

Rząd macierzy

Wykład 8

Rząd wierszowy i kolumnowy

Twierdzenie Kroneckera–Capellego

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{eliminacja Gaussa}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \quad \text{Dwa pivoty} \implies \text{rząd równy } 2 \quad R$$

Jedna liczba, trzy interpretacje

Rząd jest maksymalną liczbą liniowo niezależnych kolumn. Tę samą wartość daje maksymalna liczba niezależnych wierszy oraz liczba pivotów po eliminacji. Porównanie rzędu macierzy układu i macierzy uzupełnionej rozstrzyga, czy układ ma rozwiązanie.

Definicje, pełne dowody, obliczenia krok po kroku i interpretacje geometryczne.

Spis treści

1	Macierz, układ równań i dwie przestrzenie	3
2	Dwa przykłady obliczania rzędów	4
3	Co zachowują operacje na wierszach?	6
4	Równość rzędu wierszowego i kolumnowego	7
5	Eliminacja Gaussa i wybór baz	8
6	Twierdzenie Kroneckera–Capellego	9
7	Pełne rozwiązania układów	10
8	Liczba i struktura rozwiązań	12
9	Przykład z parametrami	13
A	Zestawienie pojęć i metoda rozwiązywania	14

Oznaczenia

$\mathbb{K}$ oznacza ciało skalarów. Twierdzenia są prawdziwe nad dowolnym ciałem; przykłady liczbowe i rysunki, o ile nie zaznaczono inaczej, dotyczą $\mathbb{R}$.

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ma m wierszy i n kolumn. $A^{(j)} \in \mathbb{K}^m$ to jej j -ta kolumna, a $A_{(i)} \in \mathbb{K}^n$ to jej i -ty wiersz. span oznacza powłokę liniową, a $\dim$ wymiar przestrzeni.

$\text{Col}(A)$ jest przestrzenią rozpiętą przez kolumny, $\text{Row}(A)$ przestrzenią rozpiętą przez wiersze. W układzie $Ax = b$ wektor niewiadomych ma n współrzędnych, a prawa strona b ma m współrzędnych. Macierz uzupełnioną zapisujemy jako $[A \mid b]$.

Cel wykładu

Najpierw obliczymy osobno wymiar przestrzeni kolumn i wierszy. Następnie udowodnimy, że oba wymiary zawsze są równe. Na końcu wykorzystamy tę wspólną wartość do badania układów równań: ich zgodności, liczby zmiennych swobodnych i postaci wszystkich rozwiązań.

1 Macierz, układ równań i dwie przestrzenie

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$ i $b \in \mathbb{K}^m$. Układ m równań z n niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ma zapis macierzowy $Ax = b$. Po rozpisaniu mnożenia przez kolumny otrzymujemy

$$x_1 A^{(1)} + \cdots + x_n A^{(n)} = b.$$

Rozwiązanie układu jest więc wyborem współczynników kombinacji kolumn, która daje wektor b .

Definicja 1.1. *Przestrzeń kolumn i przestrzeń wierszy* macierzy A to

$$\begin{aligned} \text{Col}(A) &= \text{span}_{\mathbb{K}}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \subseteq \mathbb{K}^m, \\ \text{Row}(A) &= \text{span}_{\mathbb{K}}\{A_{(1)}, \dots, A_{(m)}\} \subseteq \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

Ich wymiary nazywamy odpowiednio *rzędem kolumnowym* $r_k(A) = \dim \text{Col}(A)$ i *rzędem wierszowym* $r_w(A) = \dim \text{Row}(A)$.

Rząd układu wektorów to liczba wektorów w jego maksymalnym liniowo niezależnym podukładzie. Taki podukład jest bazą powłoki wszystkich wektorów. Ponieważ kolumn jest n i leżą one w $\mathbb{K}^m$,

$$0 \leq r_k(A) \leq \min(m, n).$$

Ten sam argument dla wierszy daje $0 \leq r_w(A) \leq \min(m, n)$.

Przykład 1.1. Macierz zerowa i jednostkowa

W macierzy zerowej wszystkie kolumny i wiersze są zerowe, więc obie powłoki mają wymiar 0. Dla macierzy jednostkowej I_n kolumny i wiersze tworzą bazy standardowe $\mathbb{K}^n$; oba rzędy wynoszą n .

Uwaga na przestrzeń otaczającą

Kolumna ma m współrzędnych, a wiersz n . W macierzy prostokątnej przestrzenie $\text{Col}(A)$ i $\text{Row}(A)$ leżą zwykle w różnych przestrzeniach. Twierdzenie o równości rzędów będzie dotyczyło ich **wymiarów**.

2 Dwa przykłady obliczania rzędów

Przykład 2.1. Macierz o czterech wierszach i dwóch kolumnach

Rozważmy nad $\mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Kolumny

Jeśli $\alpha c_1 + \beta c_2 = 0$, to

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ 2\alpha \\ 3\beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Czwarta współrzędna daje $\alpha = 0$, a trzecia $\beta = 0$. Kolumny są niezależne. Ponieważ jest ich dokładnie dwie,

$$r_k(B) = 2, \quad (c_1, c_2) \text{ jest bazą } \text{Col}(B).$$

2. Wiersze

Oznaczmy wiersze przez

$$r_1 = (1, 2), \quad r_2 = (2, 0), \quad r_3 = (0, 3), \quad r_4 = (-1, 0).$$

Wiersze r_2, r_3 są niezależne, bo $\alpha r_2 + \beta r_3 = (2\alpha, 3\beta) = 0$ daje $\alpha = \beta = 0$. Pozostałe wiersze są ich kombinacjami:

$$r_1 = \frac{1}{2}r_2 + \frac{2}{3}r_3, \quad r_4 = -\frac{1}{2}r_2.$$

Zatem $\text{Row}(B) = \mathbb{R}^2$, $r_w(B) = 2$, a (r_2, r_3) jest bazą przestrzeni wierszy.

3. Co oznaczają wszystkie kombinacje kolumn?

Mamy

$$\text{Col}(B) = \{(u + 2v, 2u, 3v, -u)^T : u, v \in \mathbb{R}\}.$$

To dwuwymiarowa podprzestrzeń $\mathbb{R}^4$. Rząd 2 nie oznacza, że kolumny należą do $\mathbb{R}^2$: określa liczbę niezależnych parametrów potrzebnych do opisanie ich powłoki.

Wynik

$r_k(B) = r_w(B) = 2$. Cztery wiersze mogą zawierać tylko dwa niezależne wektory. Liczba wierszy lub kolumn nie musi być równa rzędowi.

Przykład 2.2. Macierz o trzech wierszach i czterech kolumnach

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4].$$

1. Wybór niezależnych kolumn

Pierwsze dwie kolumny to $c_1 = (1, 0, 1)^T$ i $c_2 = (0, 2, 2)^T$. Z równości

$$\alpha c_1 + \beta c_2 = (\alpha, 2\beta, \alpha + 2\beta)^T = 0$$

wynika $\alpha = \beta = 0$. Mamy więc co najmniej dwie niezależne kolumny.

2. Wyrażenie pozostałych kolumn przez wybrane

Bezpośrednio obliczamy

$$-c_1 + \frac{3}{2}c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = c_3, \quad 4c_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = c_4.$$

Wszystkie kolumny leżą w $\text{span}\{c_1, c_2\}$, zatem

$$r_k(A) = 2, \quad \text{Col}(A) = \text{span}\{c_1, c_2\}.$$

Ich powłoka ma prosty opis geometryczny:

$$\alpha c_1 + \beta c_2 = (\alpha, 2\beta, \alpha + 2\beta)^T, \quad \text{Col}(A) = \{(u, v, w)^T \in \mathbb{R}^3 : w = u + v\}.$$

Odwrotna inkluzja wynika z wyboru $\alpha = u$, $\beta = v/2$.

3. Badanie wierszy

Mamy

$$r_1 = (1, 0, -1, 4), \quad r_2 = (0, 2, 3, 0), \quad r_3 = (1, 2, 2, 4) = r_1 + r_2.$$

Z $\alpha r_1 + \beta r_2 = 0$ pierwsza współrzędna daje $\alpha = 0$, a druga $\beta = 0$. Stąd

$$r_w(A) = 2, \quad \text{Row}(A) = \text{span}\{r_1, r_2\}.$$

Przestrzeń kolumn jest płaszczyzną w $\mathbb{R}^3$, a przestrzeń wierszy ma wymiar 2 w $\mathbb{R}^4$.

Jak domknąć obliczenie rzędu?

Znalezienie dwóch niezależnych wektorów daje tylko dolne oszacowanie. Aby wykazać rząd 2, trzeba jeszcze uzasadnić, że wszystkie pozostałe wektory są ich kombinacjami, albo zastosować eliminację Gaussa.

3 Co zachowują operacje na wierszach?

Lemat 3.1. Jeżeli A' powstaje z A przez skończony ciąg elementarnych operacji na wierszach, to

$$\text{Row}(A') = \text{Row}(A), \quad r_w(A') = r_w(A), \quad r_k(A') = r_k(A).$$

Odwracalność operacji

W tabeli $i \neq j$, $\alpha \neq 0$, a $\lambda \in \mathbb{K}$ jest dowolne.

Operacja	Operacja odwrotna
$R_i \leftrightarrow R_j$	ponowna zamiana tych wierszy
$R_i \leftarrow \alpha R_i$	$R_i \leftarrow \alpha^{-1} R_i$
$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$	$R_i \leftarrow R_i - \lambda R_j$

Dowód. Przestrzeń wierszy. Każdy nowy wiersz jest kombinacją starych, więc $\text{Row}(A') \subseteq \text{Row}(A)$. Odwrócenie operacji daje inkluzję w przeciwną stronę. Powłoki są równe, a więc mają ten sam wymiar.

Zależności między kolumnami. Dla każdego $x \in \mathbb{K}^n$ zachodzi

$$Ax = 0 \iff A'x = 0,$$

ponieważ elementarne operacje na wierszach dają równoważny układ jednorodny. Po rozpisaniu przez kolumny:

$$\sum_{j=1}^n x_j A^{(j)} = 0 \iff \sum_{j=1}^n x_j A'^{(j)} = 0.$$

Zachowane są zatem wszystkie współczynniki relacji między kolumnami.

Ustalmy dowolny zbiór numerów kolumn J . Relacje w podukładzie o numerach z J otrzymujemy, przyjmując $x_j = 0$ poza J . Ten podukład jest niezależny w A dokładnie wtedy, gdy jest niezależny w A' . Największa możliwa liczba niezależnych kolumn jest więc taka sama. $\square$

Równość wymiarów a równość przestrzeni

Operacje na wierszach zachowują przestrzeń wierszy, ale przestrzeń kolumn może się zmienić. Zachowane są jej wymiar i relacje między kolumnami. Dlatego numery kolumn bazowych można odczytać po eliminacji, natomiast same wektory bazowe należy pobrać z macierzy wyjściowej.

4 Równość rzędu wierszowego i kolumnowego

Twierdzenie 4.1. Dla każdej macierzy $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ zachodzi

$$r_w(A) = r_k(A).$$

Wspólną wartość nazywamy *rzędem macierzy* i oznaczamy $\text{rank } A$.

Dowód. Sprowadzamy A do **zredukowanej postaci schodkowej** R . Niech r oznacza liczbę niezerowych wierszy, a $p_1 < \dots < p_r$ numery kolumn głównych. W każdej takiej kolumnie jest jedna jedynka wiodąca, zwana pivotem, oraz same zera poza nią. Dla przykładowych $p_1 = 2, p_2 = 4, p_3 = 6$ wzór ma postać

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = 3.$$

Ogólnie kolumna $R^{(p_i)}$ jest wektorem standardowym $e_i \in \mathbb{K}^m$.

Rząd kolumnowy wynosi r . Kolumny główne $e_1, \dots, e_r$ są niezależne, zatem $r_k(R) \geq r$. Wszystkie kolumny mają zera na pozycjach większych od r , więc leżą w przestrzeni

$$E_r = \{(y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0)^T : y_i \in \mathbb{K}\}, \quad \dim E_r = r.$$

To daje $r_k(R) \leq r$, a łącznie $r_k(R) = r$.

Rząd wierszowy wynosi r . Niezerowe wiersze rozpinają $\text{Row}(R)$. Jeśli

$$\lambda_1 R_{(1)} + \dots + \lambda_r R_{(r)} = 0,$$

to współrzędna o numerze p_i daje $\lambda_i = 0$. Wiersze są więc niezależne, czyli $r_w(R) = r$.

Z lematu 3.1 otrzymujemy

$$r_w(A) = r_w(R) = r = r_k(R) = r_k(A).$$

Gdy $R = 0$, mamy $r = 0$ i oba rzędy są zerowe; ten przypadek również spełnia tezę. $\square$

Konsekwencje

Rząd to liczba pivotów, a zarazem liczba niezerowych wierszy w postaci schodkowej. Nie zależy od wybranej drogi eliminacji. Zawsze $0 \leq \text{rank } A \leq \min(m, n)$, a $\text{rank } A = 0$ dokładnie wtedy, gdy $A = 0$. Ponadto $\text{rank } A^T = \text{rank } A$, ponieważ transpozycja zamienia role wierszy i kolumn.

5 Eliminacja Gaussa i wybór baz

Do obliczenia rzędu wystarczy zwykła postać schodkowa: pivoty nie muszą być równe 1, a nad nimi mogą występować liczby niezerowe. Postać zredukowana dodatkowo ułatwia odczytanie relacji między kolumnami.

Przykład 5.1. Pełna redukcja macierzy z przykładu 2.2

Wykonujemy kolejno wskazane operacje:

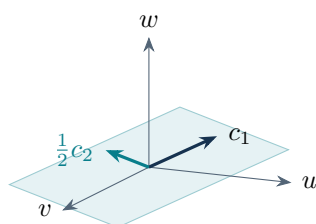
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2} R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dwa pivoty znajdują się w kolumnach 1 i 2, więc $\text{rank } A = 2$.

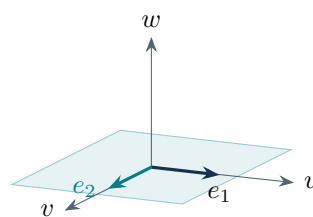
Baza przestrzeni kolumn: wybieramy kolumny 1 i 2 macierzy A , czyli $(1, 0, 1)^T$, $(0, 2, 2)^T$.

Baza przestrzeni wierszy: bierzemy niezerowe wiersze R , czyli $(1, 0, -1, 4)$, $(0, 1, \frac{3}{2}, 0)$. Są one bazą tej samej przestrzeni wierszy co wiersze wyjściowe.

Relacje: trzecia i czwarta kolumna R dają $c_3 = -c_1 + \frac{3}{2}c_2$, $c_4 = 4c_1$. Te same współczynniki obowiązują dla kolumn A .



$$\text{Col}(A) : w = u + v$$



$$\text{Col}(R) : w = 0$$

Operacje na wierszach mogą zmienić przestrzeń kolumn, zachowując jej wymiar. Obie płaszczyzny mają wymiar 2.

6 Twierdzenie Kroneckera–Capellego

Macierz uzupełniona $[A \mid b]$ powstaje przez dopisanie do A jednej kolumny. Jej kolumny rozpinają przestrzeń

$$\text{Col}([A \mid b]) = \text{span}(\text{Col}(A) \cup \{b\}).$$

W szczególności

$$\text{rank } A \leq \text{rank}[A \mid b] \leq \text{rank } A + 1.$$

Dopisanie jednego wektora może zwiększyć wymiar najwyżej o jeden.

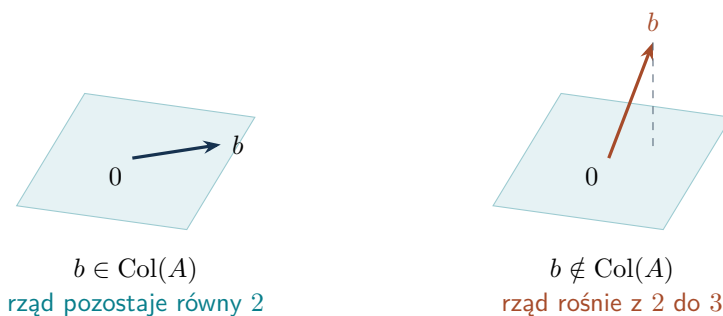
Twierdzenie 6.1 (Kroneckera–Capellego). Układ $Ax = b$ jest niesprzeczny, czyli ma co najmniej jedno rozwiązanie, dokładnie wtedy, gdy

$$\boxed{\text{rank } A = \text{rank}[A \mid b].}$$

Dowód. Zapis kolumnowy daje $Ax = b \iff \sum_{j=1}^n x_j A^{(j)} = b$. Zatem istnienie rozwiązania jest równoważne warunkowi $b \in \text{Col}(A)$.

Jeżeli $b \in \text{Col}(A)$, to dopisanie b nie zmienia powłoki kolumn, a więc nie zmienia jej wymiaru.

Odwrotnie, założmy równość rzędów. Przestrzeń $\text{Col}(A)$ jest zawarta w $\text{Col}([A \mid b])$, a obie przestrzenie mają ten sam skończony wymiar. Muszą więc być równe. Ponieważ b należy do drugiej z nich, należy też do pierwszej. Istnieją zatem współczynniki x_j dające $Ax = b$. $\square$



Gdy przestrzeń kolumn jest płaszczyzną w $\mathbb{R}^3$, prawa strona leżąca poza tą płaszczyzną nie może być kombinacją kolumn.

7 Pełne rozwiązania układów

Przykład 7.1. Warunek zgodności i dwa parametry swobodne

Dla macierzy A z przykładu 2.2 rozważmy ogólną prawą stronę $b = (b_1, b_2, b_3)^T$. Redukcja macierzy uzupełnionej daje

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & b_1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & b_2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & b_1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 - b_2 \end{array} \right].$$

Operacje nad strzałką wykonujemy kolejno. Ostatni wiersz oznacza $0 = b_3 - b_1 - b_2$, zatem

$$\boxed{Ax = b \text{ ma rozwiązanie} \iff b_3 = b_1 + b_2.}$$

Jest to dokładnie równanie płaszczyzny $\text{Col}(A)$.

Jeżeli ten warunek zachodzi, to pierwsze dwa równania mają postać

$$x_1 - x_3 + 4x_4 = b_1, \quad 2x_2 + 3x_3 = b_2.$$

Kolumny główne mają numery 1, 2, więc x_1, x_2 są zmiennymi głównymi. Przyjmujemy $x_3 = s, x_4 = t$. Wtedy

$$x_1 = b_1 + s - 4t, \quad x_2 = \frac{b_2}{2} - \frac{3}{2}s.$$

Otrzymaliśmy wszystkie rozwiązania:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Przypadek liczbowy: $b = (1, 2, 3)^T$

Mamy $b_3 = b_1 + b_2$, więc oba rzędy są równe 2. Rozwiązanie szczególne to $x_0 = (1, 1, 0, 0)^T$. Wektory kierunkowe oznaczmy przez $u = (1, -\frac{3}{2}, 1, 0)^T$, $v = (-4, 0, 0, 1)^T$. Sprawdzenie w zapisie kolumnowym daje

$$Ax_0 = c_1 + c_2 = (1, 2, 3)^T, \quad Au = c_1 - \frac{3}{2}c_2 + c_3 = 0, \quad Av = -4c_1 + c_4 = 0.$$

Każdy $x = x_0 + su + tv$ jest więc rozwiązaniem. Parametry są niezależne, ponieważ trzecia i czwarta współrzędna wektora $su + tv$ to odpowiednio s i t . Zbiór rozwiązań jest płaszczyzną afiniczną w $\mathbb{R}^4$.

Przykład 7.2. Ta sama macierz, ale sprzeczna prawa strona

Dla $b = (1, 2, 4)^T$ redukcja prowadzi do

$$[A \mid b] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Ostatni wiersz oznacza $0 = 1$. W części współczynników są dwa pivoty, a w macierzy uzupełnionej trzy:

$$\text{rank } A = 2, \quad \text{rank}[A \mid b] = 3.$$

Układ nie ma rozwiązań. Geometrycznie $(1, 2, 4)^T \notin \text{Col}(A)$, ponieważ $4 \neq 1 + 2$.

Przykład 7.3. Więcej równań niż niewiadomych i jedno rozwiązanie

Dla macierzy B rozwiążmy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Kolejno wykonujemy $R_1 \leftrightarrow R_4$, $R_1 \leftarrow -R_1$, następnie $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ i $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{array} \right].$$

Po zamianie $R_2 \leftrightarrow R_3$, podzieleniu R_2 przez 3 i operacji $R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2$ otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Oba rzędy wynoszą 2, czyli tyle, ile jest niewiadomych. Zatem $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ to jedyne rozwiązanie. Sprawdzenie:

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cztery równania są zgodne, choć tylko dwa z nich dostarczają niezależnych warunków na niewiadome.

Pivot w kolumnie prawej strony

Pivot w ostatniej kolumnie macierzy uzupełnionej odpowiada sprzecznemu równaniu $0 = c$, $c \neq 0$. Nie jest pivotem macierzy współczynników i nie odpowiada żadnej dodatkowej niewiadomej.

8 Liczba i struktura rozwiązań

Niech $r = \text{rank } A$, gdzie A ma n kolumn. Jeśli układ jest zgodny, to po eliminacji występuje dokładnie r zmiennych głównych oraz $n - r$ zmiennych swobodnych. Każdy wybór zmiennych swobodnych wyznacza jednoznacznie zmienne główne.

Warunek	Rozwiązania nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$
$\text{rank}[A \mid b] > r$	brak rozwiązań
$\text{rank}[A \mid b] = r = n$	dokładnie jedno rozwiązanie
$\text{rank}[A \mid b] = r < n$	nieskończenie wiele; $n - r$ niezależnych parametrów

Układ jednorodny i przesunięcie jego rozwiązań

Niech $N(A) = \{z \in \mathbb{K}^n : Az = 0\}$. Jest to podprzestrzeń, ponieważ $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = 0$ dla $u, v \in N(A)$. W układzie jednorodnym każda zmienna główna jest kombinacją zmiennych swobodnych. Wstawiając kolejno 1 na jedną swobodną pozycję i 0 na pozostałe, otrzymujemy $n - r$ wektorów. Rozpinają one $N(A)$ i są niezależne: ich współrzędne na swobodnych pozycjach tworzą bazę standardową. Zatem

$$\dim N(A) = n - \text{rank } A.$$

Jeżeli $Ax_0 = b$, to

$$Ax = b \iff A(x - x_0) = 0, \quad \{x : Ax = b\} = x_0 + N(A).$$

Zbiór rozwiązań zgodnego układu jest przesunięciem przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego; ma $n - r$ niezależnych kierunków.

Co wynika z pełnego rzędu?

Pełny rząd kolumnowy: $r = n$. Kolumny są niezależne, a dla każdej prawej strony układ ma najwyżej jedno rozwiązanie.

Pełny rząd wierszowy: $r = m$. Przestrzeń kolumn jest równa $\mathbb{K}^m$, więc układ ma rozwiązanie dla każdego $b \in \mathbb{K}^m$.

Gdy $m = n = r$, dla każdej prawej strony istnieje dokładnie jedno rozwiązanie.

Ciało skończone

Nad ciałem o q elementach zgodny układ ma dokładnie q^{n-r} rozwiązań: każda zmienna swobodna ma q możliwych wartości. Stwierdzenie o nieskończeniu wielu rozwiązaniach wymaga ciała nieskończonego.

9 Przykład z parametrami

Przykład 9.1. Zmiana rzędu i zgodności układu

Dla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ rozważmy

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \mu, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

Odejmujemy pierwsze równanie od drugiego i od trzeciego:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & \mu - 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \end{array} \right].$$

Przypadek 1: $\lambda \neq 1$

Trzy pivoty dają $\text{rank } A = \text{rank}[A \mid b] = 3$. Można podzielić przez $\lambda - 1$; mamy

$$x_2 = \frac{\mu - 1}{\lambda - 1}, \quad x_3 = 0, \quad x_1 = 1 - x_2 = \frac{\lambda - \mu}{\lambda - 1}.$$

Dla $\lambda = 3, \mu = 5$ otrzymujemy $(-1, 2, 0)^T$. Lewe strony trzech równań mają wówczas wartości 1, 5, 1.

Przypadek 2: $\lambda = 1$ i $\mu = 1$

Wszystkie równania są identyczne. Oba rzędy wynoszą 1, a liczba zmiennych swobodnych to $3 - 1 = 2$. Wszystkie rozwiązania:

$$x = \begin{pmatrix} 1 - s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Tworzą one płaszczyznę $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Przypadek 3: $\lambda = 1$ i $\mu \neq 1$

Drugi wiersz po redukcji daje $0 = \mu - 1 \neq 0$. Stąd $\text{rank } A = 1$, $\text{rank}[A \mid b] = 2$; układ jest sprzeczny.

Parametry	$\text{rank } A$	$\text{rank}[A \mid b]$	Wynik
$\lambda \neq 1$, dowolne μ	3	3	jedno rozwiązanie
$\lambda = 1$, $\mu = 1$	1	1	dwa parametry swobodne
$\lambda = 1$, $\mu \neq 1$	1	2	brak rozwiązań

Zasada obliczeń: przed dzieleniem przez wyrażenie zależne od parametru oddzielamy przypadek, w którym to wyrażenie jest zerowe.

A Zestawienie pojęć i metoda rozwiązywania

Pojęcie	Znaczenie
$\text{Col}(A)$	powłoka kolumn; podprzestrzeń $\mathbb{K}^m$
$\text{Row}(A)$	powłoka wierszy; podprzestrzeń $\mathbb{K}^n$
$\text{rank } A$	wspólny wymiar przestrzeni kolumn i wierszy
Pivot	pierwszy niezerowy element niezerowego wiersza postaci schodkowej
Zgodność układu	$b \in \text{Col}(A)$, równoważnie $\text{rank } A = \text{rank}[A \mid b]$
Zmienne swobodne	$n - \text{rank } A$ niezależnych parametrów w układzie zgodnym

Algorytm dla $Ax = b$

1. Zapisz $[A \mid b]$ i wykonuj operacje na **całych wierszach**, uwzględniając prawą stronę.
2. Sprowadź macierz do postaci schodkowej. Gdy pojawia się parametr, sprawdź osobno wartości zerujące potencjalny pivot.
3. W części współczynników policz pivoty: to $r = \text{rank } A$.
4. Jeżeli otrzymasz wiersz $[0 \cdots 0 \mid c]$, $c \neq 0$, układ jest sprzeczny i $\text{rank}[A \mid b] = r + 1$.
5. W układzie zgodnym wybierz $n - r$ zmiennych swobodnych i wyznacz zmienne główne. Zapisz wszystkie rozwiązania w postaci $x = x_0 + t_1 u_1 + \cdots + t_{n-r} u_{n-r}$.
6. Sprawdź $Ax_0 = b$ i $Au_i = 0$. Sprawdź też, czy każdy parametr może być wybierany niezależnie.

Jak wybrać bazy?

Przestrzeń kolumn: numery kolumn z pivotami odczytaj z macierzy schodkowej, a kolumny wybierz z A .

Przestrzeń wierszy: weź niezerowe wiersze macierzy schodkowej. Jeśli baza ma składać się z *wybranych wierszy wyjściowych*, zastosuj metodę wyboru kolumn do A^T i wróć do odpowiednich wierszy A .

Warunki, o których trzeba pamiętać

Niezerowe wiersze liczymy dopiero w postaci schodkowej: w macierzy wyjściowej mogą być zależne. Liczba zmiennych głównych jest równa $\text{rank } A$, nie rzędowi macierzy uzupełnionej w układzie sprzecznym. Pełny rząd kolumnowy gwarantuje jednoznaczność rozwiązania, jeśli ono istnieje; istnienie dla każdej prawej strony wymaga pełnego rzędu wierszowego.