $w = (1, 1, 0)$, więc $w \cdot c = 0$. Równanie $(t, 0, 0) = (1, 1 + s, 0)$ daje $t = 1$, $s = -1$. Jedynym punktem przecięcia jest $(1, 0, 0)$.

Przykład 7.5. Wykrycie prostych skośnych

Rozważmy

$$L_1 = (0, 0, 0) + \mathbb{R}(1, 1, 0), \quad L_2 = (1, 0, 1) + \mathbb{R}(0, 1, 1).$$

Tutaj $c = (1, 1, 0) \times (0, 1, 1) = (1, -1, 1)$ i $w \cdot c = (1, 0, 1) \cdot (1, -1, 1) = 2 \neq 0$. Proste są skośne. Próba rozwiązania $(t, t, 0) = (1, s, 1 + s)$ daje $t = 1$, $s = -1$, a następnie sprzeczne równanie $t = s$.

Uwaga

Brak równoległości nie gwarantuje przecięcia prostych w $\mathbb{R}^3$. To istotna różnica względem geometrii płaszczyzny. Kąt między prostymi skośnymi nadal można określić przez ich kierunki.

8 Kąty między prostymi i płaszczyznami

Kąt między **wektorami** uwzględnia ich zwroty. Prosta nie ma wyróżnionego zwrotu, dlatego dla prostych przyjmujemy mniejszy kąt $\alpha \in [0, \pi/2]$. Analogicznie postępujemy z kątem płaszczyzn.

Trzy wzory na kąty

Dla kierunków prostych u, v i normalnych płaszczyzn n, n_1, n_2 :

$$\text{prosta-prosta:} \quad \cos \alpha = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|},$$

$$\text{płaszczyzna-płaszczyzna:} \quad \cos \beta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\| \|n_2\|},$$

$$\text{prosta-płaszczyzna:} \quad \sin \gamma = \frac{|u \cdot n|}{\|u\| \|n\|}.$$

Wszystkie trzy kąty należą do $[0, \pi/2]$.

Ostatni wzór wynika z tego, że kąt prostej z płaszczyzną jest dopełnieniem do $\pi/2$ mniejszego kąta kierunku prostej z normalną. Gdy kierunek leży w płaszczyźnie, $\gamma = 0$; gdy jest normalny, $\gamma = \pi/2$.

Przykład 8.1. Obliczenia dla trzech par obiektów

Dwie proste

Dla $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ mamy $u \cdot v = 1$, $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$. Zatem $\cos \alpha = 1/2$, czyli $\alpha = \pi/3$. Wynik nie zmienia się po zastąpieniu u przez $-u$.

Dwie płaszczyzny

Dla $x + y + z = 1$ i $x - y + z = 3$ normalne to $(1, 1, 1)$ i $(1, -1, 1)$. Ich iloczyn skalarny wynosi 1, a normy $\sqrt{3}$, więc $\beta = \arccos(1/3)$.

Prosta i płaszczyzna

Dla kierunku $u = (1, 0, -1)$ i płaszczyzny $2x - y + 3z = -1$:

$$u \cdot n = -1, \quad \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{28}}, \quad \gamma = \arcsin \frac{1}{\sqrt{28}}.$$

Warunki prostopadłości

Płaszczyzny są prostopadłe, gdy $n_1 \cdot n_2 = 0$. Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, gdy $u \times n = 0$. Kierunki dwóch prostych są ortogonalne, gdy $u \cdot v = 0$. Jeśli słowo „prostopadłe” zastrzegamy dla prostych przecinających się, trzeba dodatkowo sprawdzić istnienie ich punktu wspólnego.

9 Rzut na płaszczyznę, odległość i symetria

Niech $\Pi : n \cdot X = d$, $n \neq 0$, i niech P będzie dowolnym punktem. Szukamy punktu $H \in \Pi$ takiego, że $P - H$ jest równoległy do n . Zapisujemy $H = P - \lambda n$ i podstawiamy do równania płaszczyzny:

$$n \cdot P - \lambda \|n\|^2 = d \implies \lambda = \frac{n \cdot P - d}{\|n\|^2}.$$

Rzut ortogonalny i odległość

$$H = \text{proj}_{\Pi} P = P - \frac{n \cdot P - d}{\|n\|^2} n, \quad d(P, \Pi) = \frac{|n \cdot P - d|}{\|n\|}.$$

Dla $\Pi : ax + by + cz = d$ i $P = (p_1, p_2, p_3)$:

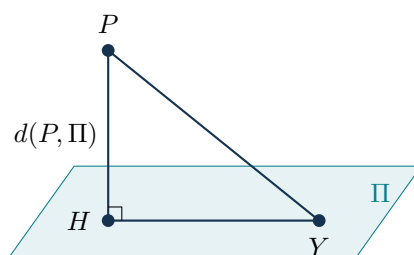
$$d(P, \Pi) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dlaczego otrzymana długość jest najmniejszą odległością?

Dla dowolnego $Y \in \Pi$ wektor $H - Y$ leży w kierunku płaszczyzny, a $P - H$ jest normalny. Są więc prostopadłe i

$$\|P - Y\|^2 = \|P - H\|^2 + \|H - Y\|^2 \geq \|P - H\|^2.$$

Równość zachodzi tylko dla $Y = H$. To dowodzi zarówno minimalności, jak i jednoznaczności rzutu. Dla $P \in \Pi$ otrzymujemy $H = P$ i odległość 0.



Każdy inny odcinek od P do płaszczyzny jest przeciwprostokątną trójkąta o przyprostokątnej PH .

Ten sam dowód i te same wzory działają dla hiperpłaszczyzny w $\mathbb{R}^n$.

Pełny przykład rzutu i odbicia w płaszczyźnie

Przykład 9.1. Punkt $D = (1, 0, 1)$ i płaszczyzna $2x - y + 3z = -1$

Mamy $n = (2, -1, 3)$, $\|n\|^2 = 14$ i $n \cdot D - d = 2 + 3 - (-1) = 6$.

1. Odległość

$$d(D, \Pi) = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}.$$

2. Spodek prostopadłej

$$H = D - \frac{6}{14}n = (1, 0, 1) - \frac{3}{7}(2, -1, 3) = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right).$$

Kontrola przynależności: $2/7 - 3/7 - 6/7 = -1$. Ponadto $D - H = (6/7, -3/7, 9/7) = \frac{3}{7}n$, więc odcinek jest prostopadły do Π .

3. Punkt symetryczny

Punkt D' musi leżeć po drugiej stronie H i w tej samej odległości:

$$D' = 2H - D = \left(-\frac{5}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{11}{7}\right).$$

Wtedy $n \cdot D' - d = -6$, a środek odcinka DD' to dokładnie H .

4. Zgodność z objętością czworościanu

Dla podstawy ABC o polu $\sqrt{14}/2$ i wysokości DH otrzymujemy

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{14}} = 1.$$

Symetria względem płaszczyzny

Odbicie punktu P w płaszczyźnie $n \cdot X = d$ jest dane wzorem

$$S_{\Pi}(P) = P - 2 \frac{n \cdot P - d}{\|n\|^2} n.$$

Punkty płaszczyzny są stałe, składowa równoległa pozostaje bez zmiany, a normalna zmienia znak. Dlatego S_{Π} zachowuje odległości i $S_{\Pi}(S_{\Pi}(P)) = P$.

Odległość zorientowana przy ustalonej normalnej wynosi $\delta(P) = (n \cdot P - d)/\|n\|$. Znak wskazuje jedną z dwóch półprzestrzeni. Po zastąpieniu równania przez $(-n) \cdot X = -d$ znak się odwraca, ale $|\delta(P)|$, rzut i odbicie pozostają takie same.

10 Rzut na prostą i odległość od odcinka

Niech $L = P + \mathbb{R}u$, $u \neq 0$. Szukamy rzutu punktu Q w postaci $H = P + t_0u$. Warunek $Q - H \perp u$ daje

$$(Q - P - t_0u) \cdot u = 0 \implies t_0 = \frac{(Q - P) \cdot u}{\|u\|^2}.$$

Rzut punktu na prostą

$$H = P + \frac{(Q - P) \cdot u}{\|u\|^2}u.$$

Równoważne wzory na odległość:

$$\begin{aligned} d(Q, L) &= \|Q - H\|, \\ d(Q, L)^2 &= \|Q - P\|^2 - \frac{((Q - P) \cdot u)^2}{\|u\|^2}, \\ d(Q, L) &= \frac{\|(Q - P) \times u\|}{\|u\|} \quad (\text{w } \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

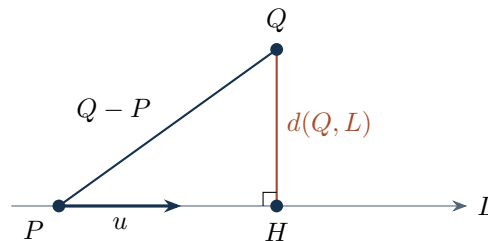
Pierwsze dwa wzory działają w dowolnej przestrzeni euklidesowej. Trzeci wynika z tożsamości Lagrange'a; geometrycznie dzielimy pole równoległoboku przez długość jego podstawy.

Minimalność rzutu

Dla $X = P + tu \in L$ mamy $Q - X = (Q - H) + (t_0 - t)u$ z prostopadłymi składnikami. Stąd

$$\|Q - X\|^2 = \|Q - H\|^2 + (t - t_0)^2\|u\|^2.$$

Minimum jest osiągane dokładnie przy $t = t_0$.



Rzut na prostą sprowadza się do rzutu wektora $Q - P$ na jej wektor kierunkowy.

Obliczenia i ograniczenie do odcinka

Przykład 10.1. Rzut na prostą o niejednostkowym kierunku

Niech $L = (2, -1, 0) + \mathbb{R}(1, 0, -1)$ i $Q = (0, 1, 1)$. Oznaczmy $P = (2, -1, 0)$, $u = (1, 0, -1)$ i $w = Q - P = (-2, 2, 1)$.

$$w \cdot u = -3, \quad \|u\|^2 = 2, \quad t_0 = -\frac{3}{2}, \quad H = P - \frac{3}{2}u = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right).$$

Sprawdzamy $Q - H = (-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2})$ i $(Q - H) \cdot u = 0$. Odległość wynosi

$$d(Q, L) = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Ten sam wynik daje iloczyn wektorowy: $w \times u = (-2, -1, -2)$ ma normę 3, więc $d(Q, L) = 3/\sqrt{2}$.

Punkt $Q' = 2H - Q = (1, -3, 2)$ jest obrazem Q przy obrocie o π wokół prostej L . W $\mathbb{R}^3$ takie odwzorowanie, nazywane też symetrią osiową względem prostej, odwraca oba kierunki prostopadłe do osi.

Najbliższy punkt odcinka AB , gdzie $A \neq B$

Najpierw obliczamy parametr rzutu na całą prostą:

$$t_0 = \frac{(Q - A) \cdot (B - A)}{\|B - A\|^2}.$$

Następnie ograniczamy go do przedziału $[0, 1]$:

$$\hat{t} = \min(1, \max(0, t_0)), \quad H = A + \hat{t}(B - A).$$

Dla $t_0 < 0$ najbliższy jest A , dla $t_0 > 1$ najbliższy jest B , a dla $0 \leq t_0 \leq 1$ rzut na prostą leży już na odcinku.

Wynika to z minimalizacji funkcji $\|Q - A - t(B - A)\|^2 = d(Q, \text{prosta } AB)^2 + (t - t_0)^2\|B - A\|^2$ dla $0 \leq t \leq 1$.

Przykład 10.2. Rzut leżący poza odcinkiem

Dla $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 0, 0)$, $Q = (3, 1, 0)$ mamy $t_0 = 6/4 = 3/2 > 1$. Najbliższym punktem odcinka jest więc B i $d(Q, AB) = \sqrt{(3-2)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Odległość od całej prostej AB wynosi 1 i jest mniejsza. Jeśli $A = B$, odcinek jest punktem i liczymy po prostu $\|Q - A\|$.

11 Odległości między prostymi i płaszczyznami

Odległość zbiorów S, T to kres dolny liczb $\|X - Y\|$ dla $X \in S$ i $Y \in T$. Dla niepustych podprzestrzeni afinicznych w $\mathbb{R}^3$ najmniejsza odległość jest osiągnięta. Obiekty przecinające się mają odległość 0.

Dwie proste

Niech $L_1 = P + \mathbb{R}u$, $L_2 = Q + \mathbb{R}v$ i $w = Q - P$.

Wzory dla prostych

$$d(L_1, L_2) = \begin{cases} \frac{|w \cdot (u \times v)|}{\|u \times v\|}, & u \times v \neq 0, \\ \frac{\|w \times u\|}{\|u\|}, & u \times v = 0. \end{cases}$$

Pierwszy wzór obejmuje proste skośne i przecinające się. Drugi obejmuje proste równoległe różne oraz pokrywające się.

Dla nierównoległych prostych każdy wektor łączący ich punkty ma postać $w + sv - tu$. Jego składowa w jednostkowym kierunku $(u \times v)/\|u \times v\|$ jest stała. Wybierając parametry tak, aby pozostałe składowe zniknęły, otrzymujemy najkrótszy odcinek. Dla prostych równoległych wystarczy odległość dowolnego punktu jednej prostej od drugiej.

Prosta i płaszczyzna; dwie płaszczyzny

Dla $L = P + \mathbb{R}u$, $\Pi : n \cdot X = d$ odległość wynosi 0, gdy $n \cdot u \neq 0$. Jeśli $n \cdot u = 0$, wynosi $|n \cdot P - d|/\|n\|$. W szczególności jest zerowa, gdy $L \subseteq \Pi$.

Nierównoległe płaszczyzny mają odległość 0. Równoległe płaszczyzny zapisujemy z **tą samą normalną** jako $n \cdot X = d_1$ i $n \cdot X = d_2$. Wtedy

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\|n\|}.$$

Przykład 11.1. Odległości w przypadkach równoległych

Proste $(0, 0, 0) + \mathbb{R}(1, 0, 0)$ i $(0, 3, 4) + \mathbb{R}(2, 0, 0)$ są równoległe. Dla $w = (0, 3, 4)$ i $u = (1, 0, 0)$ mamy $w \times u = (0, 4, -3)$, więc ich odległość to 5.

Dla $2x - y + 3z = -1$ i $4x - 2y + 6z = 6$ dzielimy drugie równanie przez 2. Odległość wynosi $|3 - (-1)|/\sqrt{14} = 4/\sqrt{14}$.

Najkrótszy odcinek łączący proste skośne

Szukamy $H_1 = P + tu$ i $H_2 = Q + sv$, dla których wektor $\delta = H_2 - H_1 = w + sv - tu$ jest prostopadły do obu kierunków:

$$\begin{cases} t\|u\|^2 - s(u \cdot v) = w \cdot u, \\ -t(u \cdot v) + s\|v\|^2 = -w \cdot v. \end{cases}$$

Wyznacznik tej macierzy to $\|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2 = \|u \times v\|^2 > 0$ dla prostych nierównoległych. Istnieje więc dokładnie jedna para najbliższych punktów. Każdy inny wektor łączący te proste jest sumą δ i wektora z $\text{span}(u, v)$; prostopadłość składników dowodzi minimalności.

Przykład 11.2. Od wzoru na odległość do najbliższych punktów

Weźmy $L_1 = \mathbb{R}(1, 1, 0)$ i $L_2 = (1, 0, 1) + \mathbb{R}(0, 1, 1)$. Mamy $u \times v = (1, -1, 1)$, $w \cdot (u \times v) = 2$, zatem

$$d(L_1, L_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

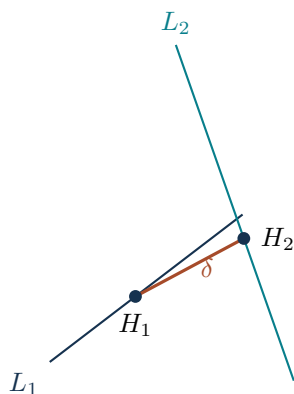
Punkty mają postać $H_1 = (t, t, 0)$, $H_2 = (1, s, 1+s)$. Dla $\delta = (1-t, s-t, 1+s)$ warunki prostopadłości dają

$$1 + s - 2t = 0, \quad 1 + 2s - t = 0.$$

Z pierwszego $s = 2t - 1$. Podstawienie do drugiego daje $3t - 1 = 0$, więc $t = 1/3$, $s = -1/3$. Ostatecznie

$$H_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad H_2 = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad H_2 - H_1 = \frac{2}{3}(1, -1, 1).$$

Norma ostatniego wektora wynosi $2/\sqrt{3}$. Wspólna prostopadła ma równanie $X = H_1 + r(1, -1, 1)$; dla $r = 2/3$ przechodzi przez H_2 .



Rzut przestrzenny obu prostych i odcinka wspólnej prostopadłej. Przecięcie obrazów prostych na rysunku nie oznacza przecięcia w przestrzeni.

12 Sfery, okręgi i przecięcia

Sfera o środku $S = (a, b, c)$ i promieniu $R > 0$ jest zbiorem punktów spełniających

$$\|X - S\| = R \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Kula domknięta obejmuje również wnętrze: $\|X - S\| \leq R$. Nie należy utożsamiać powierzchni sfery z kulą.

Odczytywanie środka przez uzupełnianie kwadratów

Dla równania $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$:

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - \delta.$$

Środek to $S = (-\alpha/2, -\beta/2, -\gamma/2)$, a prawa strona jest R^2 . Jeśli jest dodatnia, otrzymujemy sferę; jeśli zerowa, jeden punkt; jeśli ujemna, zbiór pusty.

Przykład 12.1. Środek, promień i płaszczyzna styczna

Równanie $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ przekształcamy do

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

Zatem $S = (1, -2, 3)$, $R = 3$. Punkt $T = (3, 0, 4)$ leży na sferze, bo $\|T - S\|^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 = 9$. Normalną płaszczyznę stycznej w T jest $T - S = (2, 2, 1)$, więc

$$2(x - 3) + 2y + (z - 4) = 0 \iff 2x + 2y + z = 10.$$

Płaszczyzna styczna w punkcie T sfery

$$(T - S) \cdot (X - T) = 0 \iff (T - S) \cdot (X - S) = R^2.$$

Jeżeli X należy do tej płaszczyzny, to $X - T \perp T - S$ i

$$\|X - S\|^2 = \|X - T\|^2 + R^2.$$

Płaszczyzna ma zatem ze sferą dokładnie jeden punkt wspólny: T .

Odległość środka S od tej płaszczyzny wynosi R . Ogólnie płaszczyzna jest styczna do sfery dokładnie wtedy, gdy jej odległość od środka sfery jest równa promieniowi.

Przecięcie sfery płaszczyzną i prostą

Niech C będzie rzutem środka sfery S na płaszczyznę Π , a $h = \|S - C\|$. Dla $X \in \Pi$ zachodzi $\|X - S\|^2 = \|X - C\|^2 + h^2$. Dlatego przecięcie sfery z płaszczyzną jest:

- okręgiem o środku C i promieniu $\rho = \sqrt{R^2 - h^2}$, gdy $h < R$;
- pojedynczym punktem C , gdy $h = R$;
- zbiorem pustym, gdy $h > R$.

Dla ortonormalnej bazy e, f kierunku płaszczyzny okrąg ma parametryzację

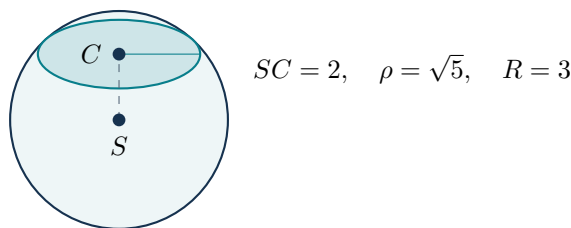
$$X(t) = C + \rho \cos t e + \rho \sin t f, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Okrąg w $\mathbb{R}^3$ można opisać układem równania sfery i równania płaszczyzny.

Przykład 12.2. Okrąg w płaszczyźnie $z = 5$

Dla sfery o $S = (1, -2, 3)$, $R = 3$ mamy $C = (1, -2, 5)$ i $h = 2$. Promień przekroju wynosi $\sqrt{5}$, a parametryzacja to

$$X(t) = (1 + \sqrt{5} \cos t, -2 + \sqrt{5} \sin t, 5).$$



Kołowy przekrój sfery widziany ukośnie ma na rysunku kształt elipsy.

Przecięcie z prostą $X = P + tu$, $u \neq 0$, znajdujemy z równania

$$\|u\|^2 t^2 + 2u \cdot (P - S)t + \|P - S\|^2 - R^2 = 0.$$

Wyróżnik dodatni daje dwa punkty, zerowy punkt styczności, a ujemny brak punktów wspólnych. Dla prostej $(1, -2, 5) + t(1, 0, 0)$ i powyższej sfery dostajemy $t^2 + 4 = 9$, więc punkty $(1 \pm \sqrt{5}, -2, 5)$.

13 Podstawowe powierzchnie kwadratowe

Powierzchnie drugiego stopnia opisują równania kwadratowe we współrzędnych. Poniższe postacie są zapisane w układach kartezjańskich dopasowanych do osi powierzchni; $a, b, c > 0$. Przekroje płaszczyznami współrzędnych pomagają odczytać ich kształt.

Powierzchnia	Równanie	Charakterystyczny przekrój
Elipsoida	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Przy $z = 0$: elipsa.
Hiperboloida jednopowłokowa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Dla każdego z : elipsa.
Hiperboloida dwupowłokowa	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Punkty tylko dla $ z \geq c$.
Stożek eliptyczny	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Przy $z = 0$: wierzchołek.
Paraboloida eliptyczna	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	Przy $y = 0$: parabola.
Paraboloida hiperboliczna	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	Przy $z = 0$: dwie proste.
Walec kołowy	$x^2 + y^2 = R^2, R > 0$	Dla każdego z : okrąg.

Brak zmiennej z w równaniu walca oznacza, że przesunięcie wzdłuż osi z zachowuje powierzchnię. Dodatnie i ujemne znaki przy kwadratach prowadzą do różnych kształtów; nie wystarcza sam stopień równania.

Przykład 13.1. Rozpoznanie elipsoidy po przesunięciu środka

Rozważmy $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 8y - 4z + 5 = 0$. Uzupełniamy kwadraty:

$$(x - 1)^2 - 1 + 4(y + 1)^2 - 4 + (z - 2)^2 - 4 + 5 = 0.$$

Stąd

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + (y + 1)^2 + \frac{(z - 2)^2}{4} = 1.$$

Jest to elipsoida o środku $(1, -1, 2)$ i półosiach długości $2, 1, 2$, równoległych odpowiednio do osi x, y, z . Przekrój $y = -1$ jest okręgiem $(x - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

Jeśli pojawiają się wyrazy xy, xz, yz , samo przesunięcie zwykle nie wystarcza do uzyskania postaci osiowej. Zmiana ortonormalnej bazy pozwala obracać osie bez zmiany długości i kątów.

14 Zadania konstrukcyjne w $\mathbb{R}^3$

Płaszczyzna przez prostą i punkt

Niech $L = P + \mathbb{R}u$ i niech $Q \notin L$. Szukana płaszczyzna ma kierunki u oraz $Q - P$, zatem normalną

$$n = u \times (Q - P) \neq 0, \quad \Pi : n \cdot (X - P) = 0.$$

Jeśli $Q \in L$, iloczyn jest zerowy, a płaszczyzn przez L jest nieskończenie wiele. Warunek „prosta i punkt poza nią” zapewnia jednoznaczność.

Przykład 14.1. Płaszczyzna przez L i $Q = (0, 1, 1)$

Dla $L = (2, -1, 0) + \mathbb{R}(1, 0, -1)$ mamy $P = (2, -1, 0)$, $u = (1, 0, -1)$, $Q - P = (-2, 2, 1)$. Obliczamy

$$n = (1, 0, -1) \times (-2, 2, 1) = (2, 1, 2).$$

Równanie płaszczyzny wynosi

$$2(x - 2) + (y + 1) + 2z = 0 \iff 2x + y + 2z = 3.$$

Punkt Q spełnia je, bo $0 + 1 + 2 = 3$. Dla dowolnego punktu prostej lewa strona jest równa $2(2 + t) - 1 + 2(-t) = 3$.

Płaszczyzna przez prostą, prostopadła do danej płaszczyzny

Jeśli szukana płaszczyzna zawiera kierunek u i jest prostopadła do płaszczyzny o normalnej n_0 , jej normalna m musi spełniać

$$m \cdot u = 0, \quad m \cdot n_0 = 0.$$

Gdy $u \times n_0 \neq 0$, możemy wziąć $m = u \times n_0$. Gdy u jest równoległy do n_0 , te dwa warunki są zależne i każda płaszczyzna zawierająca prostą jest prostopadła do danej.

Przykład 14.2. Warunek zawierania i prostopadłości

Szukamy płaszczyzny przez powyższą prostą L , prostopadłej do $2x - y + 3z = -1$. Liczymy

$$u \times n_0 = (1, 0, -1) \times (2, -1, 3) = (-1, -5, -1).$$

Wybieramy przeciwną normalną $m = (1, 5, 1)$. Równanie to

$$(x - 2) + 5(y + 1) + z = 0 \iff x + 5y + z = -3.$$

Kontrola: $m \cdot u = 1 - 1 = 0$ oraz $m \cdot n_0 = 2 - 5 + 3 = 0$. Podstawienie punktu bazowego daje $2 - 5 = -3$.

Płaszczyzna symetralna i sfera przez cztery punkty

Punkty równoodległe od różnych A, B spełniają $\|X - A\|^2 = \|X - B\|^2$. Po rozwinięciu i skróceniu $\|X\|^2$:

$$2X \cdot (B - A) = \|B\|^2 - \|A\|^2.$$

Jest to płaszczyzna prostopadła do $B - A$, przechodząca przez środek odcinka AB , czyli **płaszczyzna symetralna odcinka**.

Środek sfery przez cztery punkty

Dla afinicznie niezależnych A, B, C, D środek O wyznacza układ liniowy

$$\begin{cases} 2O \cdot (B - A) = \|B\|^2 - \|A\|^2, \\ 2O \cdot (C - A) = \|C\|^2 - \|A\|^2, \\ 2O \cdot (D - A) = \|D\|^2 - \|A\|^2. \end{cases}$$

Niezależność trzech różnic zapewnia jedyne rozwiązanie. Promień obliczamy jako $R = \|O - A\|$.

Przykład 14.3. Sfera opisana na czworościanie

Dla $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 4, 1)$, $D = (1, 0, 1)$ normy kwadratowe to kolejno 1, 10, 17, 2. Otrzymujemy

$$\begin{cases} x_O + 2y_O = 9/2, \\ 3y_O + z_O = 8, \\ x_O - y_O + z_O = 1/2. \end{cases}$$

Z dwóch pierwszych równań $x_O = 9/2 - 2y_O$ i $z_O = 8 - 3y_O$. Po podstawieniu do trzeciego:

$$\frac{9}{2} - 2y_O - y_O + 8 - 3y_O = \frac{1}{2} \implies 6y_O = 12.$$

Zatem $O = (\frac{1}{2}, 2, 2)$, a $R^2 = (\frac{1}{2})^2 + (2 - 1)^2 + 2^2 = 21/4$. Szukana sfera to

$$\left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = \frac{21}{4} \right].$$

Kontrola dla D : $(1 - \frac{1}{2})^2 + (0 - 2)^2 + (1 - 2)^2 = 21/4$. Analogicznie dla B, C otrzymujemy tę samą wartość.

Warunek nieleżenia czterech punktów w jednej płaszczyźnie jest istotny. Dla czterech współpłaszczyznowych punktów układ może być sprzeczny lub mieć wiele rozwiązań; sama liczba punktów nie gwarantuje jednej sfery.

15 Ćwiczenia z pełnymi rozwiązaniami

Ćwiczenie 1. Płaszczyzna i pole trójkąta

Wyznacz płaszczyznę przez $P = (1, 0, 1)$, $Q = (2, 1, 1)$, $R = (1, 1, 2)$ oraz pole trójkąta PQR .

Rozwiązanie. Obliczamy dwa kierunki: $u = Q - P = (1, 1, 0)$, $v = R - P = (0, 1, 1)$. Iloczyn wektorowy to

$$n = u \times v = (1, -1, 1) \neq 0.$$

Punkty nie są współliniowe. Równanie płaszczyzny:

$$(x - 1) - y + (z - 1) = 0 \iff x - y + z = 2.$$

Pole trójkąta wynosi $\frac{1}{2}\|n\| = \sqrt{3}/2$. Możemy je również sprawdzić, używając $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$, $\cos \theta = 1/2$ i $P = \frac{1}{2}\|u\|\|v\|\sin \theta$.

Ćwiczenie 2. Rzut początku układu i jego odbicie

Znajdź rzut punktu $O = (0, 0, 0)$ na płaszczyznę $x - y + z = 2$, odległość od tej płaszczyzny oraz punkt symetryczny do O .

Rozwiązanie. Dla $n = (1, -1, 1)$ mamy $\|n\|^2 = 3$ i $n \cdot O - d = -2$. Zatem

$$H = O - \frac{-2}{3}n = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad d(O, \Pi) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Kontrola: $2/3 - (-2/3) + 2/3 = 2$, więc $H \in \Pi$. Punkt symetryczny to $O' = 2H - O = (4/3, -4/3, 4/3)$. Jego odległość zorientowana ma przeciwny znak: $n \cdot O' - 2 = 4 - 2 = 2$, podczas gdy dla O wynosiła w liczniku -2 .

Ćwiczenie 3. Współpłaszczyznowość z parametrem

Dla jakiego $a \in \mathbb{R}$ punkty $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ i $D = (a, 0, 1)$ są współpłaszczyznowe? Oblicz objętość czworościanu dla pozostałych wartości.

Rozwiązanie. Ponieważ $A = 0$, różnice punktów mają te same współrzędne co B, C, D . Liczymy

$$(B - A) \times (C - A) = (1, -1, 1), \quad [(B - A), (C - A), (D - A)] = a + 1.$$

Współpłaszczyznowość zachodzi dokładnie dla $a = -1$. Wtedy D spełnia równanie płaszczyzny ABC : $x - y + z = 0$. Dla $a \neq -1$ objętość wynosi $V = |a + 1|/6$. Wartość bezwzględna jest konieczna, ponieważ znak wyznacznika opisuje orientację.

Ćwiczenie 4. Sieczna, styczna i prosta rozłączna ze sferą

Zbadaj przecięcie sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ z prostą $L_a = (0, a, 0) + \mathbb{R}(1, 0, 0)$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Punkt prostej to $(t, a, 0)$. Podstawiamy:

$$t^2 + a^2 = 4 \iff t^2 = 4 - a^2.$$

Dla $|a| < 2$ istnieją dwa punkty $(\pm\sqrt{4-a^2}, a, 0)$. Dla $|a| = 2$ prosta jest styczna w $(0, a, 0)$. Dla $|a| > 2$ nie ma punktów wspólnych. Geometryczna kontrola: odległość środka sfery od L_a wynosi $|a|$, a promień jest równy 2.

Ćwiczenie 5. Parametr decydujący o skośności prostych

Zbadaj $L_1 = \mathbb{R}(1, 0, 0)$ i $L_2 = (0, 1, a) + \mathbb{R}(0, 1, 0)$. Wyznacz ich odległość i najbliższe punkty.

Rozwiązanie. Kierunki mają iloczyn wektorowy $(0, 0, 1)$, a wektor między punktami bazowymi to $w = (0, 1, a)$. Iloczyn mieszany wynosi a . Dla $a = 0$ proste przecinają się w $(0, 0, 0)$. Dla $a \neq 0$ są skośne, a odległość to $|a|$.

Dla punktów $(t, 0, 0)$ i $(0, 1 + s, a)$ wektor łączący wynosi $(-t, 1 + s, a)$. Prostopadłość do obu kierunków daje $t = 0, s = -1$. Najbliższe punkty to $(0, 0, 0)$ i $(0, 0, a)$. Dla $a \neq 0$ wspólną prostopadłą jest oś z .

Ćwiczenie 6. Okrąg w ukośnej płaszczyźnie

Opisz i sparametryzuj przecięcie sfery $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$ z płaszczyzną $x + y + z = 0$.

Rozwiązanie. Środek sfery to $S = (1, 1, 1)$, promień $R = 2$, a normalna płaszczyzny to $n = (1, 1, 1)$. Rzut środka:

$$C = S - \frac{n \cdot S}{\|n\|^2} n = (0, 0, 0), \quad h = \sqrt{3}.$$

Przekrój jest okręgiem o promieniu $\rho = \sqrt{4-3} = 1$. Wektory $e = (1, -1, 0)/\sqrt{2}$ oraz $f = (1, 1, -2)/\sqrt{6}$ są jednostkowe, wzajemnie prostopadłe i prostopadłe do n . Parametryzacja to

$$X(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Suma współrzędnych jest zerowa, a $\|X(t)\|^2 = 1$. Dlatego $\|X(t) - S\|^2 = 1 + 3 - 2X(t) \cdot S = 4$, co sprawdza oba równania.

16 Karta wzorów i wybór metody

W tabeli $L = P + \mathbb{R}u$, $\Pi : n \cdot X = d$, $u, n \neq 0$. Dla drugiej prostej piszemy $L_2 = Q + \mathbb{R}v$ i $w = Q - P$.

Wielkość lub obiekt	Wzór / warunek
Iloczyn skalarny	$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
Iloczyn wektorowy	$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$
Normalna płaszczyzny ABC	$(B - A) \times (C - A)$; musi być niezerowa
Pole trójkąta ABC	$\frac{1}{2} \ (B - A) \times (C - A)\ $
Objętość czworościanu	$\frac{1}{6} ((B - A) \times (C - A)) \cdot (D - A) $
Rzut punktu Q na L	$P + \frac{(Q - P) \cdot u}{\ u\ ^2} u$
Odległość punktu od L	$\frac{\ (Q - P) \times u\ }{\ u\ }$
Rzut punktu P na Π	$P - \frac{n \cdot P - d}{\ n\ ^2} n$
Odległość punktu od Π	$\frac{ n \cdot P - d }{\ n\ }$
Odbicie punktu w Π	$P - 2 \frac{n \cdot P - d}{\ n\ ^2} n$
Proste nierównoległe	$d(L, L_2) = \frac{ w \cdot (u \times v) }{\ u \times v\ }$
Proste równoległe	$d(L, L_2) = \frac{\ w \times u\ }{\ u\ }$
Równoległe płaszczyzny	$d(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{ d_2 - d_1 }{\ n\ }$ dla wspólnej normalnej n
Kąt prosta-prosta	$\cos \alpha = u \cdot v / (\ u\ \ v\)$
Kąt prosta-płaszczyzna	$\sin \gamma = u \cdot n / (\ u\ \ n\)$
Kąt płaszczyzna-płaszczyzna	$\cos \beta = n_1 \cdot n_2 / (\ n_1\ \ n_2\)$

Jak rozpocząć rozwiązanie?

1. Wyznacz punkt bazowy i kierunek prostej albo normalną płaszczyzny.
2. Sprawdź niezależność kierunków, równoległość i zgodność równań.
3. Do kątów użyj iloczynu skalarnego; do normalnych i pól wektorowego; do współpłaszczyznowości i objętości mieszanego.
4. Przy odległości wyznacz rzut lub wspólną prostopadłą.
5. Sprawdź wynik przez podstawienie oraz warunek prostopadłości.