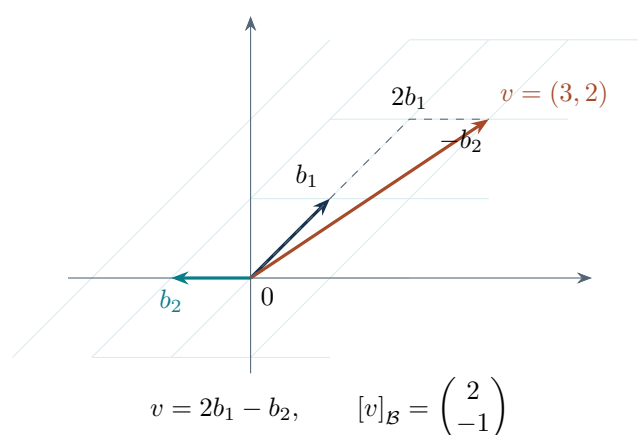


Liniowa niezależność

Baza i wymiar

Wykłady 6–7

Definicje, dowody i rozwiązane przykłady



Od niezależności do współrzędnych

Niezależność oznacza brak niepotrzebnych wektorów. Baza łączy niezależność z możliwością opisaną całej przestrzeni. Współrzędne podają ten opis, a wymiar mówi, ile wektorów musi mieć każda baza.

Spis treści

1	Liniowa niezależność	3
2	Dołączanie wektora do układu	7
3	Badanie niezależności metodą Gaussa	8
4	Baza przestrzeni liniowej	9
5	Współrzędne wektora w bazie	11
6	Bazy przestrzeni wielomianów	13
7	Porównywanie liczby wektorów	15
8	Układy równoważne i rząd układu	16
9	Wymiar przestrzeni liniowej	18
10	Wyodrębnianie i uzupełnianie bazy	21
11	Bazy i wymiary podprzestrzeni	23
A	Zestawienie definicji i metod	24

Oznaczenia i zakres

V jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, zwykle $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Wektory zapisujemy jako kolumny lub krotki; 0 oznacza wektor zerowy. $\text{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_k\}$ to zbiór wszystkich kombinacji liniowych podanych wektorów. Układ wektorów jest uporządkowany i może zawierać powtórzenia. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oznacza uporządkowaną bazę, $[v]_{\mathcal{B}}$ kolumnę współrzędnych, a $\dim_{\mathbb{K}} V$ wymiar nad $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}[t]_{\leq d}$ zawiera wielomiany stopnia co najwyżej d , w tym wielomian zerowy.

Wykład 6: niezależność, baza i współrzędne. **Wykład 7:** porównywanie układów, rząd, wymiar i uzupełnianie bazy.

WYKŁAD 6 | Liniowa niezależność, baza i współrzędne

1 Liniowa niezależność

Intuicja geometryczna

Dwa wektory na tej samej prostej przez zero nie dają dwóch niezależnych kierunków. Jeśli $v \neq 0$ i $w = \lambda v$, to

$$\lambda v - w = 0.$$

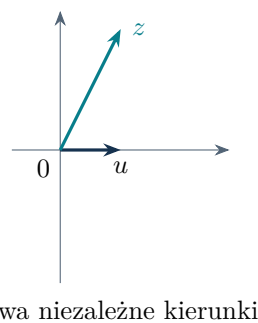
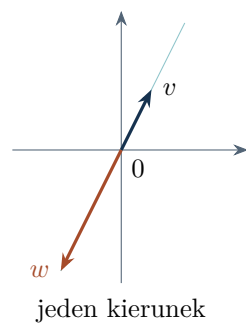
Otrzymaliśmy zero przy współczynnikach, które nie są jednocześnie zerowe. Dla dwóch wektorów niezależnych na jednej prostej przez zero taka relacja nie istnieje.

Przykład 1.1. Dwa kierunki na płaszczyźnie

Dla $v = (1, 2)$, $w = (-2, -4)$ mamy $2v + w = 0$. Natomiast dla $u = (1, 0)$, $z = (1, 2)$ równość

$$\alpha u + \beta z = (\alpha + \beta, 2\beta) = (0, 0)$$

wymusza $\beta = 0$, a następnie $\alpha = 0$. Pierwsza para jest zależna, druga niezależna.



O zależności decydują możliwe relacje liniowe, a nie długości narysowanych strzałek.

W $\mathbb{R}^3$ trzy wektory leżące w jednej płaszczyźnie przez zero są zależne. Jeśli nie mieszczą się w żadnej takiej płaszczyźnie, są niezależne. Płaszczyzna musi przechodzić przez zero: badamy położenie *wektorów*, a nie dowolnych trzech punktów.

Pytanie rozstrzygające

Czy można otrzymać wektor zerowy jako kombinację podanych wektorów, używając choć jednego niezerowego współczynnika?

1.1 Definicja i pierwsze konsekwencje

Definicja 1.1. Układ $(v_1, \dots, v_k)$ jest *liniowo niezależny* nad $\mathbb{K}$, jeśli

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

dla wszystkich $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Jest *liniowo zależny*, jeśli istnieją współczynniki, nie wszystkie zerowe, dla których powyższa suma jest zerem.

Relacja z samymi zerowymi współczynnikami nazywa się *trywialną*. Istnieje zawsze. Zależność oznacza istnienie relacji *nietrywialnej*.

Przykład 1.2. Jeden wektor, zero i powtórzenia

Układ (v) jest niezależny dokładnie wtedy, gdy $v \neq 0$: dla niezerowego v równość $\alpha v = 0$ daje $\alpha = 0$. Układ zawierający zero jest zależny, ponieważ możemy wziąć współczynnik 1 przy zerze i 0 przy pozostałych wektorach.

Jeśli ten sam wektor występuje na dwóch pozycjach, to relacja $1 \cdot v + (-1) \cdot v = 0$ dowodzi zależności. Działa to nad każdym ciałem, także wtedy, gdy $-1 = 1$.

Układ pusty uznajemy za liniowo niezależny. Nie istnieje w nim żaden współczynnik, który mógłby być niezerowy; suma pusta jest równa zeru. Jego powłoka to $\{0\}$.

Przykład 1.3. Niezależność zależy od ciała skalarów

W $\mathbb{C}$ rozważmy układ $(1, i)$. Nad $\mathbb{R}$ z $a + bi = 0$ wynika $a = b = 0$, więc układ jest niezależny. Nad $\mathbb{C}$ istnieje jednak relacja

$$i \cdot 1 - 1 \cdot i = 0,$$

której współczynniki $(i, -1)$ nie są zerowe. Ten sam układ jest więc zależny nad $\mathbb{C}$.

Układ a zbiór

Układ (v, v) zawiera dwie pozycje i jest zależny. Zbiór $\{v, v\} = \{v\}$ zawiera tylko jeden element; dla $v \neq 0$ jest niezależny. Przy współrzędnych znaczenie ma również kolejność wektorów.

1.2 Podukłady i zależność całego układu

Podukład układu $(v_1, \dots, v_k)$ otrzymujemy, wybierając pozycje $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k$. Jest nim $(v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell})$. Nie zmieniamy przy tym kolejności wybranych pozycji.

Twierdzenie 1.2. Jeśli pewien podukład jest liniowo zależny, to cały układ jest zależny. Równoważnie: każdy podukład układu liniowo niezależnego jest niezależny.

Dowód. Niech $c_1 v_{i_1} + \dots + c_\ell v_{i_\ell} = 0$ będzie relacją nietrywialną. Uzupełniamy jej współczynniki zerami na niewybranych pozycjach:

$$a_j = \begin{cases} c_r, & j = i_r, \\ 0, & j \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}. \end{cases}$$

Wtedy $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$, a co najmniej jedno a_j jest niezerowe. To relacja nietrywialna dla całego układu. Druga wersja twierdzenia jest kontrapozycją pierwszej. $\square$

Przykład 1.4. Zależna para wystarcza

Układ

$$((1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0), (0, 0, 1))$$

jest zależny, bo pierwszy i trzeci wektor spełniają $2(1, 0, 0) - (2, 0, 0) = 0$. Współczynniki całej relacji to $(2, 0, -1, 0)$. Nie trzeba rozwiązywać układu czterech niewiadomych.

Przykład 1.5. Niezależność parami nie wystarcza

Niech $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$. Każda para jest niezależna: żaden z tych niezerowych wektorów nie jest wielokrotnością drugiego. Cała trójka spełnia jednak

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0,$$

więc jest zależna. Zależność może ujawnić się dopiero przy użyciu trzech lub większej liczby wektorów.

Uwaga

Z zależności całego układu nie wynika zależność każdego podukładu. Z niezależności wybranej pary nie wynika niezależność całego układu. Twierdzenie pozwala przenosić niezależność w dół i zależność w górę.

1.3 Zależność jako możliwość usunięcia wektora

Twierdzenie 1.3. Niepusty układ $(v_1, \dots, v_k)$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden jego wektor jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. Jeśli $\sum_j \alpha_j v_j = 0$ i $\alpha_i \neq 0$, to

$$\alpha_i v_i = - \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j, \quad v_i = - \sum_{j \neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} v_j.$$

Dzielenie jest dozwolone, bo pracujemy nad ciałem. Odwrotnie, z $v_i = \sum_{j \neq i} c_j v_j$ dostajemy $\sum_{j \neq i} c_j v_j - v_i = 0$. Współczynnik przy v_i wynosi $-1 \neq 0$, więc relacja jest nietrywialna. $\square$

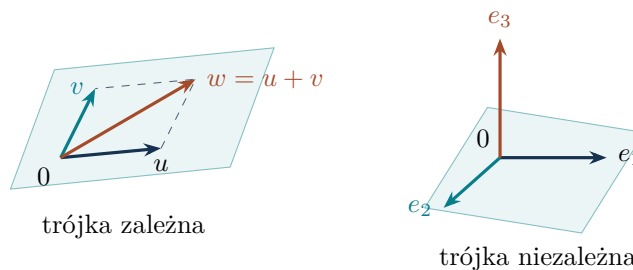
Dla układu jednoelementowego „kombinacja pozostałych” jest sumą pustą, czyli zerem. Twierdzenie obejmuje więc także układ (0) . Jeśli v_i jest kombinacją pozostałych, usunięcie go nie zmienia powłoki.

Przykład 1.6. Trzy wektory w jednej płaszczyźnie

Niech $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 1, 2)$. Mamy $w = u + v$, a zatem

$$\text{span}\{u, v, w\} = \text{span}\{u, v\} = \{(s, t, s+t) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

To płaszczyzna $z = x + y$. Para (u, v) jest niezależna: pierwsza i druga współrzędna równania $\alpha u + \beta v = 0$ dają $\alpha = \beta = 0$. Trójka jest zależna, choć żadne dwa jej wektory nie są współliniowe.



W $\mathbb{R}^3$ dwa niezależne wektory rozpinają płaszczyznę. Trzeci daje niezależną trójkę tylko poza tą płaszczyznę.

2 Dołączanie wektora do układu

Twierdzenie 2.1. Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie liniowo niezależny i niech $w \in V$. Wtedy

$$(v_1, \dots, v_k, w) \text{ jest zależny} \iff w \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}.$$

Równoważnie: dołączenie w zachowuje niezależność dokładnie wtedy, gdy w leży poza dotychczasową powłoką.

Dowód. Jeśli $w = \sum_j c_j v_j$, to $\sum_j c_j v_j - w = 0$ jest relacją nietrywialną. W drugą stronę założmy, że

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta w = 0$$

jest relacją nietrywialną. Gdyby $\beta = 0$, niezależność początkowego układu dałaby $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, wbrew nietrywialności. Zatem $\beta \neq 0$ i

$$w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\beta} v_k.$$

□

Przykład 2.1. Sprawdzenie dowolnego trzeciego wektora

Weźmy w $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, -2), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad w = (a, b, c).$$

Para (v_1, v_2) jest niezależna, bo $\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha, \beta, -2\alpha) = 0$ wymusza $\alpha = \beta = 0$. Ponadto

$$\text{span}\{v_1, v_2\} = \{(s, t, -2s) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Równość $w = sv_1 + tv_2$ wymusza $s = a$, $t = b$, a trzecią współrzędną można dopasować wtedy i tylko wtedy, gdy $c = -2a$. Dlatego

$$(v_1, v_2, w) \text{ jest niezależny} \iff c + 2a \neq 0.$$

Dla $w = (1, 1, -2)$ mamy $w = v_1 + v_2$, więc trójka jest zależna. Dla $w = (0, 0, 1)$ warunek wynosi $1 \neq 0$, więc trójka jest niezależna.

Dlaczego początkowy układ musi być niezależny?

Układ $((1, 0), (2, 0))$ jest zależny. Wektor $(0, 1)$ leży poza jego powłoką, ale po dołączeniu go cała trójka nadal zawiera zależną parę. Nowy wektor nie usuwa wcześniejszej zależności.

3 Badanie niezależności metodą Gaussa

Dla $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^m$ budujemy macierz z tych wektorów jako kolumn:

$$A = [v_1 \ \cdots \ v_k].$$

Szukamy rozwiązań układu jednorodnego $A\alpha = 0$. Układ wektorów jest niezależny dokładnie wtedy, gdy jedynym rozwiązaniem jest $\alpha = 0$. Jeśli istnieją parametry swobodne, wybieramy ich wartości tak, aby otrzymać niezerowy wektor współczynników.

Kryterium po eliminacji

Kolumny są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy w każdej kolumnie jest pivot. Jeśli kolumn jest więcej niż wierszy, niezależność jest niemożliwa. Operacje na wierszach zachowują zbiór rozwiązań $A\alpha = 0$.

Przykład 3.1. Dwa wektory niezależne w $\mathbb{R}^2$

Badamy $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-2, 3)$. Równanie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ ma macierz współczynników

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Drugi wiersz daje $\alpha_2 = 0$, pierwszy $\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$, zatem $\alpha_1 = 0$. Para jest niezależna.

Przykład 3.2. Jak odczytać konkretną relację zależności?

Dla $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (2, 4)$ dostajemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pozostaje $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$. Przyjmując $\alpha_2 = t$, mamy $\alpha_1 = -2t$. Dla $t = 1$ otrzymujemy relację

$$-2u_1 + u_2 = 0.$$

Aby wykazać zależność, wystarczy ta jedna relacja z niezerowymi współczynnikami.

Uwaga o skalarach. Pierwszy przykład jest rozpatrywany nad $\mathbb{R}$. Nad ciałem $\mathbb{F}_7$ liczba 7 jest zerem i nie wolno przez nią dzielić. Wtedy druga kolumna jest równa -2 razy pierwsza, więc para jest zależna.

4 Baza przestrzeni liniowej

Definicja 4.1. Układ $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ jest *bazą* przestrzeni V , jeśli

1. jest liniowo niezależny;
2. rozpiną całą przestrzeń: $V = \text{span}_{\mathbb{K}}\{b_1, \dots, b_n\}$.

Pierwszy warunek zapewnia brak zbędnych wektorów, a drugi możliwość opisanie każdego wektora z V . Niezależny układ zawsze jest bazą swojej własnej powłoki, lecz nie musi być bazą większej przestrzeni, w której go umieszczono.

Przykład 4.1. Baza standardowa

W $\mathbb{K}^n$ oznaczmy przez e_j wektor z 1 na pozycji j i zerami na pozostałych pozycjach. Wtedy

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Wektory $e_1, \dots, e_n$ rozpinają $\mathbb{K}^n$. Jeżeli $\sum_j \alpha_j e_j = 0$, to każda współrzędna daje $\alpha_j = 0$, więc są niezależne. Układ $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ jest bazą standardową.

W $\mathbb{R}^3$ jest to

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para (e_1, e_2) jest bazą płaszczyzny $z = 0$, lecz nie jest bazą $\mathbb{R}^3$. Nie da się z niej zbudować e_3 .

Twierdzenie 4.2. Każdy układ n liniowo niezależnych wektorów w $\mathbb{K}^n$ jest bazą $\mathbb{K}^n$.

Dowód. Macierz A z tych kolumn ma po eliminacji pivot w każdej z n kolumn. Ma też dokładnie n wierszy, więc w każdym wierszu jest pivot. Dla dowolnej prawej strony b układ $Ax = b$ rozwiążemy przez podstawianie wsteczne: nie ma wiersza o zerowej lewej stronie, który mógłby wywołać sprzeczność. Każdy b jest zatem kombinacją kolumn A . $\square$

W szczególności dwie niezależne kolumny w $\mathbb{R}^2$ tworzą bazę płaszczyzny, a trzy niezależne kolumny w $\mathbb{R}^3$ tworzą bazę przestrzeni trójwymiarowej.

Dwa warunki są konieczne

Niezależna para w $\mathbb{R}^3$ może nie rozpinąć przestrzeni. Układ $(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2)$ rozpiną $\mathbb{R}^3$, ale jest zależny, więc również nie jest bazą.

4.1 Pełne przedstawienie wektora w bazie płaszczyzny

Przykład 4.2. Baza $(1, 2), (-2, 3)$

Rozważmy bazę $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$, gdzie $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-2, 3)$. Dla dowolnego $b = (b_1, b_2)$ szukamy

$$b = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2.$$

Porównanie współrzędnych daje

$$\begin{cases} \beta_1 - 2\beta_2 = b_1, \\ 2\beta_1 + 3\beta_2 = b_2. \end{cases}$$

Odejmujemy podwojone pierwsze równanie od drugiego:

$$7\beta_2 = b_2 - 2b_1, \quad \beta_2 = \frac{b_2 - 2b_1}{7}.$$

Następnie

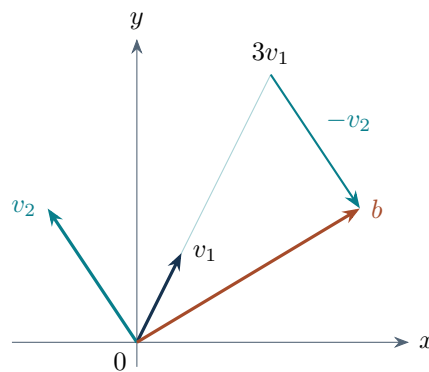
$$\beta_1 = b_1 + 2\beta_2 = \frac{3b_1 + 2b_2}{7}.$$

Znaleźliśmy dokładnie jedno przedstawienie dla każdego $b \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{3b_1 + 2b_2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{b_2 - 2b_1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dla $b = (5, 3)$ współczynniki wynoszą $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = -1$. Sprawdzenie:

$$3(1, 2) - (-2, 3) = (3, 6) + (2, -3) = (5, 3).$$



Współczynnik przy wektorze bazowym może być ujemny. Tutaj $b = 3v_1 - v_2$.

5 Współrzędne wektora w bazie

Twierdzenie 5.1 (Jednoznaczność przedstawienia). Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ jest bazą V , to każdy $v \in V$ ma dokładnie jedno przedstawienie

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n.$$

Dowód. Istnienie wynika z warunku $V = \text{span}\{b_1, \dots, b_n\}$. Jeżeli również $v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$, odejmujemy obie równości:

$$0 = \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j) b_j.$$

Niezależność bazy daje $\alpha_j - \beta_j = 0$ dla każdego j . Zatem oba zestawy współczynników są identyczne. $\square$

Definicja 5.2. Kolumnę współczynników tego przedstawienia nazywamy *współrzędnymi* wektora v w uporządkowanej bazie $\mathcal{B}$:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Wektor jest elementem V , natomiast jego kolumna współrzędnych należy do $\mathbb{K}^n$. To rozróżnienie jest szczególnie wyraźne, gdy wektorami są wielomiany lub funkcje.

Twierdzenie odwrotne. Jeśli każdy $v \in V$ ma dokładnie jedno przedstawienie względem układu $(b_1, \dots, b_n)$, to układ jest bazą. Istnienie przedstawień daje rozpinanie. Jednoznaczność przedstawienia zera wyklucza relację nietrywialną, więc daje niezależność.

Przykład 5.1. Współrzędne zależą od kolejności

W bazie $\mathcal{B} = ((1, 2), (-2, 3))$ wektor $(5, 3)$ ma współrzędne $(3, -1)^T$. W bazie $\mathcal{B}' = ((-2, 3), (1, 2))$ ten sam wektor ma współrzędne $(-1, 3)^T$. Zmieniły się pozycje współczynników, a nie sam wektor.

Działania na współrzędnych

Dla ustalonej bazy $\mathcal{B}$

$$[u + v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}, \quad [\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}}.$$

Wynika to z dodania lub przeskalowania rozwinięć w tej samej bazie i z jednoznaczności współczynników.

Nie dodajemy kolumn zapisanych w różnych bazach bez uprzedniego sprowadzenia ich do tej samej bazy.

5.1 Współrzędne w bazie nieortogonalnej

Przykład 5.2. Baza $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 0))$

Dla $v = (x, y)$ szukamy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Porównanie współrzędnych daje

$$\alpha = y, \quad \beta = y - x, \quad \boxed{[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y \\ y - x \end{pmatrix}}.$$

Rozwiązanie istnieje i jest jedyne dla każdego (x, y) , więc $\mathcal{B}$ jest bazą. Dla $v = (3, 2)$ otrzymujemy $[v]_{\mathcal{B}} = (2, -1)^T$, a sprawdzenie ma postać $2(1, 1) - (-1, 0) = (3, 2)$.

Macierz bazy i kierunek przeliczania

Kolumny bazy zapisane we współrzędnych standardowych tworzą macierz

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

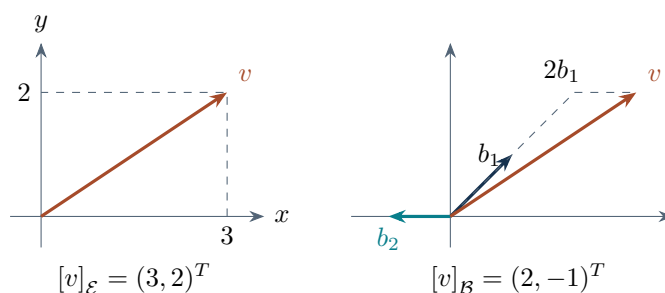
Jej mnożenie przez kolumnę współrzędnych odtwarza wektor:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{[v]_{\mathcal{E}}} = P_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{[v]_{\mathcal{B}}}.$$

Z otrzymanego wcześniej wzoru $(\alpha, \beta) = (y, y - x)$ wynika

$$P_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}}.$$

Bezpośrednie pomnożenie obu macierzy daje macierz jednostkową.



Ten sam wektor ma różne kolumny współrzędnych. Baza nie musi składać się z wektorów prostopadłych ani jednostkowych.

6 Bazy przestrzeni wielomianów

6.1 Wielomiany o ograniczonym stopniu

Dla $d \geq 0$ przestrzeń

$$\mathbb{K}[t]_{\leq d} = \{a_0 + a_1t + \cdots + a_d t^d : a_j \in \mathbb{K}\}$$

ma bazę standardową $(1, t, \dots, t^d)$. Rozpinanie wynika wprost z zapisu wielomianu. Niezależność wynika z tego, że wielomian zerowy ma wszystkie współczynniki równe zeru. Pracujemy z wielomianami formalnymi, więc porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach.

Przykład 6.1. Dwie bazy wielomianów stopnia co najwyżej jeden

W $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ weźmy

$$\mathcal{E} = (1, t), \quad \mathcal{B} = (1 + t, 1 - t).$$

Dla $p(t) = a_0 + a_1t$ współrzędne standardowe to $(a_0, a_1)^T$. Aby wyznaczyć współrzędne w $\mathcal{B}$, piszemy

$$\begin{aligned} a_0 + a_1t &= \beta_1(1 + t) + \beta_2(1 - t) \\ &= (\beta_1 + \beta_2) + (\beta_1 - \beta_2)t. \end{aligned}$$

Porównanie współczynników daje

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = a_0, \\ \beta_1 - \beta_2 = a_1. \end{cases}$$

Dodając i odejmując równania, dostajemy

$$[p]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie jest jednoznaczne dla każdego wielomianu, więc $\mathcal{B}$ jest bazą. Dla $p(t) = 5 + 3t$ mamy $[p]_{\mathcal{B}} = (4, 1)^T$, ponieważ

$$4(1 + t) + (1 - t) = 5 + 3t.$$

Przykład 6.2. Współrzędne wielomianu kwadratowego

W bazie $(1, t, t^2)$ wielomian $q(t) = 2 - 3t + 4t^2$ ma współrzędne $(2, -3, 4)^T$. W bazie o zmienionej kolejności $(t^2, 1, t)$ jego współrzędne wynoszą $(4, 2, -3)^T$.

Dlaczego w przykładzie użyliśmy $\mathbb{R}$?

Wzór dla bazy $(1 + t, 1 - t)$ wymaga dzielenia przez 2. Nad ciałem o charakterystyce 2 mamy $1 + t = 1 - t$, więc ten układ jest zależny. Baza standardowa $(1, t, \dots, t^d)$ działa nad każdym ciałem.

6.2 Dlaczego cała przestrzeń wielomianów nie ma skończonej bazy?

Rozważmy $\mathbb{K}[t]$, czyli wielomiany bez wspólnego ograniczenia na stopień. Załóżmy, że skończony układ $(p_1, \dots, p_m)$ rozpina tę przestrzeń. Wielomiany zerowe można usunąć z układu. Same zera nie rozpinają 1, więc pozostaje co najmniej jeden wielomian niezerowy. Niech

$$d = \max_{1 \leq j \leq m, p_j \neq 0} \deg p_j.$$

W każdej kombinacji $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m$ współczynnik przy t^{d+1} wynosi zero. Żadna taka kombinacja nie jest równa t^{d+1} . To sprzeczność z rozpinaniem $\mathbb{K}[t]$.

Przestrzeń $\mathbb{K}[t]$ nie ma skończonej bazy. Ma natomiast bazę nieskończoną

$$1, t, t^2, t^3, \dots$$

Każdy wielomian używa tylko skończenie wielu elementów tej bazy.

Co oznacza baza nieskończona?

Układ nieskończony jest liniowo niezależny, gdy każdy jego skończony podukład jest niezależny. Jest bazą algebraiczną, gdy dodatkowo każdy wektor przestrzeni jest *skończoną* kombinacją jego elementów. Jednomiany spełniają te warunki: każda skończona relacja między nimi ma wszystkie współczynniki zerowe, a każdy wielomian jest skończoną sumą jednomianów.

Przykład 6.3. Nieskończona baza, lecz skończone przedstawienie

Dla $p(t) = 2 - 3t^2 + t^4$ lista współczynników względem $(1, t, t^2, \dots)$ to

$$(2, 0, -3, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

Tylko trzy pozycje są niezerowe. Natomiast wyrażenie $1 + t + t^2 + t^3 + \dots$ nie jest wielomianem ani dozwoloną kombinacją liniową w $\mathbb{K}[t]$.

Kontrast. W $\mathbb{K}[t]_{\leq d}$ wystarczy $d + 1$ jednomianów $1, t, \dots, t^d$. W $\mathbb{K}[t]$ stopnie nie mają wspólnego ograniczenia, więc nie wystarczy żaden układ skończony.

Dalsze twierdzenia o porównywaniu liczby wektorów i konstruowaniu baz będziemy stosować do układów skończonych. W przypadku $\mathbb{K}[t]$ nieskończoną bazę mamy już podaną jawnie.

WYKŁAD 7 | Rząd, wymiar i konstruowanie baz

7 Porównywanie liczby wektorów

Twierdzenie 7.1 (Podstawowe oszacowanie). Niech $(e_1, \dots, e_s)$ będzie liniowo niezależny. Jeśli każdy e_i należy do $\text{span}\{f_1, \dots, f_t\}$, to $s \leq t$. Układ $(f_1, \dots, f_t)$ nie musi być niezależny.

Dowód. Zapiszmy

$$e_i = \sum_{j=1}^t c_{ji} f_j, \quad i = 1, \dots, s.$$

Macierz współczynników $C = (c_{ji})$ ma t wierszy i s kolumn. Gdyby $s > t$, układ jednorodny $C\beta = 0$ miałby więcej niewiadomych niż równań. Eliminacja pozostawiłaby co najmniej jedną zmienną wolną, więc istniałoby rozwiązanie $\beta \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \beta_i e_i &= \sum_{i=1}^s \beta_i \sum_{j=1}^t c_{ji} f_j \\ &= \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i=1}^s c_{ji} \beta_i \right) f_j = \sum_{j=1}^t 0 \cdot f_j = 0. \end{aligned}$$

Byłaby to relacja nietrywialna między niezależnymi e_i . Sprzeczność dowodzi $s \leq t$. $\square$

Sens twierdzenia

W przestrzeni rozpiętej przez t wektorów nie da się znaleźć więcej niż t liniowo niezależnych wektorów.

Przykład 7.1. Trzy wektory zbudowane z dwóch

Niech $u_1 = 2p + q$, $u_2 = p - q$, $u_3 = 3p$. Wszystkie leżą w $\text{span}\{p, q\}$, więc trójka jest zależna. Tutaj konkretną relację widać bez eliminacji:

$$u_1 + u_2 - u_3 = (2p + q) + (p - q) - 3p = 0.$$

Nie trzeba przy tym zakładać niezależności p, q .

Wniosek dla baz

Jeśli dwie skończone bazy tej samej przestrzeni mają odpowiednio s i t elementów, to $s \leq t$, ponieważ pierwsza jest niezależna, a druga ją rozpina. Zamiana ról daje $t \leq s$. Zatem $s = t$. To uzasadnia późniejszą definicję wymiaru jako liczby elementów bazy.

8 Układy równoważne i rząd układu

8.1 Równoważność układów

Dwa układy nazywamy *równoważnymi*, jeśli każdy wektor jednego jest kombinacją wektorów drugiego i odwrotnie. Jest to dokładnie warunek

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_s\} = \text{span}\{w_1, \dots, w_t\}.$$

Równoważność nie oznacza, że układy mają tyle samo elementów ani że oba są niezależne. Jeśli jednak oba skończone układy są niezależne, podstawowe oszacowanie zastosowane w obu kierunkach daje $s = t$.

Przykład 8.1. Dwa układy rozpinające tę samą płaszczyznę

Niech

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Najpierw wyrażamy w_j przez v_1, v_2 :

$$w_1 = v_1 + v_2, \quad w_2 = 2v_1 - v_2, \quad w_3 = 5v_2.$$

W drugą stronę wystarczy

$$v_2 = \frac{1}{5}w_3, \quad v_1 = w_1 - \frac{1}{5}w_3.$$

Układy (v_1, v_2) i (w_1, w_2, w_3) są zatem równoważne. Ich wspólna powłoka to

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2x\}.$$

Para (v_1, v_2) jest niezależna. Trójka (w_1, w_2, w_3) jest zależna; konkretna relacja wynika z

$$w_2 = 2w_1 - \frac{3}{5}w_3, \quad \boxed{10w_1 - 5w_2 - 3w_3 = 0}.$$

Para (w_1, w_3) jest niezależna: z $aw_1 + bw_3 = (a, a + 5b, -2a) = 0$ wynika $a = 0$, a potem $b = 0$. Jest więc inną bazą tej samej płaszczyzny W .

Co pozostaje niezmiennie?

Można dopisać wektor będący kombinacją pozostałych lub usunąć taki wektor. Powłoka się nie zmienia, choć liczba elementów układu może się zmienić. Liczba wektorów w niezależnym układzie rozpinającym tę powłokę jest stała.

8.2 Rząd i wybór kolumn bazowych

Definicja 8.1. *Rząd skończonego układu* to liczba wektorów w jego maksymalnym liniowo niezależnym podukładzie. „Maksymalny” oznacza, że nie da się dołączyć żadnego kolejnego wektora z rozpatrywanego układu, zachowując niezależność.

Taki podukład rozpiną wszystkie wektory układu: gdyby jakiś leżał poza jego powłoką, można by go dołączyć. Dowolne dwa maksymalne podukłady niezależne są zatem równoważne, więc mają tyle samo elementów. Definicja rzędu jest jednoznaczna.

Dla macierzy $A = [v_1 \cdots v_k]$ rząd jej kolumn to liczba pivotów. Numery kolumn z pivotami wskazują niezależny podukład rozpinający wszystkie kolumny. **Wektory tego podukładu odczytujemy z macierzy przed eliminacją.**

Przykład 8.2. Rząd układu (w_1, w_2, w_3)

Dla wektorów z poprzedniego przykładu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Po $R_2 \leftarrow -\frac{1}{3}R_2$ i $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$ dostajemy

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Są dwa pivoty: w kolumnach 1 i 2. Rząd wynosi 2, a bazą powłoki jest para (w_1, w_2) z pierwotnej macierzy A . Z trzeciej kolumny odczytujemy

$$w_3 = \frac{10}{3}w_1 - \frac{5}{3}w_2,$$

co po pomnożeniu przez 3 daje tę samą relację zależności co poprzednio.

Dlaczego wybieramy kolumny pierwotnej macierzy?

Operacje na wierszach zachowują równanie $A\alpha = 0$, więc zachowują *współczynniki relacji* między kolumnami. Mogą jednak zmieniać same wektory. Pierwsze dwie kolumny R to e_1, e_2 , które rozpinają płaszczyznę $z = 0$. Pierwsze dwie kolumny A rozpinają inną płaszczyznę, $z = -2x$. Na przykład e_1 do niej nie należy.

Eliminacja wybiera **numery** kolumn. Baza powłoki danych wektorów składa się z odpowiednich **danych wektorów**.

9 Wymiar przestrzeni liniowej

Przestrzeń nazywamy *skończoną wymiarową*, jeśli ma skończoną bazę. Każdy skończony układ generatorów można zredukować do bazy: usuwamy wektory będące kombinacjami pozostałych, aż układ stanie się niezależny. Powłoka się nie zmienia, a proces kończy się, bo długość układu maleje.

Definicja 9.1. Wymiarem skończenia wymiarowej przestrzeni V nad $\mathbb{K}$ nazywamy liczbę wektorów w dowolnej jej bazie. Oznaczamy ją $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Wszystkie skończone bazy mają tę samą liczbę elementów, co wynika z twierdzenia o porównywaniu układów. Wymiar nie zależy więc od wyboru bazy.

Przestrzeń zerowa

$\dim\{0\} = 0$. Bazą $\{0\}$ jest układ pusty: jest niezależny i ma powłokę $\{0\}$. Układ jednoelementowy (0) jest zależny i nie jest bazą.

Podstawowe wymiary

Przestrzeń	Wymiar	Przykładowa baza
$\mathbb{K}^n$ nad $\mathbb{K}$	n	$e_1, \dots, e_n$.
$\mathbb{K}[t]_{\leq d}$	$d + 1$	$1, t, \dots, t^d$.
$M_{m \times n}(\mathbb{K})$	mn	Macierze E_{ij} z jedną jedynką na pozycji (i, j) .
$\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$	2	$1, i$.
$\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$	1	1 .

Każda macierz jest jednoznacznie sumą $\sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$, co uzasadnia wiersz dotyczący macierzy.

Przykład 9.1. Zmiana ciała zmienia wymiar

W $\mathbb{C}^n$ jako przestrzeni nad $\mathbb{R}$ bazą jest

$$e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n.$$

Każdą współrzędną zapisujemy jednoznacznie jako $a_j + ib_j$ z rzeczywistymi a_j, b_j . Zatem $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$, podczas gdy $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$.

Przestrzeń $\mathbb{K}[t]$ jest nieskończenie wymiarowa. Zapis $\dim \mathbb{K}[t] = \infty$ będzie tu oznaczał brak skończonej bazy. Dla skończonego układu U mamy teraz również

$$\text{rank } U = \dim \text{span } U,$$

ponieważ maksymalny niezależny podukład jest bazą jego powłoki.

9.1 Kryteria bazy w przestrzeni o znanym wymiarze

Niech $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Z podstawowego oszacowania wynikają dwa ograniczenia: każdy układ niezależny ma co najwyżej n wektorów, a każdy skończony układ rozpinający V ma co najmniej n wektorów.

Twierdzenie 9.2. Dla układu dokładnie n wektorów w V następujące warunki są równoważne:

1. układ jest bazą V ;
2. układ jest liniowo niezależny;
3. układ rozpinają V .

Dowód. Baza spełnia pozostałe warunki z definicji. Jeśli układ n wektorów jest niezależny, ale nie rozpinają V , można dołączyć wektor spoza jego powłoki. Otrzymalibyśmy $n+1$ wektorów niezależnych, co przeczy ograniczeniu.

Jeśli układ n wektorów rozpinają V , ale jest zależny, można usunąć jeden wektor bez zmiany powłoki. Powstałby układ $n-1$ generatorów, co przeczy drugiemu ograniczeniu. Zatem układ jest niezależny. $\square$

Szybkie wnioski

- Więcej niż n wektorów w V zawsze daje układ zależny.
- Mniej niż n wektorów nie może rozpiąć V .
- Każdy układ niezależny, do którego nie można dołączyć żadnego wektora z V , jest bazą V .

Ostatni punkt wynika z kryterium dołączania: brak możliwości powiększenia układu oznacza, że każdy wektor V leży już w jego powłoce. Wymiar jest zatem również największą możliwą liczbą wektorów niezależnych.

Przykład 9.2. Wykorzystanie znanego wymiaru

Przestrzeń $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ ma wymiar 3. Cztery wielomiany $1, t, t^2, 1+t+t^2$ są więc zależne; konkretnie ostatni jest sumą trzech pierwszych. Dwa wielomiany $1, t$ nie tworzą bazy tej przestrzeni.

Układ $(1+t, t+t^2, t^2)$ ma trzy elementy. W relacji

$$\alpha(1+t) + \beta(t+t^2) + \gamma t^2 = 0$$

współczynniki dają kolejno $\alpha = 0$, $\alpha + \beta = 0$, $\beta + \gamma = 0$. Zatem $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Układ jest niezależny i dzięki znanemu wymiarowi od razu wiemy, że jest bazą.

9.2 Przykład z parametrem: kiedy zmienia się wymiar powłoki?

Przykład 9.3. Rodzina trzech wektorów w $\mathbb{R}^3$

Niech $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$, $w_\lambda = (1, 1, \lambda)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$. Macierz kolumn redukujemy następująco:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

Zapis nad strzałką oznacza dwa kolejne odjęcia od trzeciego wiersza.

Jeśli $\lambda \neq 2$, są trzy pivoty. Układ jest niezależny, jest bazą $\mathbb{R}^3$, a wymiar jego powłoki wynosi 3.

Jeśli $\lambda = 2$, mamy $w_2 = u + v$. Rząd wynosi 2, a bazą powłoki jest (u, v) . Powłoka jest płaszczyzną $z = x + y$.

Dla $b = (x, y, z)$ równanie $\alpha u + \beta v + \gamma w_\lambda = b$ daje

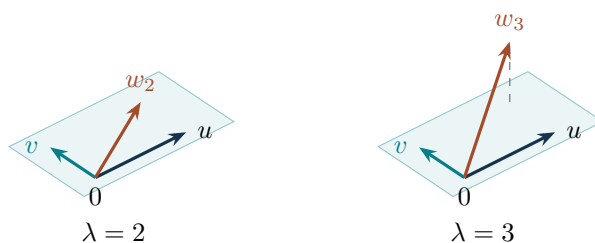
$$\alpha + \gamma = x, \quad \beta + \gamma = y, \quad (\lambda - 2)\gamma = z - x - y.$$

Gdy $\lambda \neq 2$, współrzędne są jednoznaczne:

$$\gamma = \frac{z - x - y}{\lambda - 2}, \quad \alpha = x - \gamma, \quad \beta = y - \gamma.$$

Gdy $\lambda = 2$, przedstawienie istnieje dokładnie dla $z = x + y$. Wtedy $\gamma = t$, $\alpha = x - t$, $\beta = y - t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$: jest nieskończenie wiele przedstawień.

Dla $\lambda = 3$ i $b = (2, 3, 7)$ otrzymujemy $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 2)$. Sprawdzenie: $v + 2w_3 = (0, 1, 1) + 2(1, 1, 3) = (2, 3, 7)$.



Dla $\lambda = 2$ trzeci wektor jest w płaszczyźnie dwóch pierwszych; dla $\lambda = 3$ leży poza nią.

10 Wyodrębnianie i uzupełnianie bazy

Twierdzenie 10.1 (Uzupełnianie do bazy). Niech $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą V , a $(f_1, \dots, f_s)$ układem liniowo niezależnym. Wtedy $s \leq n$ i można dołączyć do tego układu $n - s$ wektorów wybranych spośród $e_1, \dots, e_n$, otrzymując bazę V .

Dowód. Nierówność $s \leq n$ wynika z porównania układów. Zaczynamy od niezależnego układu $F = (f_1, \dots, f_s)$. Przeglądamy kolejno $e_1, \dots, e_n$. Jeśli dany e_j leży w powłoce już zachowanych wektorów, pomijamy go. Jeśli leży poza nią, dołączamy go. Kryterium dołączania gwarantuje niezależność na każdym etapie.

Po zakończeniu każdy e_j jest zachowany albo jest kombinacją wektorów zachowanych wcześniej. Wszystkie e_j leżą więc w końcowej powłoce, która musi być całym V . Końcowy układ jest niezależny i rozpina V , więc jest bazą. Ma n elementów, zatem do początkowych s dołączono $n - s$. $\square$

Wybieranie bazy z układu generatorów

Ten sam sposób działa, gdy zaczniemy od układu pustego i będziemy przeglądać skończony układ generatorów $(v_1, \dots, v_k)$.

1. Zachowaj wektor, jeśli leży poza powłoką dotychczas zachowanych.
2. Pomiń go, jeśli już do tej powłoki należy.
3. Po przejrzaniu wszystkich wektorów zachowany układ jest bazą ich powłoki.

Pominięcie wektora nie zmienia końcowej powłoki, a zachowanie nowego wektora zawsze zwiększa długość niezależnego układu o jeden.

Przykład 10.1. Przeglądanie układu od lewej do prawej

Rozpatrzmy w $\mathbb{R}^2$

$$(0, 0), \quad (1, 1), \quad (2, 2), \quad (1, -1), \quad (3, 1).$$

Zero pomijamy. Zachowujemy $(1, 1)$, a $(2, 2) = 2(1, 1)$ pomijamy. Wektor $(1, -1)$ nie jest wielokrotnością $(1, 1)$, więc go zachowujemy. Ostatni wektor pomijamy, ponieważ

$$(3, 1) = 2(1, 1) + (1, -1).$$

Otrzymana baza powłoki to $((1, 1), (1, -1))$. Są to dwa niezależne wektory w $\mathbb{R}^2$, więc powłoką całego układu jest $\mathbb{R}^2$, a jego rząd wynosi 2.

10.1 Pełny przykład uzupełniania bazy

Przykład 10.2. Dwa ustalone wektory w $\mathbb{R}^3$

Niech $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$. Relacja $af_1 + bf_2 = (a, a + b, b) = 0$ wymusza $a = b = 0$, więc początkowy układ jest niezależny. Jego powłoka to

$$\{(s, s + t, t) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : y = x + z\}.$$

Przeglądamy bazę standardową e_1, e_2, e_3 .

1. $e_1 = (1, 0, 0)$ nie spełnia $y = x + z$, bo $0 \neq 1$. Dołączamy e_1 . Układ (f_1, f_2, e_1) jest niezależny.
2. $e_2 = f_1 - e_1$, więc jest już w powłoce. Pomijamy go.
3. $e_3 = f_2 - f_1 + e_1$, więc również jest w powłoce. Pomijamy go.

Otrzymujemy bazę

$$\mathcal{B} = (f_1, f_2, e_1) = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0)).$$

Do dwóch niezależnych wektorów dołączyliśmy dokładnie jeden.

Sprawdzenie rozpinania i wyznaczenie współrzędnych

Dla dowolnego $w = (x, y, z)$ równanie

$$w = af_1 + bf_2 + ce_1 = (a + c, a + b, b)$$

daje kolejno

$$b = z, \quad a = y - z, \quad c = x - y + z.$$

Zatem

$$[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y - z \\ z \\ x - y + z \end{pmatrix}.$$

Dla $w = (2, 3, 4)$ otrzymujemy współrzędne $(-1, 4, 3)^T$. Kontrola:

$$-f_1 + 4f_2 + 3e_1 = (-1, -1, 0) + (0, 4, 4) + (3, 0, 0) = (2, 3, 4).$$

Uzupełnienie nie musi być jedyne

Można też dołączyć e_2 , ponieważ nie leży w początkowej płaszczyźnie. Układ (f_1, f_2, e_2) również jest bazą: $e_1 = f_1 - e_2$ i $e_3 = f_2 - e_2$. Obie bazy zachowują dwa zadane wektory, lecz mają inny trzeci element.

11 Bazy i wymiary podprzestrzeni

Twierdzenie 11.1. Jeśli W jest podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni V , to W ma skończoną bazę, $\dim W \leq \dim V$, a każdą bazę W można uzupełnić do bazy V .

Dowód. Dla $W = \{0\}$ bierzemy bazę pustą. W przeciwnym razie wybieramy w W niezerowy wektor i dołączamy kolejne wektory z W spoza dotychczasowej powłoki, dopóki to możliwe. Niezależny układ w V ma co najwyżej $\dim V$ elementów, więc proces musi się skończyć. Na końcu powłoka jest całym W , a otrzymany układ jest jego bazą. Jest on niezależny również w V , więc ma długość co najwyżej $\dim V$ i może zostać uzupełniony na mocy poprzedniego twierdzenia. $\square$

W szczególności każda podprzestrzeń $\mathbb{K}^n$ ma skończoną bazę. Jeśli $W \subseteq V$ i $\dim W = \dim V < \infty$, to $W = V$: baza W jest wtedy układem $\dim V$ wektorów niezależnych w V , więc rozpiną V .

Przykład 11.1. Baza przestrzeni rozwiązań w $\mathbb{R}^4$

Niech

$$W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}.$$

Jest to podprzestrzeń, bo warunki są jednorodnymi równaniami liniowymi. Przyjmujemy $x_3 = s$, $x_4 = t$. Wówczas $x_2 = s$, $x_1 = -2s - t$, zatem

$$x = (-2s - t, s, s, t) = s \underbrace{(-2, 1, 1, 0)}_{f_1} + t \underbrace{(-1, 0, 0, 1)}_{f_2}.$$

Wektory f_1, f_2 rozpinają W . Są też niezależne: trzecia i czwarta współrzędna równania $af_1 + bf_2 = 0$ dają $a = b = 0$. Dlatego (f_1, f_2) jest bazą W , a $\dim W = 2$.

Możemy uzupełnić tę bazę do (f_1, f_2, e_1, e_2) w $\mathbb{R}^4$. Istotnie,

$$af_1 + bf_2 + ce_1 + de_2 = (-2a - b + c, a + d, a, b).$$

Jeśli wynik jest zerem, ostatnie dwie współrzędne dają $a = b = 0$, a pierwsze dwie $c = d = 0$. Mamy cztery niezależne wektory w $\mathbb{R}^4$, więc jest to baza.

Dwie części dowodu, że znaleziono bazę

Z parametryzacji wynika **rozpinanie** zbioru rozwiązań. Należy jeszcze uzasadnić **niezależność** wektorów przy parametrach. W powyższym przykładzie robią to współrzędne odpowiadające zmiennym swobodnym.

A Zestawienie definicji i metod

Pojęcie	Warunek lub znaczenie
Niezależność	$\sum_j \alpha_j v_j = 0$ wymusza wszystkie $\alpha_j = 0$.
Zależność	Istnieje relacja $\sum_j \alpha_j v_j = 0$ z choć jednym niezerowym współczynnikiem.
Baza V	Układ niezależny i rozpinający V .
Współrzędne	$[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, gdy $v = \sum_j \alpha_j b_j$.
Rząd układu	Liczba wektorów w maksymalnym niezależnym podukładzie; wymiar powłoki.
Wymiar V	Liczba elementów dowolnej skończonej bazy, jeśli taka baza istnieje.

Niezależność i wybieranie bazy z kolumn

Zbuduj $A = [v_1 \ \dots \ v_k]$ i rozwiąż $A\alpha = 0$. Same zerowe współczynniki oznaczają niezależność. Niezerowe rozwiązanie podaje relację zależności. Po eliminacji kolumny z pivotami wskazują bazę powłoki; wybierz kolumny o tych numerach z pierwotnej macierzy.

Współrzędne

Zapisz $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ i rozwiąż równania na współczynniki. Sprawdź wynik przez ponowne złożenie wektora. Dla bazy $\mathcal{B}$ w $\mathbb{K}^n$, z macierzą kolumn $P_{\mathcal{B}}$, zachodzi

$$[v]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}, \quad [v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}}.$$

Wymiar i uzupełnianie bazy

Jeżeli $\dim V = n$, to niezależny układ ma co najwyżej n elementów, a układ rozpinający co najmniej n . Dla dokładnie n wektorów wystarczy sprawdzić jeden z dwóch warunków bazy. Układ niezależny uzupełniaj, dołączając wektory spoza jego aktualnej powłoki.

Sytuacje brzegowe

$\emptyset$ jest niezależny i jest bazą $\{0\}$. Układ zawierający wektor zerowy lub powtórzenie jest zależny. Każdy podukład niezależnego układu jest niezależny; niezależność parami nie wystarcza dla całego układu. Zawsze ustal ciało skalarów.

Wielomiany. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t]_{\leq d} = d + 1$, z bazą $(1, t, \dots, t^d)$. Przestrzeń $\mathbb{K}[t]$ ma nieskończoną bazę jednomianów, lecz nie ma bazy skończonej.