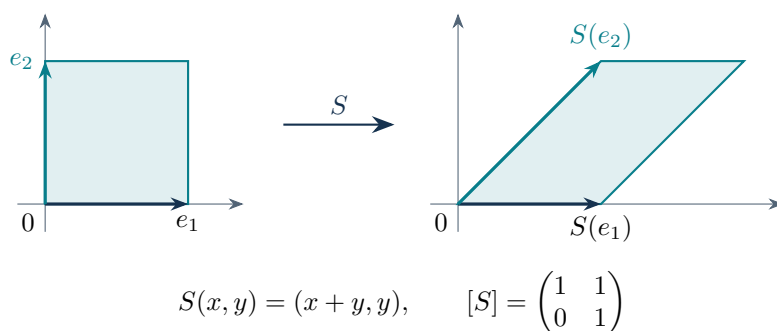


Przekształcenia liniowe

Macierze i ich iloczyn

Wykłady 9–10

Definicje, dowody i rozwiązane przykłady



Od obrazu bazy do rachunku macierzy

Przekształcenie liniowe jest wyznaczone przez obrazy wektorów bazy. Współrzędne tych obrazów tworzą kolumny macierzy. Składaniu przekształceń odpowiada mnożenie macierzy; kolejność czynników opisuje kolejność działania.

Spis treści

1	Liniowość i przekształcenie zadane macierzą	3
2	Przykłady geometryczne w płaszczyźnie	5
3	Macierz w bazach standardowych	6
4	Macierz przekształcenia w dowolnych bazach	7
5	Przestrzeń przekształceń liniowych	10
6	Baza i wymiar przestrzeni przekształceń	11
7	Składanie przekształceń liniowych	13
8	Iloczyn macierzy i reguła wiersz–kolumna	14
9	Dlaczego mnożenie nie jest przemienne?	17
10	Prawa działań na macierzach	18
11	Transpozycja macierzy	20
12	Rząd iloczynu macierzy	21
13	Przykład łączący cały materiał	23
A	Zestawienie wzorów i metod	24

Oznaczenia i podział materiału

V, W, U są przestrzeniami nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Macierz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ma m wierszy i n kolumn, więc opisuje przekształcenie $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$. $A^{(j)}$ oznacza kolumnę, a $A_{(i)}$ wiersz. $[v]_{\mathcal{B}}$ jest kolumną współrzędnych w uporządkowanej bazie $\mathcal{B}$. W zapisie $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ baza po prawej dotyczy dziedziny, a baza po lewej przestrzeni wartości.

Wykład 9: liniowość, macierz przekształcenia, przestrzeń $\mathcal{L}(V, W)$. **Wykład 10:** składanie, iloczyn, transpozycja i rząd iloczynu. Przykłady liczbowe i rysunki dotyczą $\mathbb{R}$, chyba że podano inne ciało.

WYKŁAD 9 | Przekształcenia liniowe i ich macierze

1 Liniowość i przekształcenie zadane macierzą

Definicja 1.1. Przekształcenie $T : V \rightarrow W$ nazywamy *liniowym nad $\mathbb{K}$* , jeśli dla wszystkich $u, v \in V$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ zachodzą warunki

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad T(\lambda v) = \lambda T(v).$$

Są to odpowiednio *addytywność* i *jednorodność*.

Równoważnie można żądać jednej równości

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

dla wszystkich u, v i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dwa warunki definicji dają ten wzór, a podstawienia $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ i $(\lambda, 0)$ pozwalają je odzyskać.

Macierz działa przez kombinację swoich kolumn

Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dla $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ definiujemy

$$T_A(x) = Ax = \sum_{j=1}^n x_j A^{(j)} \in \mathbb{K}^m.$$

Jeśli $y = T_A(x)$, to i -ta współrzędna obrazu wynosi

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Twierdzenie 1.2. Dla każdej macierzy A przekształcenie T_A jest liniowe.

Dowód. Korzystamy z rozdzielności działań w $\mathbb{K}$ i w przestrzeni $\mathbb{K}^m$:

$$\begin{aligned} T_A(u + v) &= \sum_j (u_j + v_j) A^{(j)} = \sum_j u_j A^{(j)} + \sum_j v_j A^{(j)} = T_A(u) + T_A(v), \\ T_A(\lambda u) &= \sum_j (\lambda u_j) A^{(j)} = \lambda \sum_j u_j A^{(j)} = \lambda T_A(u). \end{aligned}$$

□

Kontrola wymiarów

A ma n kolumn, więc wejście ma n współrzędnych. Każda kolumna ma m współrzędnych, więc wynik należy do $\mathbb{K}^m$. Zapis Ax oznacza mnożenie macierzy przez **kolumnę** współrzędnych.

1.1 Konsekwencje definicji i testy liniowości

Każde przekształcenie liniowe spełnia

$$T(0_V) = 0_W, \quad T(-v) = -T(v), \quad T\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^k \alpha_j T(v_j).$$

Pierwsza równość wynika z $T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v)$, druga z jednorodności dla $\lambda = -1$, a trzecia z wielokrotnego użycia addytywności i jednorodności.

Przykład 1.1. Wyraz stały uniemożliwia liniowość

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + 1, y)$, nie jest liniowe, bo $F(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$. Ogólniej mapa $v \mapsto Av + b$ jest liniowa dokładnie wtedy, gdy $b = 0$. Dla $b \neq 0$ jest przekształceniem afinicznym.

Przykład 1.2. Warunek $T(0) = 0$ nie wystarcza

Dla $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = x^2$, mamy $G(0) = 0$, ale

$$G(1 + 1) = 4 \neq 2 = G(1) + G(1).$$

Z kolei $H(x) = |x|$ narusza jednorodność: $H(-1) = 1 \neq -1 = -H(1)$. Obie mapy są nieliniowe.

Przykład 1.3. Liniowość zależy od ciała skalarów

Sprzężenie $J : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $J(z) = \bar{z}$, jest liniowe nad $\mathbb{R}$, ponieważ $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ oraz $\overline{az} = a\bar{z}$ dla $a \in \mathbb{R}$. Nie jest liniowe nad $\mathbb{C}$:

$$J(i \cdot 1) = -i \neq i = iJ(1).$$

W bazie $(1, i)$ przestrzeni $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ jego macierz to $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Jak udowadniać i jak obalać liniowość?

Do dowodu sprawdzamy definicję dla **dowolnych** wektorów i skalarów albo przedstawiamy mapę w postaci $x \mapsto Ax$. Sprawdzenie kilku wartości liczbowych nie jest dowodem. Do obalenia liniowości wystarczy jeden kontrprzykład naruszający któryś z warunków.

Obrazy bazy wystarczają

Jeżeli $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ jest bazą i $v = \sum_j x_j b_j$, to $T(v) = \sum_j x_j T(b_j)$. Znając wszystkie $T(b_j)$, znamy więc T na całej przestrzeni. Dowolny wybór obrazów $T(b_j) \in W$ wyznacza jedno przekształcenie liniowe: jednoznaczność współrzędnych zapewnia, że ten przepis jest dobrze określony.

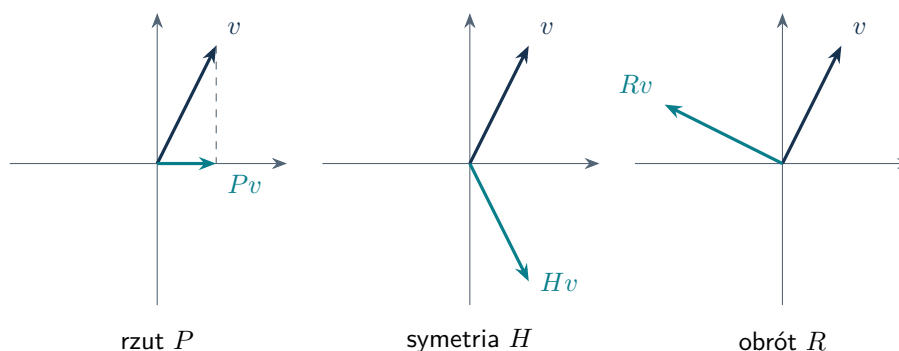
2 Przykłady geometryczne w płaszczyźnie

Przykład 2.1. Rzut, symetria i obrót

Rzut na oś Ox , symetrię względem tej osi i obrót o $\pi/2$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara opisują odpowiednio

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (x, 0), & P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H(x, y) &= (x, -y), & H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ R(x, y) &= (-y, x), & R &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Są liniowe, bo każde jest zadane mnożeniem przez macierz. Dla $v = (1, 2)^T$ otrzymujemy $Pv = (1, 0)^T$, $Hv = (1, -2)^T$, $Rv = (-2, 1)^T$.



Liniowość nie wymaga zachowania długości ani kątów. Rzut może wysłać niezerowy wektor na zero.

Przykład 2.2. Obrót o dowolny kąt i ścinanie

Obrót o kąt θ ma macierz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

ponieważ wysyła e_1 na $(\cos \theta, \sin \theta)^T$, a e_2 na $(-\sin \theta, \cos \theta)^T$. Ścinanie $S(x, y) = (x + y, y)$ ma macierz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Przekształca kwadrat jednostkowy w równoległobok:

$$(0, 0) \mapsto (0, 0), \quad (1, 0) \mapsto (1, 0), \quad (0, 1) \mapsto (1, 1), \quad (1, 1) \mapsto (2, 1).$$

3 Macierz w bazach standardowych

Niech $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ będzie liniowe, a $e_1, \dots, e_n$ bazą standardową dziedziny. Każdy wektor ma postać $x = \sum_j x_j e_j$, więc

$$T(x) = \sum_{j=1}^n x_j T(e_j).$$

Wstawiamy obrazy wektorów bazowych do **kolumn** macierzy:

$$A = [T(e_1) \ \cdots \ T(e_n)] \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

Wtedy $T(x) = Ax$ dla każdego x .

Twierdzenie 3.1. Przyporządkowanie $A \mapsto T_A$ jest wzajemnie jednoznacznością między $\mathbb{K}^{m \times n}$ a przekształceniami liniowymi $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Dowód. Każda macierz daje mapę liniową. Odwrotnie, powyższa konstrukcja daje macierz dowolnej mapy liniowej, więc wszystkie takie mapy są otrzymane. Jeśli $T_A = T_B$, to dla każdego j

$$A^{(j)} = Ae_j = T_A(e_j) = T_B(e_j) = Be_j = B^{(j)}.$$

Macierze mają te same kolumny, więc $A = B$. □

Przykład 3.1. Od wzoru przekształcenia do macierzy

Rozważmy $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_2 + 2x_3).$$

Liczymy obrazy bazy standardowej:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dla $x = (1, -1, 2)^T$ mamy

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 + 2(-1) - 2 \\ 3(-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

To samo wynika z kombinacji kolumn: $T(x) = T(e_1) - T(e_2) + 2T(e_3) = (1, 0)^T - (2, 3)^T + 2(-1, 2)^T$.

Kolejność i rozmiar

j -ta kolumna jest obrazem j -tego wektora bazy dziedziny. W przykładzie są trzy kolumny i dwa wiersze, zgodnie z kierunkiem $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

4 Macierz przekształcenia w dowolnych bazach

Niech $\dim V = n$, $\dim W = m$. Ustalmy uporządkowane bazy $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ przestrzeni V i $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ przestrzeni W . Każdy obraz wektora bazowego zapisujemy w bazie $\mathcal{C}$:

$$T(b_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} c_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Definicja 4.1. Macierzą T w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ jest

$$A = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [T(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}.$$

Jej j -tą kolumnę tworzą **współrzędne** obrazu $T(b_j)$ w bazie przestrzeni wartości.

Jeżeli $v = \sum_j x_j b_j$, to

$$\begin{aligned} T(v) &= \sum_{j=1}^n x_j T(b_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} c_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) c_i. \end{aligned}$$

Oznaczając $y = [T(v)]_{\mathcal{C}}$, dostajemy $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$, czyli podstawowy wzór

$$\boxed{[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}.}$$

$$\begin{array}{ccc} v \in V & \xrightarrow{T} & T(v) \in W \\ \downarrow \text{baza } \mathcal{B} & & \downarrow \text{baza } \mathcal{C} \\ x = [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n & \xrightarrow{x \mapsto Ax} & y = [T(v)]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{K}^m \end{array}$$

Obliczenie obrazu, a potem jego współrzędnych daje ten sam wynik co pomnożenie współrzędnych wejścia przez macierz.

Wektor a kolumna współrzędnych

W ogólnej przestrzeni, np. przestrzeni wielomianów, wektor v nie jest kolumną liczb. Macierz mnożymy przez $[v]_{\mathcal{B}}$. Skrót $T(v) = Av$ jest właściwy dla standardowego zapisu współrzędnych w $\mathbb{K}^n$ i $\mathbb{K}^m$.

4.1 Pełny przykład w bazach niestandardowych

Przykład 4.1. Dwie bazy i jedno przekształcenie

Niech $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y, x + 3y)$, oraz

$$\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1)), \quad \mathcal{C} = ((1, 0), (1, 1)).$$

Oba układy są bazami: układy równań na współczynniki mają dla dowolnego wektora jednoznaczne rozwiązania podane poniżej.

1. Współrzędne w bazie $\mathcal{C}$

Z $(u, v) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1) = (\alpha + \beta, \beta)$ wynika

$$[(u, v)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} u - v \\ v \end{pmatrix}.$$

2. Obrazy wektorów bazy $\mathcal{B}$

$$T(1, 1) = (1, 4), \quad T(1, -1) = (3, -2).$$

Ich współrzędne w $\mathcal{C}$ to odpowiednio $(-3, 4)^T$ i $(5, -2)^T$. Zatem

$$[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Zastosowanie do wektora $z = (3, 1)$

Najpierw rozkładamy wejście w bazie $\mathcal{B}$:

$$(x, y) = s(1, 1) + t(1, -1) = (s + t, s - t), \quad s = \frac{x + y}{2}, \quad t = \frac{x - y}{2}.$$

W szczególności $[z]_{\mathcal{B}} = (2, 1)^T$. Mnożenie daje

$$[T(z)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Odtwarzamy wektor w przestrzeni wartości:

$$T(z) = -1(1, 0) + 6(1, 1) = (5, 6).$$

Sprawdzenie ze wzoru: $T(3, 1) = (2 \cdot 3 - 1, 3 + 3 \cdot 1) = (5, 6)$.

Macierz zależy od baz

W bazach standardowych to samo T ma macierz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Zmiana baz zmienia zapis liczbowy, lecz nie zmienia samej mapy. Nawet identyczność może mieć macierz różną od I_n , gdy na wejściu i na wyjściu używamy różnych baz.

4.2 Przekształcenia przestrzeni wielomianów

Przykład 4.2. Macierz różniczkowania

Niech $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ i $D : V \rightarrow W$, $D(p) = p'$. Różniczkowanie jest liniowe, ponieważ

$$(p + q)' = p' + q', \quad (\lambda p)' = \lambda p'.$$

Wybieramy bazy $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$, $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$. Kolejne obrazy to

$$D(1) = 0, \quad D(t) = 1, \quad D(t^2) = 2t, \quad D(t^3) = 3t^2.$$

Po zapisaniu ich współrzędnych w kolumnach otrzymujemy

$$[D]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Macierz ma rozmiar 3×4 , ponieważ $\dim W = 3$, $\dim V = 4$.

Dla $p(t) = 2 - t + 3t^2 - 2t^3$ mamy

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [D(p)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Zatem $D(p) = -1 + 6t - 6t^2$, zgodnie z bezpośrednim różniczkowaniem. Zerowa pierwsza kolumna wyraża fakt, że pochodna stałej jest zerowa.

Przykład 4.3. Wartość wielomianu w ustalonym punkcie

Mapa $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}$, $L(p) = p(1)$, jest liniowa: $(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1)$. W bazie $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$ i bazie (1) przestrzeni $\mathbb{R}$ jej macierz to

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dla powyższego p otrzymujemy $L(p) = 2 - 1 + 3 - 2 = 2$. Ogólniej ewaluacja $p \mapsto p(a)$ ma macierz $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$.

Ustalony punkt, zmienny wielomian

Mapa $p \mapsto p(a)$ jest liniowa względem p . Nie należy jej utożsamiać z funkcją $a \mapsto p(a)$ dla ustalonego wielomianu; ta funkcja może być nieliniowa, np. dla $p(t) = t^2$.

5 Przestrzeń przekształceń liniowych

Oznaczamy

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W : T \text{ jest liniowe nad } \mathbb{K}\}.$$

Dla $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ definiujemy działania punktowo:

$$(T + S)(v) = T(v) + S(v), \quad (\lambda T)(v) = \lambda T(v).$$

Twierdzenie 5.1. Z tymi działaniami $\mathcal{L}(V, W)$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$.

Dowód. Suma i wielokrotność skalarna są znów mapami liniowymi. Istotnie,

$$\begin{aligned} (T + S)(\alpha u + \beta v) &= \alpha T(u) + \beta T(v) + \alpha S(u) + \beta S(v) \\ &= \alpha(T + S)(u) + \beta(T + S)(v), \\ (\lambda T)(\alpha u + \beta v) &= \lambda \alpha T(u) + \lambda \beta T(v) \\ &= \alpha(\lambda T)(u) + \beta(\lambda T)(v). \end{aligned}$$

Pozostałe aksjomaty wynikają punktowo z aksjomatów przestrzeni W . Na przykład $((T + S) + F)(v) = T(v) + (S(v) + F(v)) = (T + (S + F))(v)$. Wektorem zerowym jest mapa $v \mapsto 0_W$, a przeciwnym do T mapa $-T : v \mapsto -T(v)$. $\square$

W ustalonych bazach obrazy każdego wektora bazowego dodają się i skalują współrzędna po współrzędnej. Dlatego

$$[T + S]_{C \leftarrow B} = [T]_{C \leftarrow B} + [S]_{C \leftarrow B}, \quad [\lambda T]_{C \leftarrow B} = \lambda [T]_{C \leftarrow B}.$$

Dodawanie i mnożenie macierzy przez skalar są dane wzorami $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$. Dodajemy tylko macierze tego samego rozmiaru.

Przykład 5.1. Kombinacja liniowa dwóch map

Dla $T(x, y) = (2x - y, x + 3y)$ i $S(x, y) = (x + y, y)$ dostajemy

$$[2T - S] = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zatem $(2T - S)(x, y) = (3x - 3y, 2x + 5y)$, a dla $(1, 2)$ wynik to $(-3, 12)$.

Warunek zgodności baz

Macierze dwóch map można dodać jako macierze tych map tylko wtedy, gdy zapisano je w tych samych bazach dziedziny i przestrzeni wartości. Sama zgodność rozmiarów nie wystarcza do takiej interpretacji.

6 Baza i wymiar przestrzeni przekształceń

Macierze bazowe

Dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ niech $E_{ij} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ oznacza macierz z jedynką na pozycji (i, j) i zerami w pozostałych miejscach. Wtedy każda macierz ma rozkład

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$

Macierze E_{ij} rozpinają więc $\mathbb{K}^{m \times n}$. Jeżeli $\sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij} = 0$, to odczytanie pozycji (i, j) daje $\lambda_{ij} = 0$. Są zatem niezależne i tworzą bazę liczącą mn elementów.

Twierdzenie 6.1.

$$\dim \mathbb{K}^{m \times n} = mn, \quad \dim \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = mn.$$

Dowód. Pierwsza równość wynika z bazy (E_{ij}) . Odpowiedniość $A \mapsto T_A$ jest liniowa i wzajemnie jednoznaczna, więc $(T_{E_{ij}})$ jest bazą przestrzeni map liniowych. Dokładniej, $T_{E_{ij}}(x) = x_j e_i$: mapa odczytuje j -tą współrzędną wejścia i umieszcza ją na i -tej pozycji wyjścia. $\square$

Przykład 6.1. Sześć niezależnych miejsc w macierzy 2×3

Bazę przestrzeni $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ tworzą

$$\begin{aligned} E_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Macierz z przykładu 3.1 ma rozkład

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = E_{11} + 2E_{12} - E_{13} + 3E_{22} + 2E_{23}.$$

Te same współczynniki opisują rozkład mapy T w bazie map $x \mapsto x_j e_i$. Przestrzeń $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ma wymiar 6.

Rząd macierzy i wymiar przestrzeni macierzy

Wymiar $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ wynosi 6, ale każda pojedyncza macierz 2×3 ma rząd najwyżej 2. Są to różne pojęcia: pierwsza liczba opisuje swobodę wyboru całej macierzy, druga wymiar powłoki jej kolumn.

6.1 Przypadek dowolnych przestrzeni skończenie wymiarowych

Twierdzenie 6.2. Jeśli $\dim V = n$ i $\dim W = m$, to $\dim \mathcal{L}(V, W) = mn$.

Dowód. Ustalmy bazy $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$. Dla każdej pary (i, j) definiujemy liniową mapę Φ_{ij} przez

$$\Phi_{ij}(b_j) = c_i, \quad \Phi_{ij}(b_k) = 0 \quad (k \neq j).$$

Jest dobrze określona, ponieważ obrazy bazy wyznaczają mapę liniową. Jeśli $v = \sum_k x_k b_k$, to $\Phi_{ij}(v) = x_j c_i$.

Niezależność. Niech $\sum_{i,j} \lambda_{ij} \Phi_{ij} = 0$ jako mapa. Stosując obie strony do b_k , dostajemy

$$0 = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \Phi_{ij}(b_k) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ik} c_i.$$

Niezależność bazy $\mathcal{C}$ daje $\lambda_{ik} = 0$ dla każdego i . Ponieważ k było dowolne, wszystkie współczynniki są zerowe.

Rozpinanie. Jeśli $T(b_j) = \sum_i a_{ij} c_i$, to mapy T i $\sum_{i,j} a_{ij} \Phi_{ij}$ mają te same wartości na każdym wektorze bazy. Są więc równe. Układ (Φ_{ij}) jest bazą, a jego liczba elementów wynosi mn . $\square$

Przykład 6.2. Mapa z wielomianów do $\mathbb{R}^2$

Dla $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $W = \mathbb{R}^2$ wybieramy bazy $(1, t, t^2)$ i (e_1, e_2) . Mamy $\dim \mathcal{L}(V, W) = 3 \cdot 2 = 6$. Dla $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ mapy bazowe działają np. tak:

$$\Phi_{11}(p) = (a_0, 0), \quad \Phi_{12}(p) = (a_1, 0), \quad \Phi_{23}(p) = (0, a_2).$$

Rozważmy

$$F(p) = (a_0 + 2a_1 - a_2, 3a_0 + a_2).$$

Jej macierz i rozkład w bazie map są następujące:

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \Phi_{11} + 2\Phi_{12} - \Phi_{13} + 3\Phi_{21} + \Phi_{23}.$$

Dla $p = 2 - t + 3t^2$ otrzymujemy $F(p) = (2 - 2 - 3, 6 + 3) = (-3, 9)$.

Co zależy od wyboru baz?

Konkretne macierze i mapy bazowe Φ_{ij} zależą od wybranych baz. Liczba mn , czyli wymiar przestrzeni $\mathcal{L}(V, W)$, jest od nich niezależna.

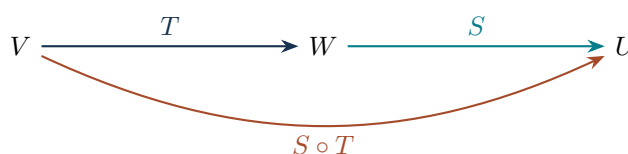
WYKŁAD 10 | Składanie i działania na macierzach

7 Składanie przekształceń liniowych

Niech $T : V \rightarrow W$, $S : W \rightarrow U$. Złożenie definiujemy wzorem

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)).$$

Najpierw działa mapa T , potem mapa S . Warunek zgodności przestrzeni pośredniej jest konieczny.



Twierdzenie 7.1. Jeżeli $T \in \mathcal{L}(V, W)$ i $S \in \mathcal{L}(W, U)$, to $S \circ T \in \mathcal{L}(V, U)$.

Dowód. Dla dowolnych $v, w \in V$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mamy

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\alpha v + \beta w) &= S(T(\alpha v + \beta w)) \\ &= S(\alpha T(v) + \beta T(w)) \\ &= \alpha S(T(v)) + \beta S(T(w)) \\ &= \alpha(S \circ T)(v) + \beta(S \circ T)(w). \end{aligned}$$

W drugim kroku korzystamy z liniowości T , a w trzecim z liniowości S . □

Przykład 7.1. Obliczanie złożenia ze wzorów

Dla $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2y)$, i $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $S(u, v) = u - v$, otrzymujemy

$$(S \circ T)(x, y) = (x + y) - 2y = x - y.$$

Na przykład $(3, 2) \xrightarrow{T} (5, 4) \xrightarrow{S} 1$. Złożenie ma dziedzinę $\mathbb{R}^2$, a wartości w $\mathbb{R}$. Złożenie $T \circ S$ nie jest tutaj określone: wyjście S jest liczbą, a wejście T wymaga wektora o dwóch współrzędnych.

Czytanie od prawej do lewej

W zapisie $S \circ T$ prawa mapa działa pierwsza. Ta sama zasada będzie obowiązywała dla iloczynu macierzy reprezentujących złożenie.

8 Iloczyn macierzy i reguła wiersz–kolumna

Niech $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{\ell \times m}$. Wtedy

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{T_A} \mathbb{K}^m \xrightarrow{T_B} \mathbb{K}^\ell.$$

Szukamy macierzy $C \in \mathbb{K}^{\ell \times n}$ złożenia $T_B \circ T_A$. Dla $y = Ax$, $z = By$ mamy

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{s=1}^m b_{is} y_s = \sum_{s=1}^m b_{is} \sum_{j=1}^n a_{sj} x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj} \right) x_j. \end{aligned}$$

Definicja 8.1. Iloczynem B i A nazywamy macierz $C = BA$ o elementach

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj}, \quad 1 \leq i \leq \ell, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Jest to suma iloczynów odpowiednich elementów i -tego wiersza B i j -tej kolumny A .

Wyprowadzenie pokazuje, że

$$T_{BA} = T_B \circ T_A, \quad (BA)x = B(Ax).$$

Uniwersalny schemat rozmiarów

Niezależnie od nazw czynników:

$$\underbrace{A}_{m \times n} \underbrace{B}_{n \times p} = \underbrace{AB}_{m \times p}, \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Liczba kolumn lewego czynnika musi być równa liczbie wierszy prawego. Rozmiar wyniku wyznaczają liczba wierszy lewego i liczba kolumn prawego.

Złożenie w dowolnych bazach

Jeżeli $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ są bazami odpowiednio V, W, U , to

$$[S \circ T]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}.$$

Istotnie, najpierw obliczamy współrzędne $T(v)$ w $\mathcal{C}$, a następnie współrzędne $S(T(v))$ w $\mathcal{D}$. **Baza pośrednia musi być ta sama** w obu macierzach.

Także nad $\mathbb{C}$

W zwykłym iloczynie macierzy mnożymy $a_{ik} b_{kj}$, bez sprzęgania liczb zespolonych. Reguła wiersz–kolumna nie wprowadza sprzężenia.

8.1 Pełne obliczenie iloczynu prostokątnego

Przykład 8.1. Macierz 2×3 razy macierz 3×2

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Iloczyn $C = AB$ ma rozmiar 2×2 . Obliczamy osobno każdy z czterech elementów:

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 2 - 2 - 3 = -3,$$

$$c_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = 0 + 2 - 4 = -2,$$

$$c_{21} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 0 - 3 + 6 = 3,$$

$$c_{22} = 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 0 + 3 + 8 = 11.$$

Zatem

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Pierwszy wiersz lewego czynnika i druga kolumna prawego wyznaczają element $c_{12} = -2$.

Odczytanie złożenia ze wzorów

Najpierw działa $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -x + y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}.$$

Następnie $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, więc

$$A \left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x + 2(-x + y) - (3x + 4y) \\ 3(-x + y) + 2(3x + 4y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x - 2y \\ 3x + 11y \end{pmatrix}.$$

Współczynniki tego wzoru są dokładnie elementami obliczonej macierzy AB .

8.2 Kolumny i wiersze iloczynu

Dla $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ mamy dwa użyteczne zapisy:

$$(AB)^{(j)} = AB^{(j)} = \sum_{k=1}^n b_{kj} A^{(k)},$$

$$(AB)_{(i)} = A_{(i)} B = \sum_{k=1}^n a_{ik} B_{(k)}.$$

Pierwszy mówi, że każda kolumna iloczynu jest kombinacją kolumn A . Drugi mówi, że każdy wiersz iloczynu jest kombinacją wierszy B . Oba wynikają ze wzoru $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$, odczytanego raz przy ustalonym j , a raz przy ustalonym i .

Przykład 8.2. To samo mnożenie przez kombinacje kolumn i wierszy

Dla macierzy z przykładu 8.1 pierwsza kolumna iloczynu to

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

a druga:

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Pierwszy wiersz można natomiast uzyskać z wierszy B :

$$(2, 0) + 2(-1, 1) - (3, 4) = (-3, -2),$$

a drugi jako $0(2, 0) + 3(-1, 1) + 2(3, 4) = (3, 11)$. Wynik jest taki sam jak przy liczeniu czterech elementów oddzielnie.

Rozkład na iloczyny kolumny i wiersza

Możemy też pogrupować sumę według indeksu k :

$$AB = \sum_{k=1}^n A^{(k)} B_{(k)}.$$

Tutaj kolumna rozmiaru $m \times 1$ mnożona przez wiersz $1 \times p$ daje macierz $m \times p$. Na przykład

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \end{pmatrix}.$$

Wszystkie jej kolumny są wielokrotnościami $(u_1, u_2)^T$, więc taka macierz ma rząd najwyżej 1.

Dwie inkluzje

Z opisów kolumn i wierszy wynika $\text{Col}(AB) \subseteq \text{Col}(A)$ oraz $\text{Row}(AB) \subseteq \text{Row}(B)$. Te relacje posłużą do oszacowania rzędu iloczynu.

9 Dlaczego mnożenie nie jest przemienne?

Już same rozmiary mogą uniemożliwić zamianę kolejności czynników:

Rozmiar A	Rozmiar B	Rozmiar AB	Iloczyn BA
2×3	3×4	2×4	nie jest określony
2×3	3×2	2×2	jest określony, ma rozmiar 3×3
2×2	2×2	2×2	jest określony, lecz może być różny od AB

Przykład 9.1. Niezerowe czynniki, zerowy iloczyn

Niech

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy oba iloczyny:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$QP = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q.$$

Zatem $PQ \neq QP$.

Interpretacja. Mapa Q wysyła (x, y) na $(0, x)$, a P rzutuje na oś Ox . Stąd

$$(x, y) \xrightarrow{Q} (0, x) \xrightarrow{P} (0, 0),$$

$$(x, y) \xrightarrow{P} (x, 0) \xrightarrow{Q} (0, x).$$

Pierwsza kolejność usuwa cały wynik poprzedniej mapy, druga zachowuje informację o współrzędnej x .

Iloczyn zerowy i skracanie

Z $AB = 0$ nie wynika $A = 0$ ani $B = 0$, co pokazują P, Q . Nie wolno też skracać dowolnego niezerowego czynnika: $PI_2 = PP = P$, chociaż $P \neq 0$ i $I_2 \neq P$.

10 Prawa działań na macierzach

Łączność mnożenia

Twierdzenie 10.1. Dla $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ zachodzi

$$A(BC) = (AB)C.$$

Oba iloczyny mają rozmiar $m \times q$.

Dowód przez składanie. Składanie funkcji jest łączne: obie strony złożenia trzech map wysyłają x na $T_A(T_B(T_C(x)))$. Zatem

$$T_A \circ (T_B \circ T_C) = (T_A \circ T_B) \circ T_C.$$

Lewa mapa ma macierz $A(BC)$, a prawa $(AB)C$. Jednoznaczność macierzy tej samej mapy daje równość. $\square$

Dowód ze wzoru na elementy. Wszystkie sumy są skończone, więc wolno zmieniać kolejność sumowania:

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^p a_{ik}b_{ks}c_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ks} \right) c_{sj} = \sum_{s=1}^p (AB)_{is}c_{sj} = [(AB)C]_{ij}. \end{aligned}$$

Równość zachodzi na każdej pozycji (i, j) . $\square$

Przykład 10.1. Dwie drogi obliczenia tego samego wyniku

Weźmy A, B z przykładu 8.1 i $x = (1, -1)^T$. Mnożenie najpierw macierzy przez wektor daje

$$Bx = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A(Bx) = \begin{pmatrix} 2 - 4 + 1 \\ -6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Najpierw obliczając iloczyn macierzy, dostajemy

$$(AB)x = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2 \\ 3 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Wyniki zgadzają się zgodnie z twierdzeniem.

Nawiasy a kolejność

Łączność pozwala zmieniać nawiasy w iloczynie ABC . Nie pozwala przestawiać czynników. We wszystkich trzech zapisach ABC , $A(BC)$, $(AB)C$ najpierw działa C , potem B , a na końcu A .

10.1 Rozdzielność, skalary i macierz jednostkowa

Jeśli $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{K}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{K}^{q \times m}$, to

$$(A + B)C = AC + BC, \quad D(A + B) = DA + DB.$$

Rozdzielność można otrzymać z działań na mapach liniowych. Pierwsza równość odpowiada $(T_A + T_B) \circ T_C = T_A \circ T_C + T_B \circ T_C$. Druga wykorzystuje liniowość T_D : $T_D \circ (T_A + T_B) = T_D \circ T_A + T_D \circ T_B$.

Bezpośrednio dla elementów macierzy mamy

$$\begin{aligned} [(A + B)C]_{ij} &= \sum_k (a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_k a_{ik}c_{kj} + \sum_k b_{ik}c_{kj}, \\ [D(A + B)]_{ij} &= \sum_k d_{ik}(a_{kj} + b_{kj}) = \sum_k d_{ik}a_{kj} + \sum_k d_{ik}b_{kj}. \end{aligned}$$

Dla dowolnego skalaru λ i zgodnych rozmiarów zachodzi ponadto

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),$$

bo w sumie $\sum_k a_{ik}b_{kj}$ można pomnożyć każdy składnik przez λ i przypisać ten czynnik do dowolnego z dwóch elementów.

Macierz jednostkowa

Macierz I_n ma jedynki na przekątnej i zera poza nią. Reprezentuje mapę identycznościową $x \mapsto x$. Dla $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$I_m A = A, \quad A I_n = A.$$

Można to sprawdzić ze składania z identycznością albo ze wzoru na elementy: $(I_m A)_{ij} = \sum_k \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$, $(A I_n)_{ij} = \sum_k a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$. Symbol δ_{ij} jest równy 1 dla $i = j$ i 0 w przeciwnym razie.

Przykład 10.2. Rozwinięcie kwadratu sumy macierzy

Dla macierzy kwadratowych tego samego rozmiaru rozdzielność daje

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Nad $\mathbb{R}$ zapis $A^2 + 2AB + B^2$ jest równoważny temu wzorowi dokładnie wtedy, gdy $AB = BA$. Dla P, Q z przykładu 9.1 mamy $P^2 = P$, $PQ = 0$, $QP = Q$, $Q^2 = 0$, zatem

$$(P + Q)^2 = P + Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zastąpienie $PQ + QP$ przez $2PQ$ dałoby błędny wynik P .

11 Transpozycja macierzy

Definicja 11.1. Dla $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ macierz transponowana $A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ jest dana przez

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Wiersze macierzy A stają się kolumnami A^T .

Na przykład

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 11.2. Przy zgodnych rozmiarach zachodzą równości

$$(A^T)^T = A, \quad (A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T, \\ \boxed{(AB)^T = B^T A^T.}$$

Dowód. Dwukrotna zamiana indeksów przywraca a_{ij} . Dodawanie i mnożenie przez skalar są wykonywane po pozycjach, zatem $[(A + B)^T]_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$ i $[(\lambda A)^T]_{ij} = \lambda a_{ji}$.

Dla iloczynu $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} [(AB)^T]_{ij} &= (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}. \end{aligned}$$

Wynik ma rozmiar $p \times m$, zgodnie z rozmiarem $B^T A^T$. □

Przykład 11.1. Sprawdzenie transpozycji iloczynu

Dla A, B z przykładu 8.1 mamy

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}, \\ B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2-3 & 0-3+6 \\ 0+2-4 & 0+3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Kolejność czynników i liczby zespolone

Transpozycja odwraca kolejność wszystkich czynników: $(A_1 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_1^T$. Nie zmienia jednak samych współczynników przez sprzężenie. Na przykład $(1 \ i)^T = (1, i)^T$.

12 Rząd iloczynu macierzy

Rząd macierzy jest wspólnym wymiarem przestrzeni jej kolumn i wierszy. W szczególności $\text{rank } A^T = \text{rank } A$, ponieważ transpozycja zamienia te dwie przestrzenie rolami.

Twierdzenie 12.1. Dla $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ zachodzi

$$\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank } A, \text{rank } B).$$

Dowód. Oszacowanie przez rząd A . Każda kolumna iloczynu jest kombinacją kolumn lewego czynnika:

$$(AB)^{(j)} = \sum_{k=1}^n b_{kj} A^{(k)}.$$

Stąd $\text{Col}(AB) \subseteq \text{Col}(A)$, a więc $\text{rank}(AB) \leq \text{rank } A$.

Oszacowanie przez rząd B . Każdy wiersz iloczynu jest kombinacją wierszy prawego czynnika:

$$(AB)_{(i)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} B_{(k)}.$$

Zatem $\text{Row}(AB) \subseteq \text{Row}(B)$, co daje $\text{rank}(AB) \leq \text{rank } B$. Obie nierówności razem dowodzą tezy. $\square$

Drugie oszacowanie można również otrzymać z pierwszego za pomocą transpozycji:

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}((AB)^T) = \text{rank}(B^T A^T) \leq \text{rank}(B^T) = \text{rank } B.$$

Przykład 12.1. Nierówność może być ostra

Dla P, Q z przykładu 9.1 obie macierze mają po jednej niezależnej kolumnie, więc $\text{rank } P = \text{rank } Q = 1$. Mimo to

$$PQ = 0, \quad \text{rank}(PQ) = 0 < 1 = \min(\text{rank } P, \text{rank } Q).$$

Przy odwrotnej kolejności $QP = Q$, więc $\text{rank}(QP) = 1$. Kolejność mnożenia może zmienić także rząd wyniku.

Interpretacja przez przekształcenia

Macierz B najpierw wysyła wektory wejściowe do przestrzeni $\text{Col}(B)$. Następnie działa A , więc $\text{Col}(AB) = \{Ay : y \in \text{Col}(B)\}$. Część niezależnych kierunków wytworzonych przez B może zostać przez A wysłana na zero lub stać się zależna. Rząd iloczynu nie musi osiągać mniejszego z rządów czynników.

12.1 Przykład z parametrem i interpretacja geometryczna

Przykład 12.2. Stałe rzędy czynników, zmienny rząd iloczynu

Niech $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dla każdego λ macierz B_λ ma rząd 1: druga kolumna jest zerowa, a pierwsza $(\lambda, 1)^T$ nigdy nie jest zerowa. Rząd P również wynosi 1.

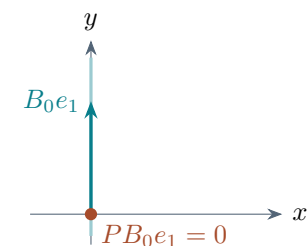
Mnożenie daje

$$PB_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\lambda P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B_\lambda.$$

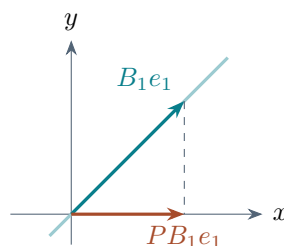
Stąd

$$\text{rank}(PB_\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda = 0, \\ 1, & \lambda \neq 0, \end{cases} \quad \text{rank}(B_\lambda P) = 1 \quad \text{dla każdego } \lambda.$$

Objaśnienie geometryczne. Mamy $B_\lambda(x, y) = (\lambda x, x)$, więc obrazem jest prosta $\text{span}\{(\lambda, 1)^T\}$. Gdy $\lambda = 0$, jest to oś Oy , którą P wysyła w całości na zero. Gdy $\lambda \neq 0$, rzut tej prostej na Ox pokrywa całą oś Ox .



$$\lambda = 0 : \quad \text{rank}(PB_0) = 0$$



$$\lambda = 1 : \quad \text{rank}(PB_1) = 1$$

O rzędzie złożenia decyduje również położenie obrazu pierwszej mapy względem kierunków zerowanych przez drugą.

Wniosek z przykładu

Znajomość samych liczb $\text{rank } A$ i $\text{rank } B$ daje oszacowanie rzędu iloczynu, ale zwykle nie wyznacza go jednoznacznie. Trzeba zbadać wzajemne działanie obu macierzy.

13 Przykład łączący cały materiał

Przykład 13.1. Pochodna i jej wartości w dwóch punktach

Rozważmy mapy

$$\mathbb{R}[t]_{\leq 2} \xrightarrow{D} \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \xrightarrow{E} \mathbb{R}^2, \quad D(p) = p', \quad E(q) = (q(0), q(1)).$$

Obie są liniowe. Przyjmujemy bazy $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$, $\mathcal{C} = (1, t)$ oraz bazę standardową $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

1. Macierze obu etapów

Z $D(1) = 0$, $D(t) = 1$, $D(t^2) = 2t$ i $E(1) = (1, 1)$, $E(t) = (0, 1)$ otrzymujemy

$$[D]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad [E]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Macierz złożenia

Najpierw działa D , więc jej macierz stoi po prawej:

$$[E \circ D]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Macierz ma rozmiar 2×3 , zgodnie z wymiarami końcowych przestrzeni.

3. Działanie na ogólnym wielomianie

Dla $p(t) = a + bt + ct^2$ mamy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b + 2c \end{pmatrix}.$$

Bezpośrednio $p'(t) = b + 2ct$, więc $E(D(p)) = (p'(0), p'(1)) = (b, b + 2c)$.

4. Rząd i zadanie odwrotne

Kolumny $(1, 1)^T$ i $(0, 2)^T$ są niezależne, zatem rząd wynosi 2. Aby otrzymać wynik $(3, 7)^T$, rozwiązujemy

$$b = 3, \quad b + 2c = 7 \implies c = 2.$$

Współczynnik a jest dowolny. Wszystkie rozwiązania to

$$\boxed{p(t) = a + 3t + 2t^2, \quad a \in \mathbb{R}.}$$

Stała nie wpływa na pochodną. Na wektor zerowy przechodzą dokładnie wielomiany stałe: równania $b = 0$, $b + 2c = 0$ dają $b = c = 0$.

A Zestawienie wzorów i metod

Pojęcie lub działanie	Wzór lub zasada
Liniowość	$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$
Kolumny macierzy	$[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^{(j)} = [T(b_j)]_{\mathcal{C}}$
Obraz wektora	$[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}$
Wymiar map	$\dim \mathcal{L}(V, W) = (\dim V)(\dim W)$ dla wymiarów skończonych
Iloczyn	$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$
Kolejność	$T_{AB} = T_A \circ T_B$: najpierw B , potem A
Łączność	$A(BC) = (AB)C$ przy zgodnych rozmiarach
Transpozycja	$(A^T)_{ij} = a_{ji}$, $(AB)^T = B^T A^T$
Rząd iloczynu	$\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank } A, \text{rank } B)$

Jak wyznaczyć macierz przekształcenia?

1. Zapisz dziedzinę, przestrzeń wartości i obie uporządkowane bazy.
2. Oblicz obrazy wszystkich wektorów bazy dziedziny.
3. Wyraż każdy obraz w bazie przestrzeni wartości.
4. Wstaw otrzymane kolumny współrzędnych w odpowiedniej kolejności.
5. Sprawdź rozmiar: $\dim W$ wierszy i $\dim V$ kolumn.

Jak mnożyć macierze i sprawdzać wynik?

Najpierw porównaj liczbę kolumn lewego czynnika z liczbą wierszy prawego. Element na pozycji (i, j) oblicz z wiersza i i kolumny j . Wynik można sprawdzić przez kombinacje kolumn lub działanie złożenia na wektorach bazy. Do potwierdzenia równości map liniowych wystarczy sprawdzenie całej bazy dziedziny.

Najważniejsze warunki rachunku

Macierze map dodajemy przy tych samych bazach wejścia i wyjścia. W składaniu musi zgadzać się baza pośrednia. Łączność pozwala zmieniać nawiasy, ale nie kolejność czynników. Transpozycja odwraca kolejność w iloczynie. Zerowy iloczyn może mieć niezerowe czynniki, a nierówność dla rzędu może być ostra.