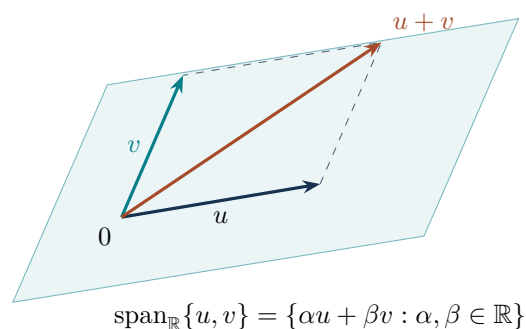


Przestrzenie liniowe

Wykład 5

Definicje, dowody i rozwiązane przykłady



Główna idea

Wektorem może być strzałka, ciąg liczb, macierz, wielomian lub funkcja. Łączy je ten sam zestaw praw dodawania i mnożenia przez skalar. Kombinacje liniowe opisują, co można z tych obiektów zbudować, a podprzestrzenie są zbiorami zamkniętymi na takie konstrukcje.

Spis treści

1	Wektory i działania w $\mathbb{K}^n$	3
2	Definicja przestrzeni liniowej	4
3	Własności wynikające z aksjomatów	5
4	Podstawowe modele przestrzeni liniowych	6
5	Kombinacje liniowe i układy równań	10
6	Powłoka liniowa	12
7	Podprzestrzenie liniowe	14
8	Powłoka jako najmniejsza podprzestrzeń	17
A	Najważniejsze pojęcia i schematy rozwiązań	18

Oznaczenia i założenia

$\mathbb{K}$ oznacza ciało skalarów, najczęściej $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Litery u, v, w oznaczają wektory, a α, β, λ skalary. Symbol 0_V oznacza wektor zerowy w V , zaś $0_{\mathbb{K}}$ zero w ciele. Gdy nie ma ryzyka pomyłki, oba zapisujemy jako 0 .

$\mathbb{K}^n$ to zbiór uporządkowanych n -tek elementów $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^X$ to zbiór wszystkich funkcji $X \rightarrow \mathbb{K}$, a $\mathbb{K}[t]$ to zbiór wielomianów zmiennej t o współczynnikach w $\mathbb{K}$. We wzorach ogólnych $n, m \geq 1$. $\text{span}_{\mathbb{K}} S$ jest powłoką liniową zbioru S . W przykładach ze współrzędnymi rzeczywistymi przyjmujemy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Jak korzystać z notatek

Najpierw opanuj działania współrzędnymi. Potem prześledź aksjomaty w przykładzie, w którym wektory nie są strzałkami. Przy zadaniu o podprzestrzeni zawsze ustal przestrzeń otaczającą, ciało skalarów i działania. Przy zadaniu o powłoce liniowej szukaj współczynników kombinacji.

1 Wektory i działania w $\mathbb{K}^n$

Dla $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ definiujemy

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \quad \lambda u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n).$$

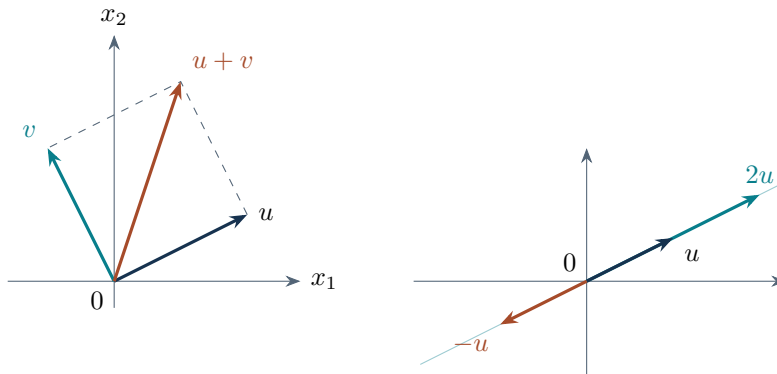
Obie operacje wykonujemy *współrzędnymi*. Ich wyniki należą do $\mathbb{K}^n$. Wektor zerowy ma wszystkie współrzędne równe zero, a $-u = (-u_1, \dots, -u_n)$.

Przykład 1.1. Dodawanie i skalowanie na płaszczyźnie

Niech $u = (2, 1)$, $v = (-1, 2)$. Wówczas

$$\begin{aligned} u + v &= (2 - 1, 1 + 2) = (1, 3), \\ 2u &= (4, 2), \quad -u = (-2, -1), \quad \frac{1}{2}u = (1, \frac{1}{2}), \\ 2u - 3v &= (4, 2) - (-3, 6) = (7, -4). \end{aligned}$$

W ostatnim wierszu $u - v$ oznacza $u + (-v)$, a współczynniki 2 i -3 są skalarami.



Suma jako przekątna równoległoboku; dodatni i ujemny skalar zmieniają długość i zwrot.

Dla $u \neq 0$ i $\lambda \in \mathbb{R}$: jeśli $\lambda > 0$, zwrot jest ten sam; jeśli $\lambda < 0$, przeciwny; jeśli $\lambda = 0$, otrzymujemy zero. Długość zostaje pomnożona przez $|\lambda|$. Ta interpretacja znaku dotyczy skalarów rzeczywistych.

2 Definicja przestrzeni liniowej

Definicja 2.1. *Przestrzeń liniową* (wektorową) nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy niepusty zbiór V z działaniami

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V,$$

spełniającymi poniższe aksjomaty. Elementy V nazywamy *wektorami*, a elementy $\mathbb{K}$ *skalarami*.

Warunki obowiązują dla wszystkich $u, v, w \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1. **Łączność dodawania:** $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. **Przemienność dodawania:** $u + v = v + u$.
3. **Wektor zerowy:** istnieje $0_V \in V$ taki, że $u + 0_V = u$.
4. **Wektor przeciwny:** dla każdego u istnieje $-u \in V$ taki, że $u + (-u) = 0_V$.
5. **Działanie jedynki:** $1_{\mathbb{K}}u = u$.
6. **Zgodność mnożeń:** $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.
7. **Rozdzielność względem sumy wektorów:** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
8. **Rozdzielność względem sumy skalarów:** $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

To, że działania mają wartości w V , jest częścią definicji. Nie trzeba definiować iloczynu dwóch wektorów. Mnożenie skalarne λu nie jest tym samym co iloczyn skalarny dwóch wektorów.

Przykład 2.1. Ten sam zbiór, inne ciało skalarów

Zbiór $\mathbb{C}$ ze zwykłymi działaniami jest przestrzenią nad $\mathbb{C}$, a także nad $\mathbb{R}$. W drugim przypadku skalary muszą być rzeczywiste. Dlatego ze skalowania wektora 1 uzyskujemy odpowiednio

$$\{\lambda \cdot 1 : \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}, \quad \{\lambda \cdot 1 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Zbiór $\mathbb{R}$ nie jest przestrzenią nad $\mathbb{C}$ ze zwykłym mnożeniem: $i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}$. Zawodzi zamknięcie działania.

Co trzeba podać?

Pełna informacja to zbiór V , ciało $\mathbb{K}$ oraz oba działania. Samego zbioru nie wystarczy wskazać, aby rozstrzygnąć, czy mamy przestrzeń liniową.

3 Własności wynikające z aksjomatów

Poniższe fakty są twierdzeniami, a nie dodatkowymi aksjomatami. Ich dowody działają w każdej przestrzeni liniowej.

3.1 Skracanie i jednoznaczność

Jeśli $u + v = u + w$, dodajemy $-u$ i korzystamy z łączności:

$$v = 0_V + v = ((-u) + u) + v = (-u) + (u + v) = (-u) + (u + w) = w.$$

Wektor zerowy jest jedyny: gdy $0'$ także jest neutralny, to $0' = 0' + 0_V = 0_V$. Wektor przeciwny też jest jedyny: z $u + v = 0_V = u + w$ wynika $v = w$.

3.2 Mnożenie przez zero i przez minus jeden

Zero skalarne razy wektor. Niech $a = 0_{\mathbb{K}}u$. Wtedy

$$a = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})u = 0_{\mathbb{K}}u + 0_{\mathbb{K}}u = a + a.$$

Ponieważ $a = a + 0_V$, po skróceniu otrzymujemy $a = 0_V$.

Skalar razy wektor zerowy. Podobnie

$$\lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V, \quad \text{więc} \quad \lambda 0_V = 0_V.$$

Wektor przeciwny. Mamy

$$u + (-1_{\mathbb{K}})u = (1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}}))u = 0_{\mathbb{K}}u = 0_V.$$

Jednoznaczność wektora przeciwnego daje $(-1_{\mathbb{K}})u = -u$. Stąd także $(-\lambda)u = -(\lambda u) = \lambda(-u)$.

3.3 Kiedy iloczyn jest zerem?

$$\lambda u = 0_V \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ lub } u = 0_V.$$

Jeśli $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, to istnieje $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$, zatem $u = \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}0_V = 0_V$. Implikacja odwrotna wynika z dwóch poprzednich własności.

3.4 Wielokrotne dodawanie

Z rozdzielnosci, przez indukcję względem n , dostajemy

$$\underbrace{u + \dots + u}_{n \text{ składników}} = (n \cdot 1_{\mathbb{K}})u.$$

Nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ zapisujemy to krótko jako nu . Nad ciałem $\mathbb{F}_2$ mamy natomiast $1 + 1 = 0$, więc $u + u = 0_V$ dla każdego u . Symbol liczby naturalnej w ciele oznacza sumę jedynek tego ciała.

4 Podstawowe modele przestrzeni liniowych

4.1 Przestrzenie współrzędnych

Przestrzeń $\mathbb{K}^n$ ze zwykłym dodawaniem i skalowaniem jest najważniejszym modelem. Każdy aksjomat sprawdzamy osobno na każdej współrzędnej, korzystając z praw działań w ciele. Na przykład

$$(\lambda(u+v))_j = \lambda(u_j + v_j) = \lambda u_j + \lambda v_j = (\lambda u + \lambda v)_j$$

dla każdego $j = 1, \dots, n$. Równość wszystkich współrzędnych daje równość wektorów.

Przykład 4.1. Działania w $\mathbb{C}^2$

Niech $u = (1 + i, 2)$, $v = (i, -1 + 2i)$. Obliczamy

$$\begin{aligned} iu - v &= (i(1 + i), 2i) - (i, -1 + 2i) \\ &= (-1 + i - i, 2i + 1 - 2i) = (-1, 1). \end{aligned}$$

Skalar i jest dopuszczalny, ponieważ rozpatrujemy przestrzeń nad $\mathbb{C}$. Wektor zerowy to $(0, 0)$, a wektor przeciwny do u to $(-1 - i, -2)$.

4.2 Macierze tego samego rozmiaru

Zbiór $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ wszystkich macierzy $m \times n$ jest przestrzenią nad $\mathbb{K}$, gdy dodajemy i skalujemy wyrazy na odpowiadających pozycjach:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Wektorami są tu całe macierze. Wektorem zerowym jest macierz zerowa. Uzasadnienie aksjomatów jest takie samo jak dla $\mathbb{K}^{mn}$.

Przykład 4.2. Kombinacja dwóch macierzy

Dla

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mamy

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nie używamy tu mnożenia macierzy. W definicji przestrzeni wystarczają suma macierzy i iloczyn macierzy przez skalar.

Uwaga

Rozmiar macierzy musi być ustalony. Zwykle dodawanie nie definiuje działania na zbiorze wszystkich macierzy dowolnych rozmiarów, bo nie każdą parę można dodać.

4.3 Przestrzenie funkcji i wielomianów

Dla dowolnego zbioru X oznaczamy

$$\mathbb{K}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{K}\}.$$

Definiujemy działania *punktowo*: dla każdego $x \in X$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Funkcja zerowa ma wartość $0_{\mathbb{K}}$ w każdym punkcie, a $(-f)(x) = -f(x)$. Wszystkie aksjomaty wynikają z odpowiadających im równości w $\mathbb{K}$. Na przykład dla każdego x

$$((f + g) + h)(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g + h))(x).$$

Ponieważ równość zachodzi w każdym punkcie, funkcje są równe.

Przykład 4.3. Kombinacja funkcji rzeczywistych

Dla $f(t) = t^2$, $g(t) = 1 - t$ w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mamy

$$(2f - 3g)(t) = 2t^2 - 3(1 - t) = 2t^2 + 3t - 3.$$

Wynikiem jest funkcja. Jej wartość w punkcie $t = 2$ wynosi $8 + 6 - 3 = 11$, co zgadza się z $2f(2) - 3g(2) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1)$.

Przykład 4.4. Funkcja na skończonym zbiorze to lista wartości

Jeśli $X = \{a, b, c\}$, to funkcję f możemy zapisać jako $(f(a), f(b), f(c))$. Dla $f = (1, 0, 2)$, $g = (-1, 3, 1)$ otrzymujemy

$$2f - g = (2, 0, 4) - (-1, 3, 1) = (3, -3, 3).$$

Po ustaleniu kolejności elementów X działania w $\mathbb{K}^X$ są dokładnie działaniami w $\mathbb{K}^3$.

Wielomiany. Zbiór $\mathbb{K}[t]$ ze zwykłymi działaniami jest przestrzenią nad $\mathbb{K}$. Podobnie dla ustalonego $d \geq 0$ przestrzenią jest

$$\mathbb{K}[t]_{\leq d} = \{a_0 + a_1t + \cdots + a_d t^d : a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}\}.$$

Ten zapis obejmuje również wielomian zerowy. Dodawanie i skalowanie odpowiadają działaniom na listach współczynników $(a_0, \dots, a_d)$.

Przykład 4.5. Działania na współczynnikach

Dla $p(t) = 1 + 2t$, $q(t) = t^2 - t$ mamy

$$2p - 3q = 2 + 4t - 3t^2 + 3t = 2 + 7t - 3t^2.$$

W $\mathbb{K}[t]_{\leq 2}$ odpowiada temu $2(1, 2, 0) - 3(0, -1, 1) = (2, 7, -3)$.

4.4 Liczby dodatnie z nietypowymi działaniami

Na zbiorze $V = \mathbb{R}_{>0}$ wprowadzamy, dla $x, y > 0, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$x \oplus y = xy, \quad \lambda \odot x = x^\lambda.$$

Po prawej stronie występują zwykłe mnożenie i potęgowanie liczb. Oba wyniki są dodatnie, więc działania są dobrze określone. **Ciałem skalarów jest $\mathbb{R}$ ze zwykłymi działaniami.**

Sprawdzenie aksjomatów

Łączność i przemienność $\oplus$ wynikają z tych własności mnożenia:

$$(x \oplus y) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (y \oplus z), \quad x \oplus y = xy = yx = y \oplus x.$$

Wektorem zerowym jest 1, ponieważ $x \oplus 1 = x$. Wektorem przeciwnym do x jest $1/x$, bo $x \oplus (1/x) = 1$. Pozostałe cztery aksjomaty przyjmują postać

$$\begin{aligned} 1 \odot x &= x^1 = x, \\ \alpha \odot (\beta \odot x) &= (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \odot x, \\ \lambda \odot (x \oplus y) &= (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y), \\ (\alpha + \beta) \odot x &= x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x). \end{aligned}$$

Prawa potęgowania są tu poprawne dla wszystkich rzeczywistych wykładników, ponieważ podstawy są dodatnie. Otrzymaliśmy przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$.

Logarytm wyjaśnia konstrukcję

Bijekcja $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ zamienia nowe działania w zwykłe:

$$\log(x \oplus y) = \log x + \log y, \quad \log(\lambda \odot x) = \lambda \log x.$$

Wektor zerowy 1 przechodzi na 0, a wektor przeciwny $1/x$ na $-\log x$. To zwykła prosta rzeczywista opisana innymi współrzędnymi.

Przykład 4.6. Rachunki w nowej przestrzeni

$$4 \oplus 9 = 36, \quad 2 \odot 3 = 9, \quad (-1) \odot 4 = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} \odot 16 = 4.$$

Kombinacja dwóch wektorów ma postać

$$(2 \odot 4) \oplus ((-1) \odot 8) = 4^2 \cdot 8^{-1} = 2.$$

Równanie $(2 \odot x) \oplus 4 = 36$ oznacza $4x^2 = 36$. Ponieważ $x > 0$, jego jedynym rozwiązaniem jest $x = 3$. W szczególności $0 \odot x = 1 = 0_V$, zgodnie z ogólnym twierdzeniem.

4.5 Iloczyn przestrzeni liniowych

Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami nad *tym samym* ciałem $\mathbb{K}$. Na zbiorze par $V_1 \times V_2$ definiujemy

$$\begin{aligned}(v_1, v_2) + (w_1, w_2) &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2), \\ \lambda(v_1, v_2) &= (\lambda v_1, \lambda v_2).\end{aligned}$$

Wyniki leżą w $V_1 \times V_2$, ponieważ każda składowa pozostaje w swojej przestrzeni. Wektor zerowy i przeciwny to

$$0_{V_1 \times V_2} = (0_{V_1}, 0_{V_2}), \quad -(v_1, v_2) = (-v_1, -v_2).$$

Każdy aksjomat zachodzi w obu składowych. Na przykład

$$\begin{aligned}\lambda((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) &= (\lambda(v_1 + w_1), \lambda(v_2 + w_2)) \\ &= (\lambda v_1 + \lambda w_1, \lambda v_2 + \lambda w_2) \\ &= \lambda(v_1, v_2) + \lambda(w_1, w_2).\end{aligned}$$

Pozostałe własności dziedziczymy w ten sam sposób.

Przykład 4.7. Para złożona z wektora i wielomianu

W przestrzeni $V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}[t]$ przyjmijmy

$$u = ((1, 2), t^2), \quad v = ((-1, 3), 1 - t).$$

Obliczamy osobno dwie składowe:

$$\begin{aligned}u + 2v &= ((1, 2) + 2(-1, 3), t^2 + 2(1 - t)) \\ &= ((-1, 8), t^2 - 2t + 2).\end{aligned}$$

Wektorem zerowym jest $((0, 0), 0)$, gdzie ostatnie zero oznacza wielomian zerowy. Wektor przeciwny do u to $((-1, -2), -t^2)$.

Więcej czynników. Tak samo konstruujemy $V_1 \times \cdots \times V_m$, a w szczególności

$$V^m = \underbrace{V \times \cdots \times V}_m \text{ czynników}.$$

Działania wykonujemy na każdej pozycji. Przestrzeń $\mathbb{K}^m$ otrzymujemy, biorąc $V = \mathbb{K}$. W przestrzeni $(\mathbb{R}^2)^3$ wektorem jest uporządkowana trójka wektorów płaskich.

Uwaga

Określenie „iloczyn przestrzeni” oznacza tu iloczyn kartezjański zbiorów, czyli zbiór par lub krotek. Nie oznacza mnożenia dwóch wektorów.

5 Kombinacje liniowe i układy równań

Definicja 5.1. Dla $v_1, \dots, v_k \in V$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ wektor

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \dots, v_k$ ze współczynnikami $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Współczynniki mogą być zerowe lub ujemne; nad $\mathbb{C}$ mogą też być zespolone. Kombinacja jest skończoną sumą. Jej wartość należy do V , ponieważ działania przestrzeni są zamknięte.

Przykład 5.1. Obliczenie kombinacji i znalezienie współczynników

Niech $u = (1, 2)$, $v = (2, -1)$. Wtedy

$$3u - 2v = (3, 6) - (4, -2) = (-1, 8).$$

Odwrotne zadanie polega na znalezieniu α, β , dla których $\alpha u + \beta v = (-1, 8)$. Porównujemy współrzędne:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -1, \\ 2\alpha - \beta = 8. \end{cases}$$

Odejmując podwojone pierwsze równanie od drugiego, dostajemy $-5\beta = 10$, czyli $\beta = -2$. Stąd $\alpha = -1 - 2\beta = 3$.

5.1 Macierz jako układ kolumn

Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, a jej kolumny to $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$. Dla $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ mamy

$$Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n.$$

Dokładniej,

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Rozwiązać $Ax = b$ to znaleźć współczynniki, z którymi kolumny A składają się na wektor b . Niewiadomych jest n , a każda kolumna oraz prawa strona mają m współrzędnych.

5.2 Operacje na wierszach też używają kombinacji

Operacja $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ zastępuje wiersz jego kombinacją liniową z innym wierszem. Na przykład

$$(1, 2, 3) - 2(2, -1, 4) = (-3, 4, -5).$$

W macierzy rozszerzonej należy wykonać to działanie również na wyrazie wolnym.

5.3 Pełny przykład: wektor jako kombinacja trzech kolumn

Przykład 5.2. Wyznaczenie współczynników metodą Gaussa

Szukamy $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ takich, że

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Porównanie współrzędnych prowadzi do układu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

1. Zamiana wierszy i zerowanie pierwszej kolumny

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 9 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right].$$

Teraz $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ i $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -4 & -7 \\ 0 & 5 & -10 & -25 \end{array} \right].$$

2. Zerowanie drugiej kolumny

Najpierw mnożymy trzeci wiersz przez 3, a następnie odejmujemy od niego $5R_2$. Łączny efekt zapisujemy jako $R_3 \leftarrow 3R_3 - 5R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -40 \end{array} \right].$$

3. Podstawianie wsteczne

$$-10x_3 = -40 \Rightarrow x_3 = 4, \quad 3x_2 - 16 = -7 \Rightarrow x_2 = 3,$$

$$x_1 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 8 \Rightarrow x_1 = 2.$$

Każda niewiadoma została wyznaczona jednoznacznie. Otrzymujemy

$$\boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzenie: $(4, 2, 6) + (-3, -6, -3) + (8, 12, -4) = (9, 8, -1)$.

6 Powłoka liniowa

6.1 Powłoka skończonego układu wektorów

Definicja 6.1. Powłoką liniową wektorów $v_1, \dots, v_k \in V$ nazywamy zbiór

$$\text{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_k\} = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}.$$

Spotyka się też zapis $\text{lin}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_k)$. Wektory $v_1, \dots, v_k$ *rozpinają* ten zbiór.

Każdy v_j należy do powłoki: wybieramy jego współczynnik równy 1, a pozostałe równe 0. Zerując wszystkie współczynniki, otrzymujemy 0_V .

Przykład 6.1. Powłoka jednego wektora

Dla $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{span}_{\mathbb{R}}\{v\} = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

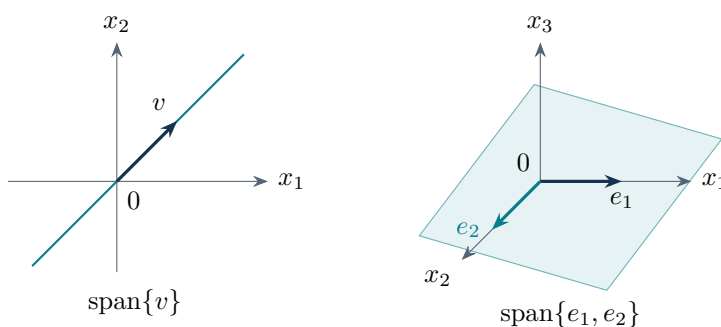
To cała prosta przez zero, także w kierunku przeciwnym do v . Dopisanie $2v$ nie zmienia powłoki, ponieważ $\alpha v + \beta(2v) = (\alpha + 2\beta)v$. Dla $v = 0$ powłoka jest natomiast zbiorem $\{0\}$.

Przykład 6.2. Dwa wektory rozpinające płaszczyznę

Niech $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ w $\mathbb{R}^3$. Wtedy

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = (\alpha, \beta, 0), \quad \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Wektor $(3, -2, 0) = 3e_1 - 2e_2$ należy do powłoki. Wektor $(3, -2, 1)$ do niej nie należy, bo jego trzecia współrzędna nie jest zerem.



Powłoka niezerowego wektora oraz płaszczyzna $x_3 = 0$ w przestrzeni trójwymiarowej.

Dwa wektory będące wielokrotnościami jednego niezerowego wektora nadal rozpinają tylko prostą. Sama liczba podanych wektorów nie określa kształtu powłoki.

6.2 Powłoka dowolnego zbioru

Dla $S \subseteq V$ definiujemy

$$\text{span}_{\mathbb{K}} S = \left\{ \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j : k \geq 0, v_j \in S, \alpha_j \in \mathbb{K} \right\}.$$

Suma dla $k = 0$ jest sumą pustą i oznacza 0_V . Dzięki temu

$$\text{span}_{\mathbb{K}} \emptyset = \{0_V\}.$$

Nawet gdy S jest nieskończony, pojedynczy wektor powłoki jest **skończoną** kombinacją elementów S . Nie wprowadzamy tu sum nieskończonych.

Przykład 6.3. Odcinek i jego powłoka

Niech $S = \{(t, t) : 1 \leq t \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$. Każda kombinacja jego punktów ma równe współrzędne, więc $\text{span } S \subseteq \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\}$. Ponieważ $(1, 1) \in S$, każdy $(a, a) = a(1, 1)$ należy do powłoki. Zatem

$$\text{span } S = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Odcinek nie zawiera zera; jego powłoka zawiera zero i całą prostą.

Przykład 6.4. Mały obszar może rozpinąć całą płaszczyznę

Niech

$$S = \{(x, y) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < \frac{1}{4}\}.$$

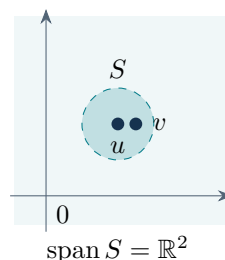
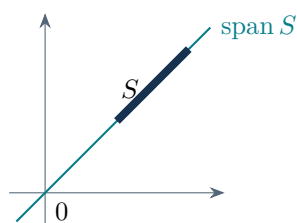
W zbiorze S leżą $u = (1, 1)$ i $v = (\frac{5}{4}, 1)$, bo ich odległości od $(1, 1)$ to 0 i $1/4 < 1/2$. Mamy

$$(1, 0) = 4v - 4u, \quad (0, 1) = 5u - 4v.$$

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ otrzymujemy więc

$$(a, b) = a(4v - 4u) + b(5u - 4v) = (-4a + 5b)u + (4a - 4b)v.$$

Każdy wektor płaszczyzny jest kombinacją dwóch elementów S , zatem $\boxed{\text{span}_{\mathbb{R}} S = \mathbb{R}^2}$.



7 Podprzestrzenie liniowe

Definicja 7.1. Podzbiór $W \subseteq V$ jest *podprzestrzenią liniową*, jeśli z działaniami odziedziczonymi z V i nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$ sam jest przestrzenią liniową.

Nie wybieramy nowych działań na W . Dodajemy i skalujemy tak samo jak w V .

Twierdzenie 7.2 (Kryterium podprzestrzeni). Podzbiór $W \subseteq V$ jest podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $W \neq \emptyset$;
2. dla wszystkich $u, v \in W$ zachodzi $u + v \in W$;
3. dla wszystkich $u \in W$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ zachodzi $\lambda u \in W$.

Dowód. Jeśli W jest przestrzenią, warunki wynikają z definicji. Odwrotnie, wybierzmy $w \in W$, co wolno zrobić dzięki niepustości. Wtedy $0_V = 0_{\mathbb{K}}w \in W$, a dla każdego $u \in W$ mamy $-u = (-1)u \in W$. Działania pozostają w W dzięki warunkom 2 i 3. Pozostałe aksjomaty są równościami już prawdziwymi w V , więc zachodzą również dla wektorów z W . Zatem W jest przestrzenią. $\square$

Wygodna wersja w jednym warunku

Wystarczy sprawdzić $0_V \in W$ oraz

$$\alpha u + \beta v \in W \quad \text{dla wszystkich } u, v \in W, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Biorąc $\alpha = \beta = 1$, otrzymujemy zamknięcie na sumę; biorąc $\beta = 0$, otrzymujemy zamknięcie na skalowanie.

Przykład 7.1. Płaszczyzna dana równaniem jednorodnym

Rozważmy $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Wektor zerowy należy do W . Jeśli $u, v \in W$, to dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\alpha u_1 + \beta v_1) + 2(\alpha u_2 + \beta v_2) - (\alpha u_3 + \beta v_3) &= \alpha(u_1 + 2u_2 - u_3) \\ &\quad + \beta(v_1 + 2v_2 - v_3) = 0. \end{aligned}$$

Zatem $\alpha u + \beta v \in W$, więc W jest podprzestrzenią. Z równania $x = -2y + z$, po przyjęciu $y = s$, $z = t$, dostajemy

$$W = \{(-2s + t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

7.1 Geometria i kontrprzykłady

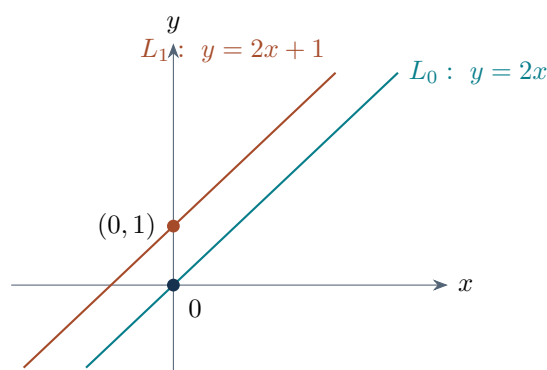
Zawsze podprzestrzeniami V są $\{0_V\}$ i samo V . W $\mathbb{R}^2$ każda prosta przechodząca przez zero jest podprzestrzenią: jeśli ma postać $L = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$, to

$$sv + tv = (s + t)v \in L, \quad \lambda(tv) = (\lambda t)v \in L.$$

Tak samo proste przez zero w $\mathbb{R}^3$ i płaszczyzny zawierające zero są podprzestrzeniami. Przesunięcie ich poza zero zmienia sytuację.

Przykład 7.2. Prosta przez zero i prosta przesunięta

Zbiór $L_0 = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ to $\text{span}\{(1, 2)\}$. Natomiast $L_1 = \{(x, 2x + 1) : x \in \mathbb{R}\}$ nie zawiera $(0, 0)$, więc nie jest podprzestrzenią. Ponadto $(0, 1) \in L_1$, ale $(0, 1) + (0, 1) = (0, 2) \notin L_1$.



Równoległe proste: L_0 jest podprzestrzenią, a L_1 jest jej przesunięciem.

Przykład 7.3. Zawieranie zera nie wystarcza

Zbiór obu osi

$$S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

zawiera zero i jest zamknięty na mnożenie przez skalar. Jednak $(1, 0), (0, 1) \in S$, a $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin S$. Nie jest więc podprzestrzenią. Unia $U \cup W$ dwóch podprzestrzeni nie musi być podprzestrzenią.

Przykład 7.4. Zamknięcie na dodawanie też nie wystarcza

Pierwsza ćwiartka z brzegiem $Q = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ zawiera zero i sumy swoich elementów. Ale $(1, 0) \in Q$, podczas gdy $(-1)(1, 0) = (-1, 0) \notin Q$. Warunek skalowania trzeba sprawdzać dla wszystkich skalarów, także ujemnych.

7.2 Podprzestrzenie funkcji i rozwiązań równań

Przykład 7.5. Funkcje parzyste

Niech $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(-t) = f(t) \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}\}$. Funkcja zerowa jest parzysta. Dla $f, g \in E$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f + \beta g)(-t) = \alpha f(-t) + \beta g(-t) = \alpha f(t) + \beta g(t) = (\alpha f + \beta g)(t).$$

Zatem E jest podprzestrzenią. Na przykład $2t^2 - 3 \cos t$ jest parzysta, bo jest kombinacją dwóch funkcji parzystych.

Przykład 7.6. Warunek na wartość wielomianu

W przestrzeni $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ rozważmy

$$W = \{p : p(1) = 0\}.$$

Wielomian zerowy należy do W . Jeśli $p(1) = q(1) = 0$, to $(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = 0$. Zatem W jest podprzestrzenią. Aby opisać wszystkie jej elementy, piszemy $p(t) = a + bt + ct^2$. Warunek $a + b + c = 0$ daje

$$p(t) = (-b - c) + bt + ct^2 = b(t - 1) + c(t^2 - 1),$$

czyli

$$W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{t - 1, t^2 - 1\}.$$

Zbiór wielomianów spełniających $p(1) = 1$ nie jest podprzestrzenią, ponieważ nie zawiera wielomianu zerowego. Także zbiór wielomianów *dokładnie* stopnia 2 nie jest podprzestrzenią.

Twierdzenie 7.3 (Rozwiązania układu jednorodnego). Dla każdej macierzy $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ zbiór

$$\ker A = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$$

jest podprzestrzenią $\mathbb{K}^n$.

Dowód. Mamy $A0 = 0$. Jeśli $Au = Av = 0$, to z działań współrzędnymi $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = 0$. Stosujemy kryterium podprzestrzeni. $\square$

Przykład 7.7. Prosta rozwiązań jednorodnych i jej przesunięcie

Układ $x - y = 0$, $y - z = 0$ daje $x = y = z = t$, więc jego rozwiązania to $\text{span}\{(1, 1, 1)\}$. Po zmianie pierwszego równania na $x - y = 1$ otrzymujemy

$$(x, y, z) = (1 + t, t, t) = (1, 0, 0) + t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ten zbiór nie jest podprzestrzenią, bo nie zawiera zera. Ogólnie dla $b \neq 0$ zbiór rozwiązań $Ax = b$ nie jest podprzestrzenią, niezależnie od tego, czy jest pusty, czy niepusty.

8 Powłoka jako najmniejsza podprzestrzeń

Twierdzenie 8.1. Dla dowolnego $S \subseteq V$ zbiór $\text{span}_{\mathbb{K}} S$ jest podprzestrzenią zawierającą S . Jest najmniejszą taką podprzestrzenią w sensie zawierania.

Dowód. Wektor zerowy należy do powłoki jako suma pusta. Jeśli $u = \sum_{i=1}^k a_i s_i$ i $v = \sum_{j=1}^{\ell} b_j t_j$, gdzie $s_i, t_j \in S$, to

$$\alpha u + \beta v = \sum_{i=1}^k (\alpha a_i) s_i + \sum_{j=1}^{\ell} (\beta b_j) t_j$$

jest skończoną kombinacją elementów S . Kryterium podprzestrzeni pokazuje, że $\text{span } S$ jest podprzestrzenią. Każdy $s \in S$ należy do niej jako $1 \cdot s$.

Niech teraz W będzie dowolną podprzestrzenią z $S \subseteq W$. Zamknięcie W na skalowanie i skończone sumy daje $\sum a_i s_i \in W$, a więc $\text{span } S \subseteq W$. $\square$

8.1 Opis za pomocą przecięcia

Oznaczmy przez $\mathcal{W}$ rodzinę wszystkich podprzestrzeni $W \subseteq V$ zawierających S . Rodzina jest niepusta, ponieważ $V \in \mathcal{W}$. Wtedy

$$\text{span}_{\mathbb{K}} S = \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W.$$

Z poprzedniego twierdzenia $\text{span } S \subseteq W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, co daje jedno zawieranie. Z drugiej strony $\text{span } S$ samo należy do $\mathcal{W}$, więc przecięcie całej rodziny jest zawarte także w $\text{span } S$. Otrzymujemy równość.

Przykład 8.1. Dopisanie zbędnego wektora nie zmienia powłoki

Weźmy $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (2, 1, 1) = u + v$. Każda kombinacja trzech wektorów upraszcza się do kombinacji dwóch:

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = (\alpha + \gamma)u + (\beta + \gamma)v.$$

Stąd $\text{span}\{u, v, w\} = \text{span}\{u, v\}$. Ponadto

$$su + tv = (s + t, s, t),$$

więc wspólną powłoką jest płaszczyzna $x = y + z$. Wektor $(3, 1, 2) = u + 2v$ do niej należy, a $(3, 1, 1)$ nie należy, bo $3 \neq 1 + 1$.

Dwie przydatne konsekwencje

$$S \subseteq T \Rightarrow \text{span } S \subseteq \text{span } T, \quad \text{span}(\text{span } S) = \text{span } S.$$

Powiększenie zbioru generatorów może powiększyć powłokę; ponowne branie powłoki nie zmienia już otrzymanej podprzestrzeni.

A Najważniejsze pojęcia i schematy rozwiązań

Trzy poziomy opisu

Przestrzeń liniowa: zbiór, ciało i dwa działania spełniające aksjomaty.

Kombinacja liniowa: pojedynczy wektor $\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j$.

Powłoka liniowa: zbiór wszystkich skończonych kombinacji wybranych wektorów; najmniejsza podprzestrzeń, która je zawiera.

Jak sprawdzić podprzestrzeń?

1. Ustal V , ciało $\mathbb{K}$ i działania.
2. Sprawdź, czy $0_V \in W$. Jeśli nie, odpowiedź jest negatywna.
3. Weź dowolne $u, v \in W$ i dowolne $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
4. Wykaż, że $\alpha u + \beta v$ spełnia warunek definiujący W .

Aby dowieść, że zbiór nie jest podprzestrzenią, wystarczy jeden kontrprzykład naruszający konieczny warunek. Aby dowieść, że nią jest, trzeba sprawdzić warunek dla dowolnych wektorów i skalarów.

Jak sprawdzić przynależność do powłoki?

Zapisz

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = b.$$

Porównaj współrzędne, współczynniki wielomianów lub wartości funkcji, zależnie od rodzaju wektorów. Jeśli istnieją odpowiednie współczynniki, to $b \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$. Sprzeczny układ oznacza brak przynależności. Samo przedstawienie nie zawsze jest jednoznaczne.

Przykłady do zapamiętania

Zbiór i działania	Wniosek
$\mathbb{K}^n$, działania współrzędnymi	Przestrzeń nad $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}^X$, działania punktowe	Przestrzeń funkcji nad $\mathbb{K}$.
$\mathbb{R}_{>0}$, $x \oplus y = xy$, $\lambda \odot x = x^\lambda$	Przestrzeń nad $\mathbb{R}$; jej wektorem zerowym jest 1.
$\{x : Ax = 0\}$	Podprzestrzeń przestrzeni niewiadomych.
Prosta przez zero w $\mathbb{R}^2$	Podprzestrzeń; prosta przesunięta poza zero nią nie jest.
$\text{span } S$, także dla $S = \emptyset$	Podprzestrzeń; $\text{span } \emptyset = \{0_V\}$.

Dwa zera. $0_{\mathbb{K}} u = 0_V$, $\lambda 0_V = 0_V$. **Wektor przeciwny.** $(-1)u = -u$.

Równania i kolumny. $Ax = b$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy b należy do powłoki kolumn A .