

Eliminacja Gaussa

Wykłady 3–4

Teoria, algorytmy i rozwiązane przykłady

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & 0 & * & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

pivoty $\longrightarrow$ zmienne główne $\longrightarrow$ rozwiązania

Od układu równań do pełnego zbioru rozwiązań

Przykłady obliczone krok po kroku, uzasadnienie operacji na wierszach, postać schodkowa i zredukowana, układy z parametrem oraz interpretacje geometryczne. Każdy wynik jest opisany jako pełny zbiór rozwiązań.

Zakres: układy równań liniowych, macierze rozszerzone, eliminacja Gaussa i Gaussa–Jordana, zmienne główne i wolne, układy jednorodne oraz kryteria liczby rozwiązań.

Notatki można czytać kolejno albo korzystać ze spisu treści i końcowego zestawienia wzorów. Rysunki pokazują geometryczny sens najważniejszych pojęć.

Spis treści

1 Po co eliminować niewiadome?	3
2 Zapis układu za pomocą macierzy	4
3 Operacje elementarne na wierszach	5
4 Przykład z jednym rozwiązaniem	6
5 Parametr swobodny i sprzeczność	8
6 Postacie schodkowe i algorytm	10
7 Odczytywanie rozwiązań i ich liczby	12
8 Dlaczego dwa rozwiązania dają całą rodzinę?	14
9 Układy jednorodne i struktura rozwiązań	15
10 Dalsze przykłady obliczeniowe	18
11 Jak zapisać i sprawdzić rozwiązanie?	20
A Zestawienie: algorytm i liczba rozwiązań	21

Oznaczenia i założenia

$\mathbb{K}$ oznacza ciało, np. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub ciało skończone $\mathbb{Z}_p$ dla pierwszej liczby p . Jeżeli nie napisano inaczej, przykłady liczbowe rozwiązujemy nad $\mathbb{R}$.

m jest liczbą równań, n liczbą niewiadomych. Macierz współczynników A ma rozmiar $m \times n$, a macierz rozszerzona $[A \mid b]$ ma rozmiar $m \times (n + 1)$. Symbol R_i oznacza cały i -ty wiersz macierzy rozszerzonej.

Jak korzystać z notatek

Najpierw prześledź cztery przykłady wprowadzające: zadanie o zwierzętach, układ z jednym rozwiązaniem, układ z parametrem swobodnym i układ sprzeczny. Następnie przeczytaj definicje postaci schodkowych i ogólny algorytm. Na końcu wróć do uzupełnień: układów jednorodnych, parametru we współczynnikach oraz rachunków w innych ciałach.

Najważniejsza zasada: po eliminacji najpierw sprawdź, czy nie powstało równanie $0 = c$ z $c \neq 0$. Dopiero w układzie niesprzecznym wprowadzaj parametry dla zmiennych wolnych.

1 Po co eliminować niewiadome?

Przykład 1.1. Kury i koty

Na podwórku jest 10 zwierząt: kury i koty. Łącznie mają 28 nóg. Oznaczmy przez x liczbę kur, a przez y liczbę kotów. Wtedy

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ 2x + 4y = 28. \end{cases}$$

Drugie równanie dzielimy przez 2, a następnie odejmujemy od niego pierwsze:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x + 2y = 14 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 10, \\ y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6, \\ y = 4. \end{cases}$$

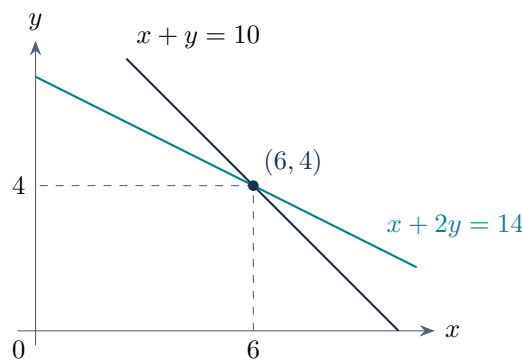
Odpowiedź: 6 kur i 4 koty. Sprawdzenie: $6 + 4 = 10$ oraz $2 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 28$.

1.1 Co oznacza rachunek $28/2 - 10 = 4$?

Liczba $28/2 = 14$ to liczba *par nóg*. Każda kura ma jedną parę, a każdy kot dwie. Gdy od liczby par nóg odejmiemy liczbę zwierząt, od każdej kury zostanie $1 - 1 = 0$, a od każdego kota $2 - 1 = 1$. Różnica jest więc dokładnie liczbą kotów. To ta sama eliminacja, tylko opisana słowami.

1.2 Obraz geometryczny

Każde równanie wyznacza prostą na płaszczyźnie. Rozwiązanie układu jest punktem wspólnym obu prostych.



Eliminacja zachowuje punkt wspólny równań, choć same proste mogą się zmienić.

Celem metody Gaussa jest zastąpienie układu innym układem o *tym samym zbiorze rozwiązań*, z którego łatwiej odczytać niewiadome.

2 Zapis układu za pomocą macierzy

2.1 Układ liniowy i macierz rozszerzona

Ogólny układ m równań liniowych z n niewiadomymi nad $\mathbb{K}$ ma postać

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Współczynniki a_{ij} i wyrazy wolne b_i należą do $\mathbb{K}$. Niewiadome występują w pierwszej potęgze; nie mnożymy ich przez siebie. Rozwiązanie to wektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ spełniający *wszystkie* równania jednocześnie.

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Krótki zapis $Ax = b$ oznacza dokładnie powyższy układ; i -ta współrzędna Ax to $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

2.2 Wiersze, kolumny i indeksy

Formalnie macierz $m \times n$ to funkcja $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}$, przypisująca parze (i, j) element a_{ij} . **Pierwszy indeks wskazuje wiersz, drugi kolumnę.**

Przykład 2.1. Odczytywanie macierzy: uzupełnienie

kolumna $j = 3$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad \text{wiersz } i = 2$$

Macierz ma rozmiar 3×4 . Jej element $a_{23} = 6$, drugi wiersz to $(3, 4, 6, 0)$, a trzecia kolumna to $(2, 6, 1)^T$.

Ważne przy przepisywaniu układu

W macierzy trzeba zachować kolejność niewiadomych i wpisać zera tam, gdzie odpowiednia niewiadoma nie występuje. Kolumna b nie jest kolumną kolejnej niewiadomej. Macierz rozszerzona ma o jedną kolumnę więcej niż A .

3 Operacje elementarne na wierszach

Wykonujemy tylko takie przekształcenia, które można odwrócić. Wszystkie dotyczą *całego wiersza*, łącznie z prawą stroną równania.

Trzy dozwolone operacje

1. **Zamiana wierszy:** $R_i \leftrightarrow R_j$, $i \neq j$.
2. **Mnożenie wiersza:** $R_i \leftarrow \lambda R_i$, gdzie $\lambda \neq 0$.
3. **Dodanie wielokrotności innego wiersza:** $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$, gdzie $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

W trzeciej operacji $\lambda = 0$ jest dozwolone, lecz niczego nie zmienia.

3.1 Dlaczego zbiór rozwiązań się nie zmienia?

Zamiana równań tylko zmienia ich kolejność; jej odwrotnością jest ponowna zamiana. Mnożenie przez niezerowe λ odwracamy, mnożąc przez λ^{-1} .

W trzeciej operacji równanie $L_i(x) = b_i$ zastępujemy równaniem

$$L_i(x) + \lambda L_j(x) = b_i + \lambda b_j,$$

pozostawiając $L_j(x) = b_j$. Każde stare rozwiązanie spełnia nowy układ. Odwrotnie, od nowego równania odejmujemy λ razy niezmiennione równanie j , odzyskując $L_i(x) = b_i$. To dowodzi równoważności w obie strony.

Przykład 3.1. Dlaczego nie mnożymy wiersza przez zero?

Równanie $x = 1$ ma jedno rozwiązanie. Po pomnożeniu obu stron przez zero dostajemy $0 = 0$, które spełnia każde x . Straciliśmy informację i nie możemy jej odzyskać z nowego równania.

3.2 Co znaczy strzałka przy macierzy?

Zapis $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$ oznacza zastąpienie *tylko drugiego* wiersza różnicą jego starej wartości i trzykrotności pierwszego wiersza. Na przykład

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 13 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Nowy wyraz wolny wynosi $13 - 3 \cdot 4 = 1$, tak samo jak pozostałe elementy obliczony z całego wiersza.

Uwaga

W tych notatkach strzałki opisują operacje *na wierszach*, nie na kolumnach. Dowolna operacja na kolumnach może zmienić znaczenie zmiennych i zwykle nie zachowuje tych samych rozwiązań x .

4 Przykład z jednym rozwiązaniem

Przykład 4.1. Eliminacja trzech niewiadomych

Rozwiązujemy

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 9, \\ x - 2y + 3z = 8, \\ 3x - y - z = -1. \end{cases} \quad M_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right].$$

Krok 1. Przygotowanie pierwszego elementu prowadzącego

Dzielimy pierwszy wiersz przez 2:

$$M_0 \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{9}{2} \\ 1 & -2 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right].$$

Krok 2. Usunięcie x z dwóch pozostałych równań

Wykonujemy $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$ i $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -4 & -\frac{29}{2} \end{array} \right].$$

Na przykład trzeci wiersz obliczamy jako

$$(3, -1, -1 \mid -1) - 3(1, -\frac{1}{2}, 1 \mid \frac{9}{2}) = (0, \frac{1}{2}, -4 \mid -\frac{29}{2}).$$

Krok 3. Przygotowanie drugiego pivotu i usunięcie y

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{2}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -4 & -\frac{29}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{40}{3} \end{array} \right].$$

W ostatnim wierszu użyliśmy $-4 + 2/3 = -10/3$ oraz $-29/2 + 7/6 = -40/3$. Otrzymaliśmy postać schodkową: pod kolejnymi elementami prowadzącymi są zera.

Jak dobieramy mnożnik?

Jeżeli pivot wynosi 1, a pod nim znajduje się c , to odejmujemy c razy wiersz pivotu. Nowy element wynosi $c - c \cdot 1 = 0$. W trzecim wierszu powyższego przykładu $c = 3$.

4.1 Podstawianie wsteczne

Ostatnia macierz odpowiada układowi

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + z = \frac{9}{2}, \\ y - \frac{4}{3}z = -\frac{7}{3}, \\ -\frac{10}{3}z = -\frac{40}{3}. \end{cases}$$

Czytamy go od dołu:

$$\begin{aligned} z &= \left(-\frac{40}{3}\right) / \left(-\frac{10}{3}\right) = 4, \\ y &= -\frac{7}{3} + \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{9}{3} = 3, \\ x &= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 - 4 = 2. \end{aligned}$$

Wynik

Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie: $(x, y, z) = (2, 3, 4)$. Każda z trzech niewiadomych została wyznaczona jednoznacznie.

4.2 Alternatywa: eliminacja Gaussa–Jordana

Zamiast podstawiać, można dalej wykonywać operacje na wierszach. Najpierw $R_3 \leftarrow -\frac{3}{10}R_3$, a potem zerowanie nad trzecim pivotem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + \frac{4}{3}R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right].$$

Na koniec zerujemy wyraz nad drugim pivotem:

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right].$$

To zredukowana postać schodkowa. Wynik można odczytać bez podstawiania.

4.3 Sprawdzenie w wyjściowym układzie

$$2 \cdot 2 - 3 + 2 \cdot 4 = 9, \quad 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 8, \quad 3 \cdot 2 - 3 - 4 = -1.$$

Wszystkie trzy równości są spełnione.

Wybór pivota może uprościć rachunki

Można było zacząć od zamiany pierwszych dwóch wierszy, wykorzystując gotową jedynekę przy x . Nie ma jedynej poprawnej kolejności eliminacji. W obu przypadkach rozwiązanie musi być takie samo.

5 Parametr swobodny i sprzeczność

5.1 Układ z nieskończenie wieloma rozwiązaniami

Przykład 5.1. Zamiana wierszy i jedna zmienna wolna

Rozważmy układ

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$$

Pierwszy element macierzy jest zerem, dlatego zaczynamy od zamiany wierszy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array} \right].$$

Następnie normalizujemy pierwszy wiersz i eliminujemy x_1 z trzeciego:

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right].$$

Drugi i trzeci wiersz są takie same. Wykonujemy $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ oraz $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \iff \begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_3 = -\frac{9}{2}, \\ x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Ostatni wiersz oznacza $0 = 0$, więc nie nakłada żadnego nowego warunku. Zmienne x_1, x_2 są główne, a x_3 jest wolna. Przyjmujemy $x_3 = t$:

$$\boxed{x_1 = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}t, \quad x_2 = 5 - t, \quad x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

W zapisie wektorowym zbiór rozwiązań jest prostą w $\mathbb{R}^3$:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.2 Sprawdzenie całej rodziny rozwiązań

Dla dowolnego t trzy lewe strony przyjmują wartości

$$(5 - t) + t = 5, \quad 2\left(-\frac{9}{2} + \frac{3}{2}t\right) + 2(5 - t) - t = 1,$$

$$2\left(-\frac{9}{2} + \frac{3}{2}t\right) + 3(5 - t) = 6.$$

Każde t daje zatem rozwiązanie. Różne t dają różne wektory, bo ich trzecie współrzędne są różne.

5.3 Układ sprzeczny

Przykład 5.2. Ta sama macierz współczynników, inna prawa strona

Zmieńmy wyłącznie trzecie równanie:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$$

Po $R_1 \leftrightarrow R_2$, $R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1$ i $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$ otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right].$$

Teraz $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ oraz $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ dają

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Ostatni wiersz to równanie $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, czyli $0 = 1$. Żaden wektor nie może go spełniać.
Układ nie ma rozwiązań.

5.4 Sprzeczność można również zobaczyć przed eliminacją

Dodajmy pierwsze dwa równania:

$$(x_2 + x_3) + (2x_1 + 2x_2 - x_3) = 5 + 1,$$

czyli $2x_1 + 3x_2 = 6$. Trzecie równanie wymaga równocześnie $2x_1 + 3x_2 = 7$. Odejmując te warunki, otrzymujemy $0 = 1$. Eliminacja systematycznie wykrywa dokładnie taką niezgodność.

Dwa wiersze o zupełnie innym znaczeniu

$$\begin{aligned} [0 \ \cdots \ 0 \mid 0] &\longleftrightarrow 0 = 0 : \text{ warunek zawsze prawdziwy,} \\ [0 \ \cdots \ 0 \mid c], \ c \neq 0 &\longleftrightarrow 0 = c : \text{ sprzeczność.} \end{aligned}$$

Niezerowy wyraz wolny jest problemem tylko w wierszu, w którym *wszystkie współczynniki przy niewiadomych są zerowe*.

5.5 Dlaczego nie wystarczy policzyć zmiennych wolnych?

W obu powyższych przykładach macierz współczynników ma pivoty w dwóch kolumnach. Jednak tylko pierwszy układ jest niesprzeczny. W drugim nie wolno przedstawiać rodziny rozwiązań z parametrem, ignorując ostatni wiersz.

Kolejność odczytywania wyniku: sprawdzenie sprzeczności, wybór zmiennych wolnych, a następnie wyznaczenie zmiennych głównych.

6 Postacie schodkowe i algorytm

6.1 Element prowadzący, czyli pivot

W niezerowym wierszu *element prowadzący* to pierwszy niezerowy element od lewej. W trakcie eliminacji wybrany element prowadzący nazywamy również *pivotem*.

Definicja 6.1 (Postać schodkowa, REF). Macierz ma postać schodkową, jeśli:

1. wszystkie wiersze zerowe są pod wierszami niezerowymi;
2. pivot każdego kolejnego niezerowego wiersza leży w kolumnie o większym numerze niż pivot wiersza poprzedniego;
3. pod każdym pivotem są zera.

Pivoty nie muszą być równe 1, a nad nimi mogą występować liczby niezerowe.

Definicja 6.2 (Zredukowana postać schodkowa, RREF). Macierz ma zredukowaną postać schodkową, jeśli ma postać schodkową, każdy pivot jest równy 1 i jest jedynym niezerowym elementem w swojej kolumnie.

Przykład 6.1. Porównanie postaci schodkowej i zredukowanej

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \mathbf{2} & 4 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{3} & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\text{postać schodkowa}} \longrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\text{postać zredukowana}}.$$

Kolumny główne mają numery 2, 4, 5. Pierwsza kolumna jest zerowa, lecz macierz ma poprawną postać schodkową: schodki nie muszą zaczynać się w pierwszej kolumnie ani przesuwac o dokładnie jedną kolumnę.

Redukcja daje kolejno $x_5 = 2$, $x_4 = 1$ oraz $x_2 + 2x_3 = 2$. Zmienne x_1 i x_3 pozostają wolne.

Dwa sposoby kończenia obliczeń

Gauss: zerujemy pod pivotami, a następnie stosujemy podstawianie wsteczne.

Gauss–Jordan: dodatkowo normalizujemy pivoty i zerujemy nad nimi, uzyskując wynik do bezpośredniego odczytania.

Uwaga

Rozróżniaj postać schodkową całej macierzy $[A \mid b]$ i redukcję tylko jej części współczynnikowej. Pivot w ostatniej kolumnie macierzy rozszerzonej oznacza sprzeczność, a nie nową zmienną główną.

6.2 Algorytm eliminacji Gaussa

Rozpatrujemy $[A \mid b]$. Niech $k = 1$ oznacza pierwszy jeszcze niewykorzystany wiersz. Kolumny współczynników przeglądamy od lewej do prawej, czyli $j = 1, \dots, n$.

1. **Znajdź pivot.** W kolumnie j szukaj wiersza $i \geq k$ z niezerowym elementem a_{ij} . Jeśli taki wiersz nie istnieje, pominię tę kolumnę i przejdź do następnej, nie zmieniając k .
2. **Ustaw go we właściwym miejscu.** Zamień R_i z R_k . Otrzymany element $a_{kj} \neq 0$ jest pivotem.
3. **Wyzeruj elementy pod pivotem.** Dla każdego $i > k$ wykonaj

$$R_i \leftarrow R_i - \frac{a_{ij}}{a_{kj}} R_k.$$

Jeśli najpierw podzielisz R_k przez a_{kj} , wzór upraszcza się do $R_i \leftarrow R_i - a_{ij} R_k$.

4. **Przejdź niżej.** Zwiększ k o 1 i szukaj kolejnego pivotu w następnych kolumnach. Jeśli $k > m$, eliminacja jest zakończona.
5. **Sprawdź końcowe wiersze.** Wiersz $[0 \cdots 0 \mid c]$ z $c \neq 0$ oznacza brak rozwiązań. Jeśli takich wierszy nie ma, wykonaj podstawianie wsteczne albo dalszą redukcję Gaussa–Jordana.

6.3 Dlaczego algorytm zawsze się kończy?

Każdy nowy pivot leży w wierszu niższym i w kolumnie bardziej na prawo. Może więc być ich co najwyżej $\min(m, n)$. Puste kolumny pomijamy, a liczba kolumn również jest skończona.

Po ustaleniu pivotu wszystkie wiersze poniżej mają zera w jego kolumnie. Późniejsze wiersze pivotowe same mają zera w poprzednich kolumnach głównych, więc ich dodawanie nie niszczy już uzyskanych zer. Indukcyjnie otrzymujemy postać schodkową.

6.4 Jak dokończyć redukcję Gaussa–Jordana?

W niesprzecznym układzie przechodź po pivotach od ostatniego do pierwszego. Podziel wiersz przez pivot, a następnie wyzeruj wszystkie elementy nad nim. W rezultacie w każdej kolumnie głównej zostanie jedna jedynka.

Co robimy z zerem w miejscu planowanego pivotu?

Szukamy niezerowego elementu *niżej w tej samej kolumnie*. Jeśli go nie ma, pomijamy kolumnę. Nie dzielimy przez zero i nie kończymy całej eliminacji tylko dlatego, że jedna kolumna jest już zerowa w aktywnych wierszach.

6.5 Uwaga o obliczeniach numerycznych

W rachunkach dokładnych wystarczy dowolny niezerowy pivot. W obliczeniach zmiennoprzecinkowych często wybiera się spośród dostępnych elementów w danej kolumnie ten o największym module. Jest to częściowy wybór elementu głównego, który pomaga ograniczać wpływ zaokrągleń. W ręcznych obliczeniach warto zachowywać ułamki dokładne.

7 Odczytywanie rozwiązań i ich liczby

7.1 Zmienne główne i wolne

Niech niesprzeczny układ ma r pivotów w macierzy współczynników. Zmienne odpowiadające ich kolumnom są *główne*. Pozostałe $n - r$ zmiennych są *wolne*: każda może niezależnie przyjąć dowolną wartość z $\mathbb{K}$.

W postaci zredukowanej równanie pivotowe ma postać

$$x_{p_i} + \sum_{j \in F} c_{ij} x_j = d_i,$$

gdzie p_i jest numerem kolumny głównej, a F zbiorem numerów kolumn wolnych. Po wybraniu $x_j = t_j$ dla $j \in F$ mamy jednoznacznie

$$x_{p_i} = d_i - \sum_{j \in F} c_{ij} t_j.$$

Przykład 7.1. Trzy parametry i pominięta pierwsza kolumna

Założmy, że po redukcji uzyskaliśmy

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Mamy $n = 5$, $r = 2$, zmienne główne x_2, x_4 i wolne x_1, x_3, x_5 . Wybieramy niezależne parametry $x_1 = s$, $x_3 = t$, $x_5 = u$. Odczytujemy

$$x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \quad x_4 + 4x_5 = -2,$$

więc

$$x = (s, 3 - 2t + u, t, -2 - 4u, u)^T, \quad s, t, u \in \mathbb{K}.$$

Równoważnie

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzenie: $(3 - 2t + u) + 2t - u = 3$ oraz $(-2 - 4u) + 4u = -2$. Każdy wybór parametrów daje rozwiązanie i każde rozwiązanie powstaje w ten sposób.

Parametry muszą być niezależne

Nie należy podstawiać jednego wspólnego parametru za wszystkie zmienne wolne, np. $x_1 = x_3 = x_5 = t$. Taki zapis narzuca dodatkowe równości i zwykle opisuje tylko część zbioru rozwiązań. Liczba niezależnych parametrów to $n - r$.

7.2 Rząd macierzy i kryterium zgodności

Liczbę pivotów w postaci schodkowej macierzy A nazywamy jej *rzędem* i oznaczamy $\text{rank } A$. Nie zależy ona od wyborów dokonanych w poprawnej eliminacji. W szczególności $\text{rank } A \leq \min(m, n)$.

Twierdzenie 7.1 (Kryterium Kroneckera–Capellego). Układ $Ax = b$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rank } A = \text{rank}[A \mid b].$$

Jeśli jest niesprzeczny i $r = \text{rank } A$, to ma $n - r$ zmiennych wolnych.

Dowód. Pivot w ostatniej kolumnie macierzy rozszerzonej odpowiada wierszowi $[0 \ \cdots \ 0 \mid c]$, $c \neq 0$. Zwiększa rząd i oznacza sprzeczność. Gdy takiego pivota nie ma, po ustaleniu wszystkich zmiennych wolnych pozostałe niewiadome można wyznaczyć z kolejnych równań, zaczynając od dołu. $\square$

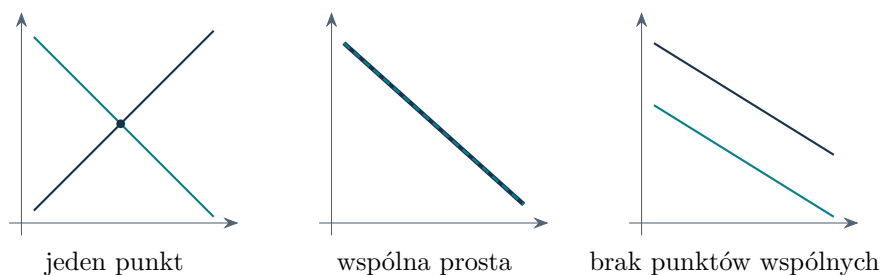
7.3 Klasyfikacja nad ciałem nieskończonym

Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ lub innego ciała nieskończonego:

Warunek po eliminacji	Wniosek
Wiersz $[0 \ \cdots \ 0 \mid c]$, $c \neq 0$	Układ sprzeczny: zero rozwiązań.
Brak sprzeczności i $r = n$	Układ oznaczony: dokładnie jedno rozwiązanie.
Brak sprzeczności i $r < n$	Układ nieoznaczony: nieskończenie wiele rozwiązań.

Sama liczba równań nie wystarcza: część z nich może powtarzać informacje z pozostałych. Decyduje liczba pivotów oraz zgodność prawej strony.

7.4 Trzy obrazy geometryczne w dwóch wymiarach



Dla dwóch właściwych prostych: przecięcie w punkcie, pokrywanie się albo równoległość bez przecięcia.

W większej liczbie wymiarów rozwiązania niesprzecznego układu mogą tworzyć punkt, prostą, płaszczyznę lub przestrzeń afiniczną większego wymiaru.

8 Dlaczego dwa rozwiązania dają całą rodzinę?

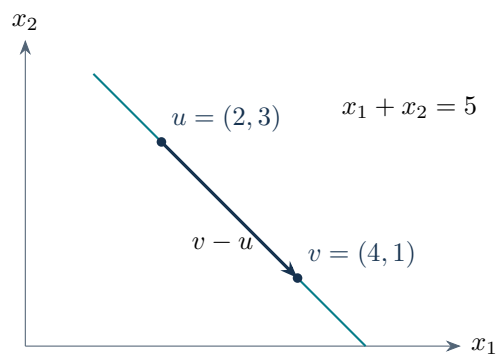
Twierdzenie 8.1. Jeśli $u, v \in \mathbb{K}^n$ są rozwiązaniami $Ax = b$, to dla każdego $t \in \mathbb{K}$ wektor $u + t(v - u)$ również jest rozwiązaniem. Jeżeli $u \neq v$, różne wartości t dają różne wektory.

Dowód. Korzystając z liniowości mnożenia macierzy przez wektor, dostajemy

$$A(u + t(v - u)) = Au + t(Av - Au) = b + t(b - b) = b.$$

Jeżeli $u + t(v - u) = u + s(v - u)$, to $(t - s)(v - u) = 0$. Ponieważ przynajmniej jedna współrzędna $v - u$ jest niezerowa, otrzymujemy $t - s = 0$, a więc $t = s$. $\square$

Nad ciałem *nieskończonym* istnienie dwóch różnych rozwiązań oznacza nieskończenie wiele rozwiązań. Nad $\mathbb{R}$ wektory $u + t(v - u)$ tworzą prostą. Dla $0 \leq t \leq 1$ otrzymujemy odcinek od u do v .



8.1 Co zmienia się nad ciałem skończonym?

Przykład 8.1. Dokładnie dwa rozwiązania nad $\mathbb{Z}_2$

W ciele $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ działania wykonujemy modulo 2. Równanie $x_1 + x_2 = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania:

$$(x_1, x_2) = (0, 0) \quad \text{oraz} \quad (1, 1),$$

bo $1 + 1 = 0$ w $\mathbb{Z}_2$. Parametr wolny przyjmuje tylko wartości 0 i 1.

Ogólnie, jeśli ciało ma q elementów, niesprzeczny układ z $n - r$ zmiennymi wolnymi ma dokładnie

$$q^{n-r}$$

rozwiązań. Każdy z $n - r$ niezależnych parametrów ma q możliwości, a zmienne główne są następnie wyznaczone jednoznacznie.

9 Układy jednorodne i struktura rozwiązań

9.1 Definicja i rozwiązanie zerowe

Układ jest *jednorodny*, jeśli ma postać $Ax = 0$, czyli wszystkie wyrazy wolne są zerowe. Jeśli $b \neq 0$, układ $Ax = b$ jest niejednorodny.

Każdy układ jednorodny ma rozwiązanie zerowe $x = 0$, bo $A0 = 0$. Nie może więc być sprzeczny. Ma tylko rozwiązanie zerowe dokładnie wtedy, gdy nie ma zmiennych wolnych, czyli $\text{rank } A = n$.

Przykład 9.1. Układ jednorodny z dwiema zmiennymi wolnymi

Rozważmy

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Zaczynamy od $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Zamieniamy $R_2 \leftrightarrow R_3$, następnie wykonujemy $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$ i $R_1 \leftarrow R_1 + R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Kolumny główne mają numery 1, 3; przyjmujemy $x_2 = s$, $x_4 = t$. Z równań $x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$ dostajemy

$$x = (-2s - 2t, s, -t, t)^T = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Wektory przy parametrach są rozwiązaniami, a każde rozwiązanie jest ich kombinacją. Są liniowo niezależne: druga współrzędna kombinacji jest równa s , a czwarta t , więc kombinacja zerowa wymusza $s = t = 0$.

Jądro macierzy

Zbiór $\ker A = \{x : Ax = 0\}$ nazywamy jądrem macierzy. Suma rozwiązań jednorodnych i dowolna wielokrotność takiego rozwiązania są nadal rozwiązaniami. Jeśli $Av = Aw = 0$, to $A(\alpha v + \beta w) = \alpha Av + \beta Aw = 0$.

9.2 Rozwiązanie szczególne plus rozwiązania jednorodne

Twierdzenie 9.1. Jeżeli p jest jednym rozwiązaniem $Ax = b$, to pełny zbiór rozwiązań ma postać

$$\{x : Ax = b\} = p + \ker A = \{p + v : Av = 0\}.$$

Dowód. Jeśli $Av = 0$, to $A(p+v) = Ap + Av = b$. Odwrotnie, jeśli $Ax = b$, to $A(x-p) = Ax - Ap = b - b = 0$, więc $x - p \in \ker A$. $\square$

Przykład 9.2. Ta sama macierz, niezerowa prawa strona

Weźmy macierz współczynników z przykładu 9.1, ale prawą stronę $b = (3, 9, -2)^T$. Wykonując te same operacje na całej macierzy rozszerzonej, otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 9 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

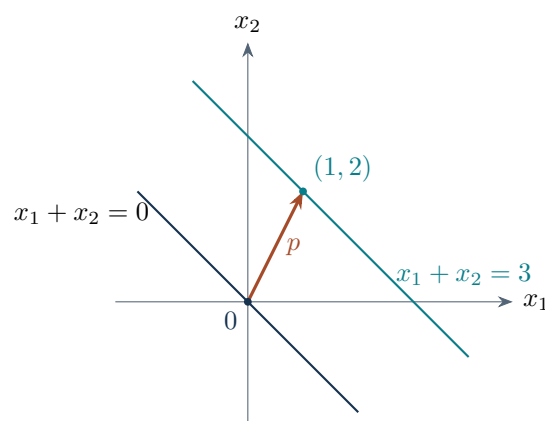
Stąd $x_1 = 4 - 2s - 2t$, $x_2 = s$, $x_3 = 1 - t$, $x_4 = t$, czyli

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_p + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Sprawdzamy rozwiązanie szczególne: pierwsza lewa strona wynosi $4 - 1 = 3$, druga $2 \cdot 4 + 1 = 9$, trzecia $-4 + 2 = -2$. Wektory przy parametrach są takie same jak dla układu jednorodnego.

9.3 Znaczenie geometryczne przesunięcia

Nad $\mathbb{R}$ zbiór rozwiązań jednorodnych przechodzi przez początek układu. Rozwiązania układu niejednorodnego, jeśli istnieją, tworzą jego przesunięcie. Poniższy rysunek pokazuje tę ideę na prostym przykładzie w $\mathbb{R}^2$.



Każde rozwiązanie drugiego równania to $(1, 2)$ plus rozwiązanie pierwszego.

9.4 Układy kwadratowe, nadokreślone i niedookreślone

Układ jest *kwadratowy*, gdy $m = n$; ma tyle samo równań co niewiadomych. Sam ten warunek nie przesądza o liczbie rozwiązań.

Twierdzenie 9.2. Dla macierzy kwadratowej $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ następujące warunki są równoważne:

1. $\text{rank } A = n$, czyli pivot występuje w każdej kolumnie;
2. układ jednorodny $Ax = 0$ ma tylko rozwiązanie zerowe;
3. dla każdej prawej strony b układ $Ax = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód. Warunki pierwszy i drugi mówią, że nie ma zmiennych wolnych. W przypadku kwadratowym n pivotów zajmuje wszystkie n wierszy, więc nie pozostaje żaden wiersz o zerowej lewej stronie, który mógłby wprowadzić sprzeczność. Redukcja daje $[I_n \mid c]$ i rozwiązanie $x = c$. Odwrotnie, warunek trzeci zastosowany do $b = 0$ daje drugi. $\square$

9.5 Gdy niewiadomych jest więcej niż równań

Jeśli $n > m$, to $r \leq m < n$, więc istnieje co najmniej jedna zmienna wolna. Układ *niesprzeczny* ma zatem więcej niż jedno rozwiązanie, a nad ciałem nieskończonym ma ich nieskończenie wiele. Układ jednorodny z $n > m$ zawsze ma rozwiązanie niezerowe: wystarczy nadać jednej ze zmiennych wolnych wartość 1.

Przykład 9.3. Więcej niewiadomych nie gwarantuje zgodności

Układ z dwiema niewiadomymi $0x_1 + 0x_2 = 1$ ma $n = 2 > m = 1$, ale jest sprzeczny. Dla porównania $x_1 + x_2 = 1$ ma rozwiązania $(1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

9.6 Gdy równań jest więcej niż niewiadomych

Dodatkowe równania mogą być konsekwencjami wcześniejszych albo wprowadzać niezgodność. Układ z $m > n$ może mieć jedno rozwiązanie.

Przykład 9.4. Trzy równania i dwie niewiadome

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \\ 2x = 4 \end{cases} \iff x = 2, \quad y = 1.$$

Pierwsze dwa równania jednoznacznie wyznaczają $(2, 1)$, a trzecie jest ich sumą. Jeśli zastąpimy je przez $2x = 5$, układ stanie się sprzeczny.

Uwaga

Dla macierzy prostokątnej warunek $\ker A = \{0\}$ zapewnia co najwyżej jedno rozwiązanie $Ax = b$. Trzeba jeszcze sprawdzić istnienie rozwiązania, czyli zgodność prawej strony.

10 Dalsze przykłady obliczeniowe

10.1 Parametr we współczynnikach

Przykład 10.1. Jeden parametr, trzy różne typy układu

Zbadamy w zależności od $\lambda \in \mathbb{R}$ układ

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = 2, \\ x + y + (\lambda - 1)z = \lambda - 1. \end{cases}$$

Odejmujemy pierwszy wiersz od drugiego i trzeciego. Ta operacja jest dozwolona dla *każdego* λ :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & \lambda - 2 \end{array} \right].$$

Przypadek 1: $\lambda \neq 1$ i $\lambda \neq 2$

Oba potencjalne pivoty są niezerowe. Z dolnych równań dostajemy

$$y = \frac{1}{\lambda - 1}, \quad z = 1, \quad x = 1 - y - z = -\frac{1}{\lambda - 1}.$$

Układ jest oznaczony.

Przypadek 2: $\lambda = 1$

Drugie równanie po eliminacji brzmi $0 \cdot y = 1$. Układ jest sprzeczny. Nie ma znaczenia, że pozostałe równania można osobno rozwiązać.

Przypadek 3: $\lambda = 2$

Drugie równanie daje $y = 1$, a trzecie staje się $0 = 0$. Przyjmujemy $z = t$; pierwsze równanie daje $x = -t$. Zatem

$$(x, y, z) = (-t, 1, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parametr	Typ układu	Rozwiązania
$\lambda \notin \{1, 2\}$	oznaczony	$(-1/(\lambda - 1), 1/(\lambda - 1), 1)$
$\lambda = 1$	sprzeczny	brak
$\lambda = 2$	nieoznaczony	$(-t, 1, t), t \in \mathbb{R}$

Zasada pracy z parametrem: zanim podzielimy przez wyrażenie z parametrem, wydziel przypadki, w których to wyrażenie jest zerem.

10.2 Eliminacja w ciele skończonym i nad liczbami zespolonymi

Przykład 10.2. Rachunki w $\mathbb{Z}_5$

Rozwiążmy nad $\mathbb{Z}_5$ układ

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

Każdą liczbę redukujemy modulo 5. Najpierw zamiana wierszy, a potem eliminacja:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right].$$

Ostatni współczynnik to $1 - 4 = -3 \equiv 2 \pmod{5}$. Odwrotnością 2 jest 3, bo $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$.

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow 3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Zatem $(x, y) = (4, 3)$ w $\mathbb{Z}_5$. Sprawdzenie: $2 \cdot 4 + 3 = 11 \equiv 1$, $4 + 2 \cdot 3 = 10 \equiv 0 \pmod{5}$.

Przykład 10.3. Rachunki nad $\mathbb{C}$

Niech $i^2 = -1$. Rozwiązujemy

$$\begin{cases} x + iy = 1, \\ ix + y = 0. \end{cases}$$

Eliminacja pierwszej zmiennej daje

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 1 \\ i & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - iR_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 1 \\ 0 & 2 & -i \end{array} \right],$$

ponieważ $1 - i^2 = 2$. Stąd

$$y = -\frac{i}{2}, \quad x = 1 - iy = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Sprawdzenie: $\frac{1}{2} + i(-\frac{i}{2}) = 1$ oraz $i \cdot \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = 0$.

Algorytm jest taki sam nad każdym ciałem. Zmieniają się reguły rachunkowe, w szczególności sposób obliczania odwrotności niezerowych pivotów.

11 Jak zapisać i sprawdzić rozwiązanie?

11.1 Czytelny zapis operacji

Przy każdej strzałce zapisz zmieniany wiersz i wykonywaną operację. Jeśli kilka wierszy modyfikujesz przy użyciu jednego, niezmiennego wiersza pivotowego, możesz zapisać te operacje razem. Gdy późniejszy krok korzysta z nowej wersji wiersza, pokaż go osobno.

Przykład 11.1. Kolejność operacji ma znaczenie

Zacznijmy od

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right].$$

Najpierw $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, a potem $R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_2$, już z *nowym* drugim wierszem:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array} \right].$$

Odczytujemy $x = 1$, $y = 1$. Zapisanie obu działań bez wskazania kolejności może prowadzić do użycia innej wersji R_2 , więc warto pokazać stan pośredni.

11.2 Wynik powinien opisywać cały zbiór

- Gdy wystąpi sprzeczność, wskaż wiersz $0 = c$, $c \neq 0$, i napisz, że zbiór rozwiązań jest pusty.
- Dla układu oznaczonego wypisz wszystkie współrzędne rozwiązania.
- Przy zmiennych wolnych podaj pełną parametryzację i dziedzinę parametrów. Samo znalezienie jednego rozwiązania nie kończy zadania.

W parametryzacji $x = p + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$ można sprawdzić oddzielnie $Ap = b$ i $Av_j = 0$ dla każdego j . Aby mieć pewność, że są to *wszystkie* rozwiązania, wyprowadź parametryzację z równoważnej postaci schodkowej i użyj wszystkich zmiennych wolnych.

11.3 Kontrola wiersza podczas obliczeń

Jeśli operacja ma usunąć element w kolumnie j , oblicz najpierw tylko ten element. Powinno wyjść zero. Następnie przelicz pozostałe kolumny oraz prawą stronę. Na końcu sprawdź, czy nie zniszczono zer we wcześniejszych kolumnach głównych.

Krótką kontrola końcowa

1. Czy wszystkie operacje obejmowały także kolumnę b ?
2. Czy każdy dzielnik był niezerowy w rozpatrywanym przypadku?
3. Czy sprawdzono wszystkie wiersze, także zerowe po lewej stronie?
4. Czy liczba niezależnych parametrów wynosi $n - r$?
5. Czy wynik spełnia wyjściowe równania?

A Zestawienie: algorytm i liczba rozwiązań

Schemat postępowania

1. Zapisz $[A \mid b]$ w ustalonej kolejności niewiadomych. **2. Eliminuj** poniżej kolejnych niezerowych pivotów. **3. Sprawdź zgodność.** **4. Wybierz zmienne wolne.** **5. Wyznacz zmienne główne.** **6. Sprawdź wynik.**

Dozwolone operacje na całych wierszach

$$R_i \leftrightarrow R_j, \quad R_i \leftarrow \lambda R_i \quad (\lambda \neq 0), \quad R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j \quad (i \neq j).$$

Najważniejsze kryteria

$$\begin{aligned} Ax = b \text{ jest niesprzeczny} &\iff \text{rank } A = \text{rank}[A \mid b], \\ \text{liczba zmiennych wolnych} &= n - \text{rank } A \quad (\text{dla układu niesprzecznego}), \\ Ax = 0 \text{ ma tylko } x = 0 &\iff \text{rank } A = n, \\ \{x : Ax = b\} &= p + \ker A \quad \text{jeśli } Ap = b. \end{aligned}$$

Liczba rozwiązań nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$

Rodzaj układu	Możliwe liczby rozwiązań
Niejednorodny	0, 1, ∞
Jednorodny	1, ∞
Niejednorodny z $n > m$	0, ∞
Jednorodny z $n > m$	∞

Nad ciałem o q elementach liczba rozwiązań układu niesprzecznego wynosi q^{n-r} , gdzie $r = \text{rank } A$. Układ sprzeczny ma zawsze zero rozwiązań.

Słownik pojęć

Pivot. Pierwszy niezerowy element wiersza w postaci schodkowej.

Zmienna główna. Zmienna odpowiadająca kolumnie z pivotem w części A .

Zmienna wolna. Zmienna bez pivota; w układzie niesprzecznym jest parametrem.

REF / RREF. Postać schodkowa / zredukowana postać schodkowa.

Układ jednorodny. Układ z zerową prawą stroną, $Ax = 0$.