PROBLEMY MILENIJNE

Wykonali: Kacper Cholewiński, Maksymilian Tabian, Bartosz Chudek
Kierunki: Matematyka i analiza danych, Matematyka
Przedmiot: Krótki kurs historii matematyki
Rok akademicki: 2024/25
Wydział: Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

PROBLEMY:

- Hipoteza Riemanna
- P vs NP
- Hipoteza Hodge'a
- Równania Naviera-Stokesa
- Istnienie teorii Yanga-Millsa i luka masowa
- Hipoteza Bircha i Swinnertona-Dyera
- Hipoteza Poincarégo (rozwiązana)

NAGRODA:

1 000 000$ za każde z siedmiu rozwiązanych zagadnień

RÓWNANIA NAVIERA-STOKESA

- Równanie ruchu – postać wektorowa : $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}(\boldsymbol{x}, t)$
- Równanie ruchu - postać skalarna (dla i = 1,2,3) : $\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + f_i(\boldsymbol{x}, t)$
- Równanie nieściśliwości : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – wektor prędkości płynu (zależny od czasu t i pozycji $\mathbf{x}$),

$p(\mathbf{x}, t)$ – ciśnienie w płynie,

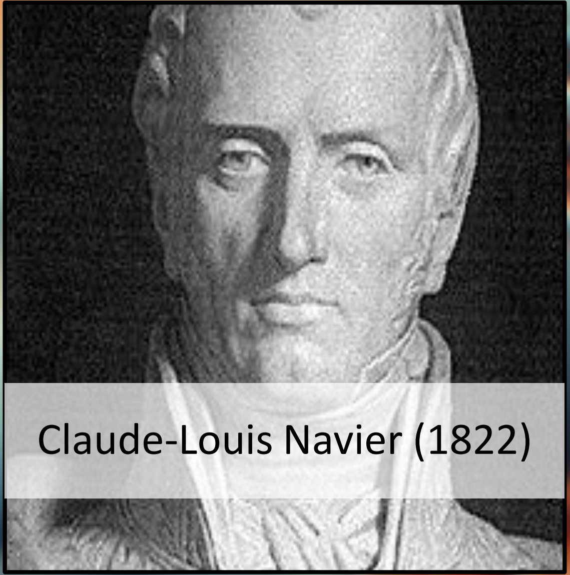
ρ – gęstość płynu (zakłada się, że jest stała),

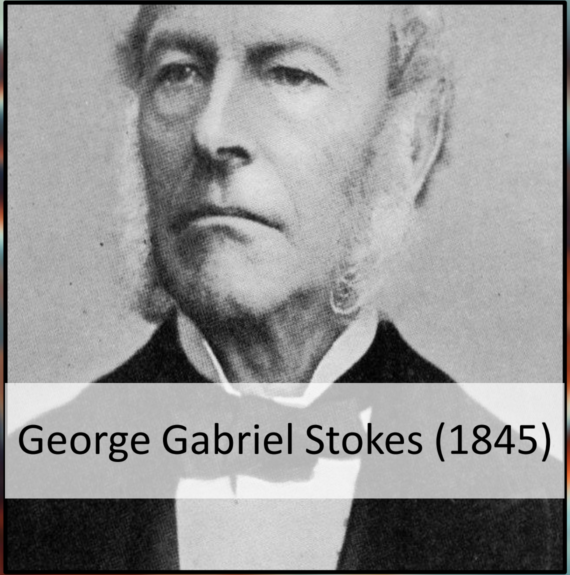
$\nu > 0$ – lepkość kinematyczna (określa opór płynu wobec ruchu),

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ – zewnętrzna siła objętościowa działająca na płyn (np. grawitacja),

∇ – operator gradientu,

Δ – operator Laplace'a ($\Delta = \nabla \cdot \nabla$).


Claude-Louis Navier (1822)

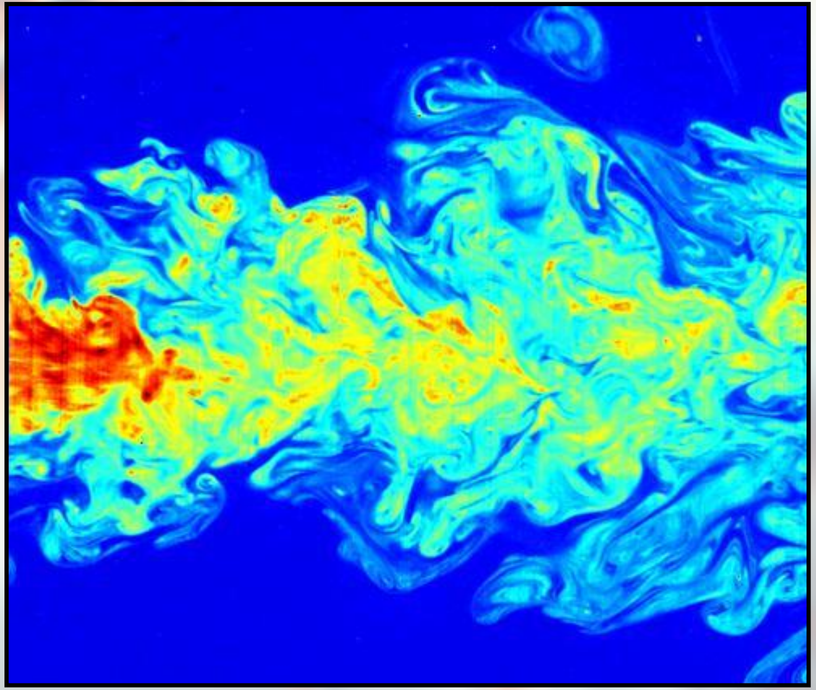

George Gabriel Stokes (1845)

RÓWNANIA NAVIERA-STOKESA

- Problem istnienia i gładkości rozwiązań:

W przypadku trójwymiarowego układu równań dla danych warunków początkowych nie udowodniono, że gładkie rozwiązania zawsze istnieją, ani nie znaleziono kontrprzykładów.

- W niektórych uproszczonych przypadkach rozwiązania są znane, np. przepływ jednowymiarowy lub liniowy
- W praktyce wiele problemów związanych z równaniami Naviera-Stokesa rozwiązuje się numerycznie (obliczeniowa mechanika płynów)



wizualizacja przepływu turbulentnego strumienia

HIPOTEZA RIEMANNA

Hipoteza Riemanna, sformułowana w 1859 roku przez niemieckiego matematyka Bernharda Riemanna.

Funkcja dzeta Riemanna $\zeta(s)$, zdefiniowana dla liczb zespolonych , takich że Re(s)>1.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Riemann zauważył jednak, że funkcję dzeta można rozszerzyć analitycznie na całą płaszczyznę zespoloną (z wyjątkiem punktu s=1, gdzie ma osobliwość)

Bernhard Riemann

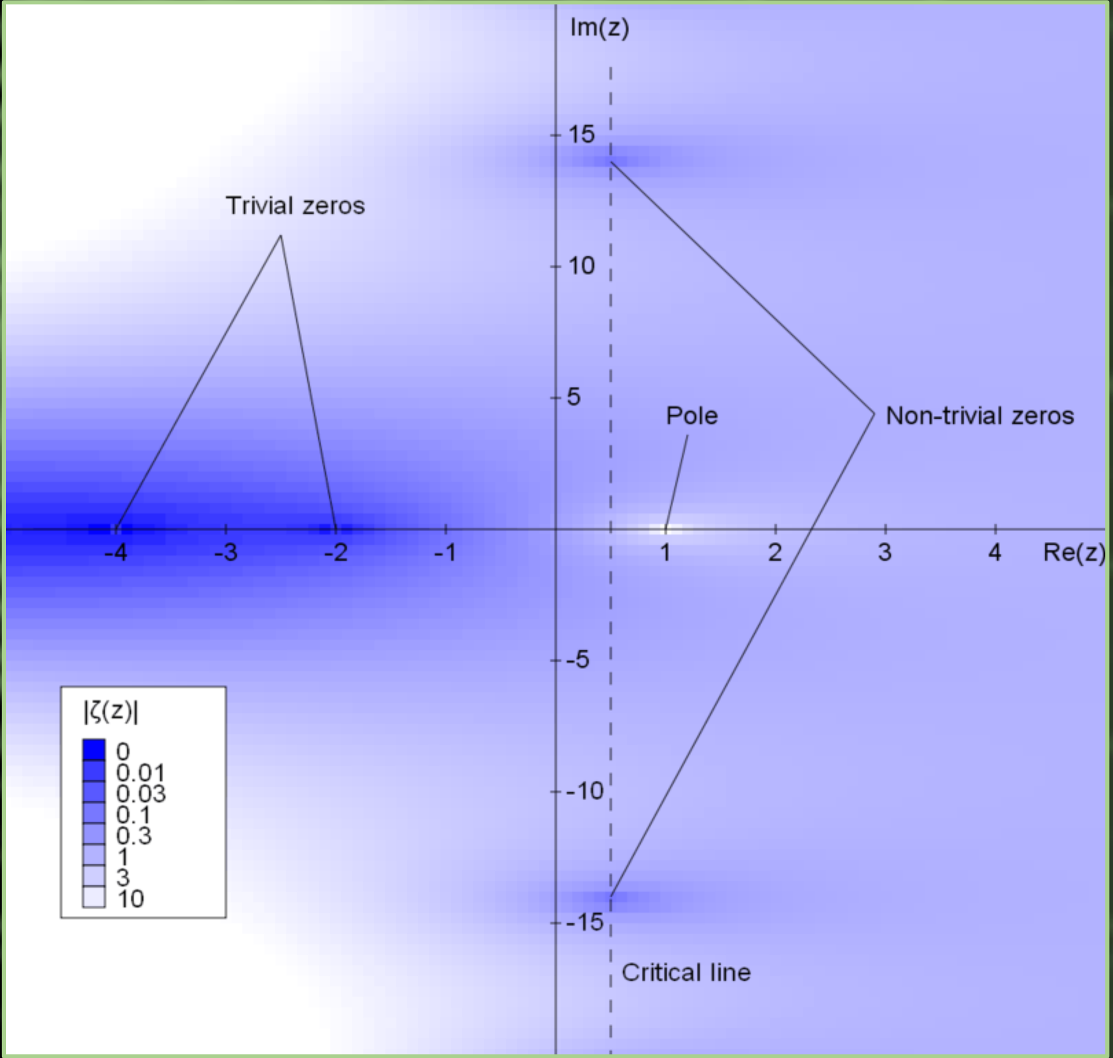
HIPOTEZA RIEMANNA

Zera funkcji dzeta

Funkcja dzeta ma tzw. trywialne zera w ujemnych liczbach parzystych s=−2,−4,−6, …

Wszystkie pozostałe zera funkcji dzeta, zwane nietrywialnymi, leżą w tzw. pasie krytycznym 0<Re(s)<1. Hipoteza Riemanna dotyczy właśnie tych zer.

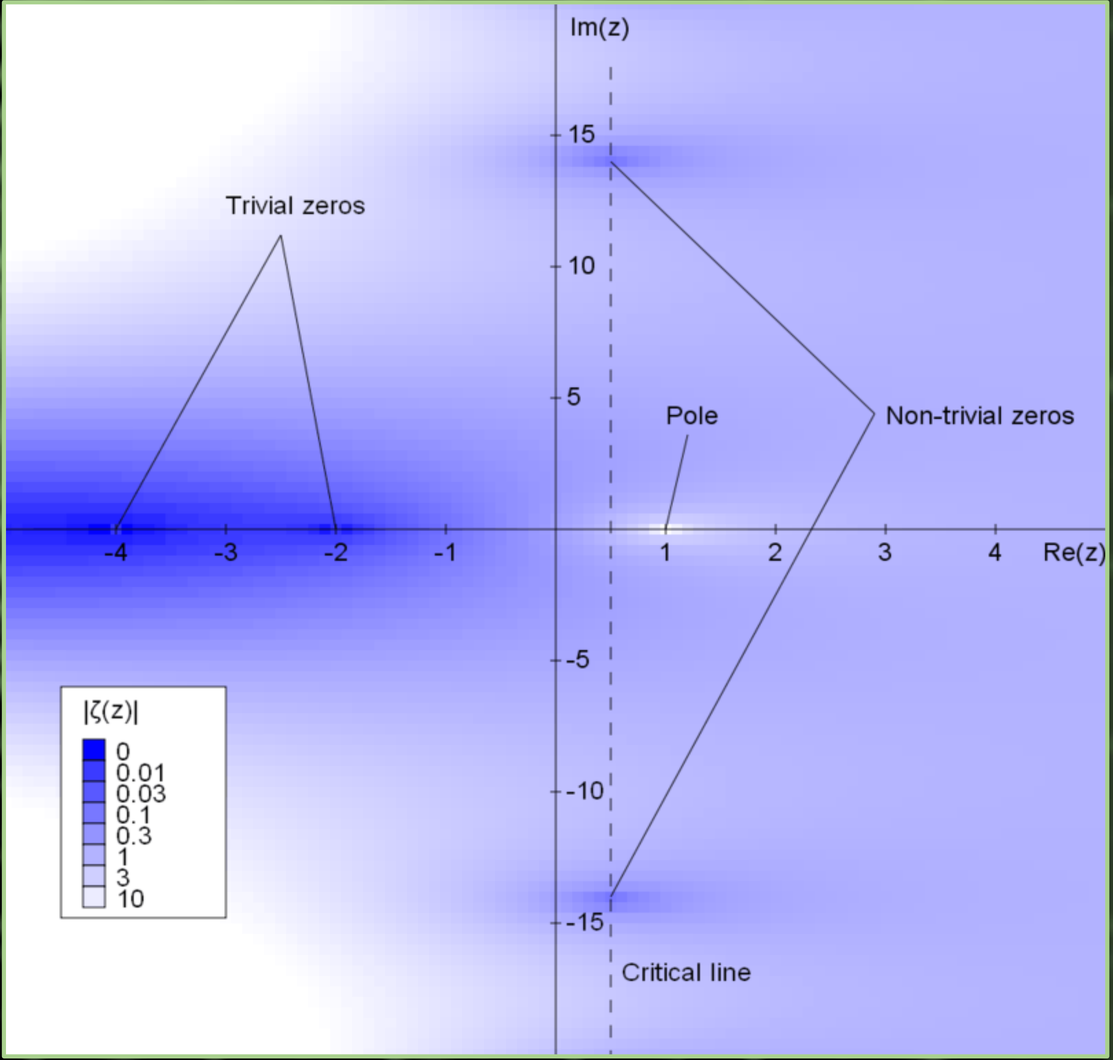
Hipoteza Riemanna stwierdza, że wszystkie nietrywialne zera funkcji dzeta leżą na prostej krytycznej Re(s)=$\frac{1}{2}$.



HIPOTEZA RIEMANNA

Co do tej pory udało się pokazać?

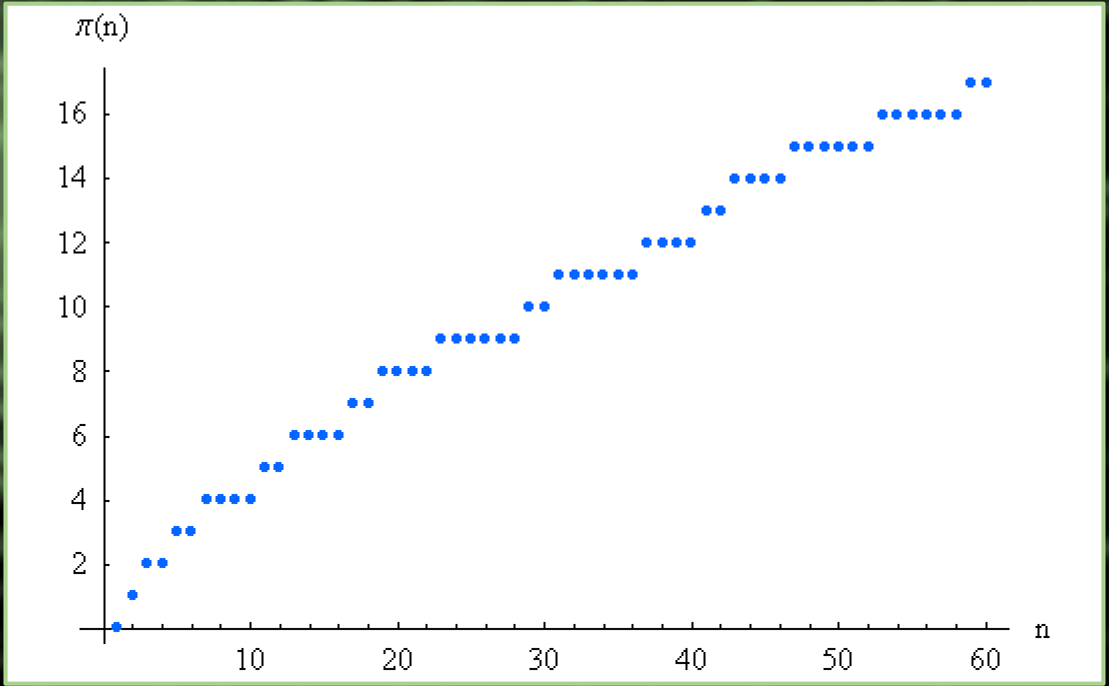
W 2021 roku numerycznie zweryfikowano, że aż 1.2363×10^{13} nietrywialnych zer funkcji dzeta leży na prostej krytycznej. Ponadto udowodniono, że co najmniej 40% wszystkich nietrywialnych zer tej funkcji znajduje się na tej prostej. Wyniki te świadczą za prawdziwością hipotezy, choć ogólny dowód pozostaje nadal otwartym wyzwaniem.



HIPOTEZA RIEMANNA

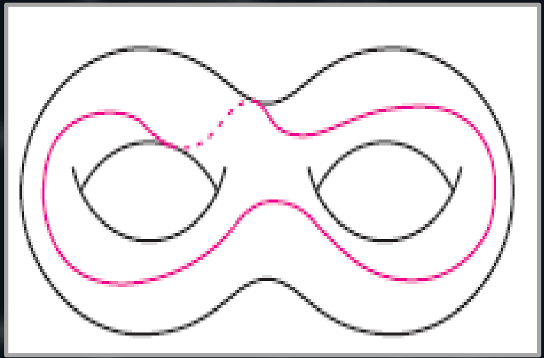
Zastosowania Hipotezy Riemanna:

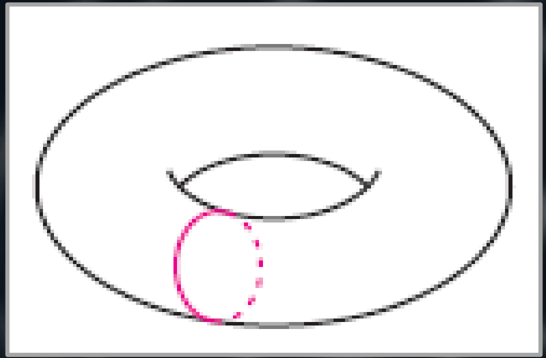
- Prawdziwość hipotezy Riemanna pozwalałaby na wzmocnienie pewnych nierówności dotyczących liczb pierwszych. Jest ona również równoważna twierdzeniu określającym liczbę liczb pierwszych w przedziale od 1 do n.
- Rozwiązanie hipotezy miałoby głęboki wpływ na wiele innych dziedzin teorii liczb, takich jak analiza funkcji arytmetycznych, badanie liczb pierwszych bliźniaczych
- Zrozumienie rozkładu liczb pierwszych ma znaczenie praktyczne w algorytmach kryptograficznych, które wykorzystują trudność faktoryzacji dużych liczb.



HIPOTEZA POINCARÉGO

- Zwarte, orientowalne rozmaitości dwuwymiarowe (w przestrzeni trójwymiarowej) – znane od ponad stu lat (powierzchnie, które mają dwie strony, a za to nie mają ani brzegu, ani żadnych nakłuć czy rozcięć)
- Są jednoznacznie opisane liczbą dziur g:
  - g = 0 – sfera $\mathbb{S}^2$,
  - g = 1 – torus $\mathbb{T}^2$,
  - g = 2 – podwójny torus,
  - g = 3 – potrójny torus itd.
- ⇒ otrzymujemy klasyfikację z dokładnością do homeomorfizmu



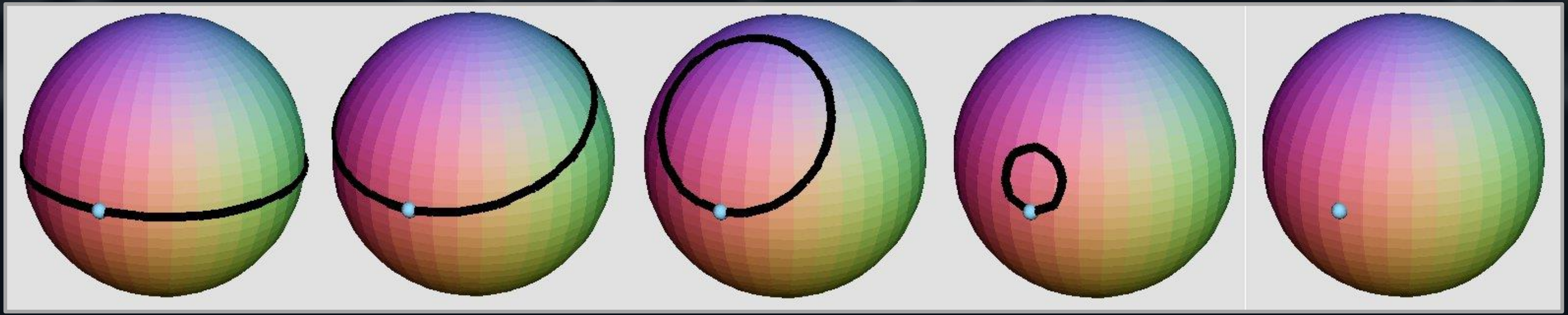


- Zwarte, orientowalne rozmaitości dwuwymiarowe (w przestrzeni trójwymiarowej) – znane od ponad stu lat (powierzchnie, które mają dwie strony, a za to nie mają ani brzegu, ani żadnych nakłuć czy rozcięć)
- Są jednoznacznie opisane liczbą dziur g:
  - g = 0 – sfera $\mathbb{S}^2$,
  - g = 1 – torus $\mathbb{T}^2$,
  - g = 2 – podwójny torus,
  - g = 3 – potrójny torus itd.
- ⇒ otrzymujemy klasyfikację z dokładnością do homeomorfizmu

HIPOTEZA POINCARÉGO

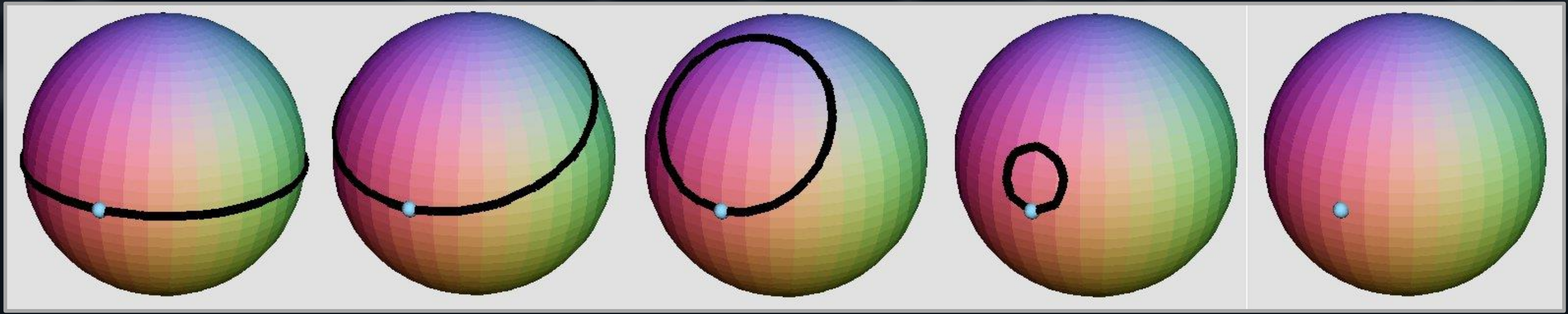
- Spośród tych powierzchni dwuwymiarowych jedynie sfera $\mathbb{S}^2$ jest jednospójna (ma tę własność, że każdą położoną na niej krzywą zamkniętą można w sposób ciągły, bez rozrywania, zdeformować do punktu)
- Każda dwuwymiarowa zwarta i jednospójna rozmaitość topologiczna bez brzegu jest homeomorficzna ze sferą dwuwymiarową $\mathbb{S}^2$, czyli brzegiem trójwymiarowej kuli.
- 1904 Henri Poincare:

„ Każda trójwymiarowa zwarta i jednospójna rozmaitość topologiczna bez brzegu jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową $\mathbb{S}^3$, czyli brzegiem czterowymiarowej kuli. ”



HIPOTEZA POINCARÉGO

- Analogiczne hipotezy dla wyższych wymiarów
  - $n \geq 5$ – dowód w 1961 roku (Stephen Smale – otrzymał medal Fieldsa)
  - $n = 4$ – dowód w 1982 roku (Michael Freedmann – otrzymał medal Fieldsa)
  - $n = 3$ – wciąż pozostawała nierozwiązana
- Prace dla $n = 3$
  - William Thurston (koniec lat 70.)– koncepcja geometrii na rozmaitościach trójwymiarowych
  - Twierdzenie o geometryzacji - każda zwarta trójwymiarowa rozmaitość topologiczna może być podzielona na części (przy użyciu sfer i torusów), z których każda posiada jedną z ośmiu możliwych struktur geometrycznych.
  - Hipoteza Poincar'ego jest <u>szczególnym przypadkiem twierdzenie o geometryzacji</u>
  - Medal Fieldsa w 1982 roku (ale dowód twierdzenia pozostawał niepełny)
- 1982 – Richard Hammilton
  - Metoda przepływu Ricciego - narzędzie do badania struktury trójwymiarowych rozmaitości



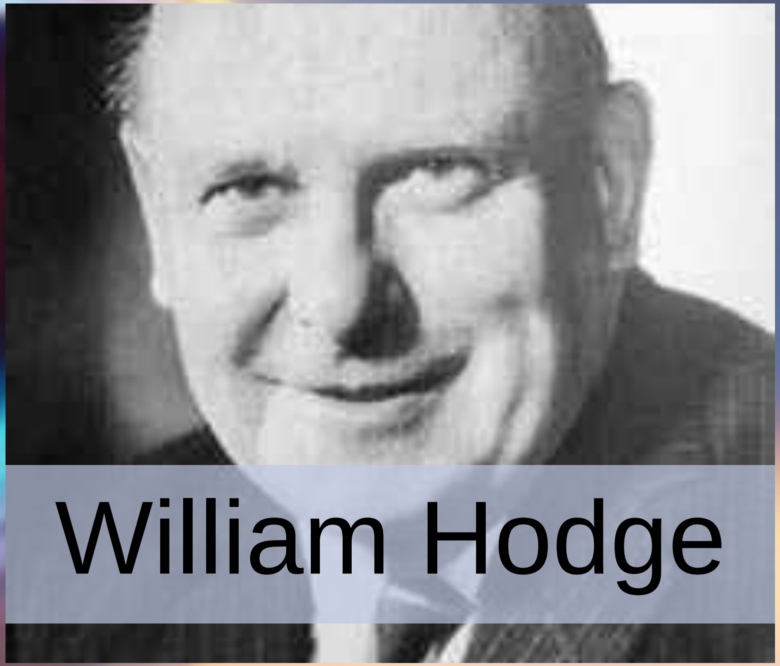
HIPOTEZA POINCARÉGO

- Grigorij Perelmann (2002 - 2003)
  - Rozwinął i ulepszył idee Hamiltona (Wprowadzenie metod radzenia sobie z osobliwościami przepływu Ricciego)
  - Użycie przepływu Ricciego do udowodnienia twierdzenia o geometryzacji Thurstona, co jednocześnie potwierdziło hipotezę Poincarégo.
  - Przedstawił dowód w serii trzech artykułów internetowych
  - 2006 – Medal Fieldsa (nie przyjął)
  - Nagroda Instytutu Claya w wysokości miliona dolarów (nie przyjął)

HIPOTEZA HODGE'A

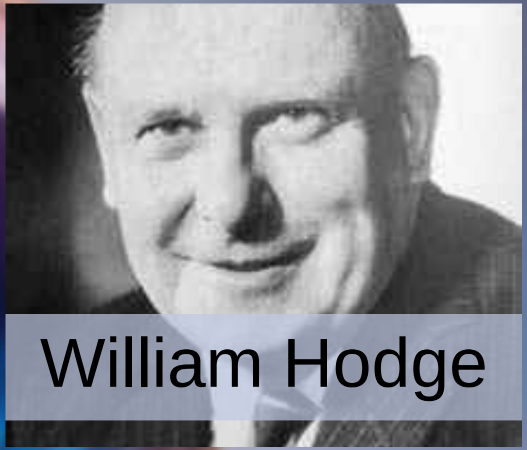
Hipoteza została zaproponowana przez Williama Hodge'a w 1941 r, zaprezentowana na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1950 r.

Zakłada, że fragmenty niektórych specjalnych typów przestrzeni zwane cyklami Hodge'a są kombinacjami geometrycznymi cykli algebraicznych.



HIPOTEZA HODGE'A

W latach 60. i 70. XX wieku za sprawą Alexandre'a Grothendiecka oraz jego współpracowników, takich jak Jean-Pierre Serre i Pierre Deligne, możliwe było lepsze zrozumienie aspektów algebraicznych hipotezy. Deligne wniósł szczególnie ważny wkład, udowadniając szczególne przypadki hipotezy Hodge'a.

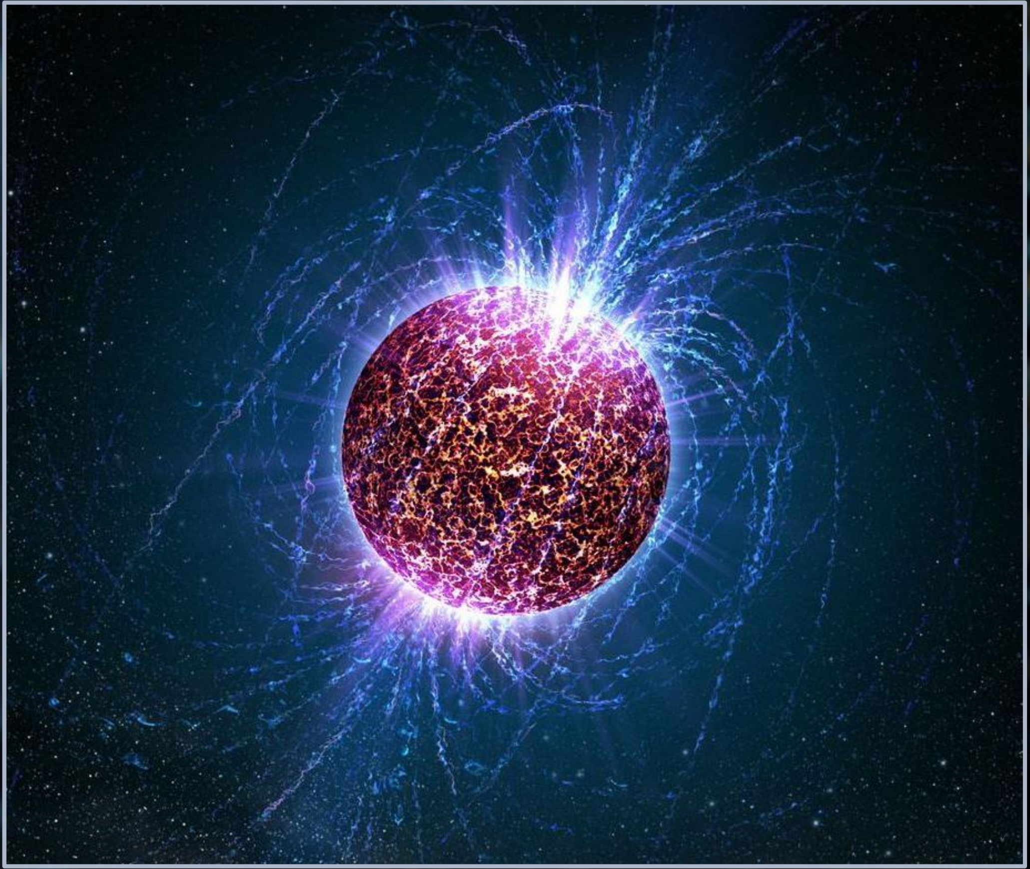


TEORIA YANGA-MILLSA

Sformułowanie: Udowodnić, że dla dowolnej zwartej prostej grupy cechowania, istnieje nietrywialna kwantowa teoria pola Yanga-Millsa na czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej, posiadająca lukę masową.

Pojęcia:

- Grupa cechowania to grupa symetrii takich przekształceń matematycznych na obiektach teorii, które nie zmieniają żadnych mierzalnych wielkości fizycznych. Z punktu widzenia fizyki teoretycznej ważne jest to, czy dana grupa cechowania jest przemienna czy nieprzemienna.
- Teoria Yanga-Millsa to nieabelowa (nieprzemienna) kwantowa teoria pola podobna do tej, która leży u podstaw Modelu Standardowego fizyki cząstek. Została zaproponowana w 1954 roku.
- Luka masowa w kwantowej teorii pola to różnica energii między próżnią, a najniższym stanem o wyższej energii.

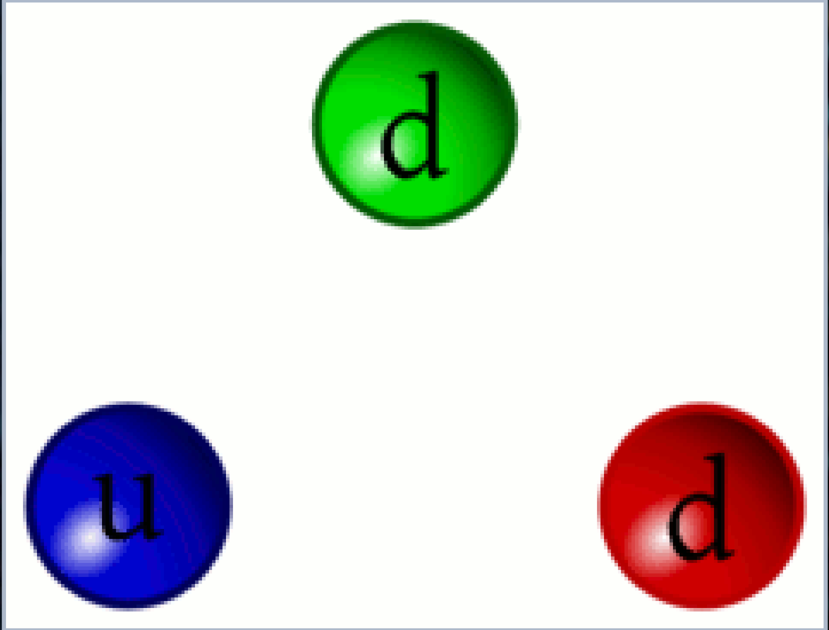


TEORIA YANGA-MILLSA

Sformułowanie: Udowodnić, że dla dowolnej zwartej prostej grupy cechowania, istnieje nietrywialna kwantowa teoria pola Yanga-Millsa na czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej, posiadająca lukę masową.

Zatem rozwiązanie problemu wymaga:

- Udowodnienia, że teoria Yanga-Millsa istnieje i spełnia standardy ścisłości charakteryzujące współczesną fizykę matematyczną, w szczególności konstruktywną teorię pola kwantowego.
- Udowodnienia, że masa wszystkich cząstek pola siłowego przewidywanego przez teorię jest ściśle dodatnia.

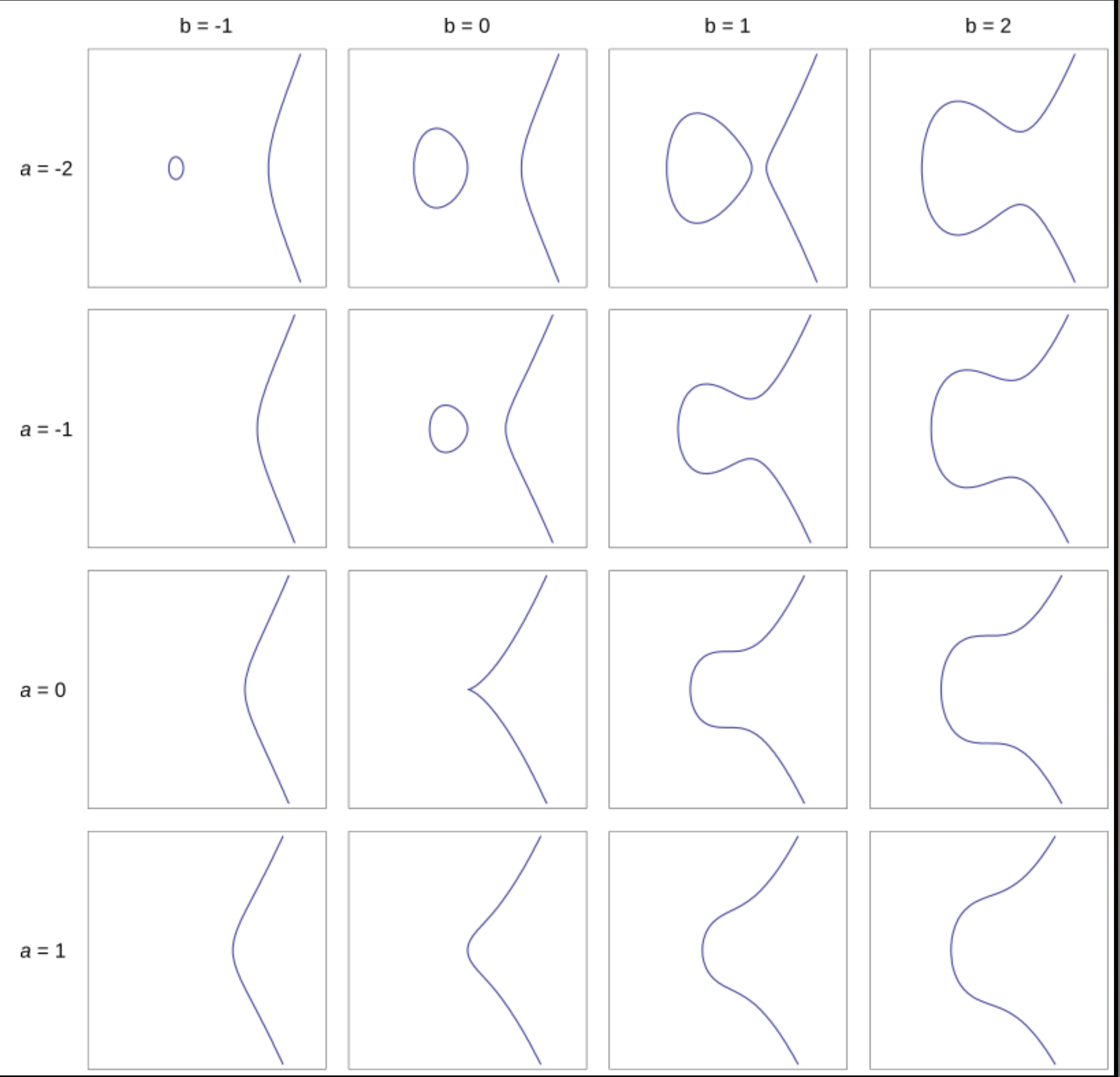


HIPOTEZA BIRCHA I SWINNERTONA-DYERA

W 1965 roku Birch i Swinnerton-Dyer sformułowali hipotezę, która łączy geometrię krzywych eliptycznych z teorią liczb.

Hipoteza ta mówi o liczbie rozwiązań pewnych równań diofantycznych w zbiorze liczb wymiernych z zachowaniem pewnej funkcji.

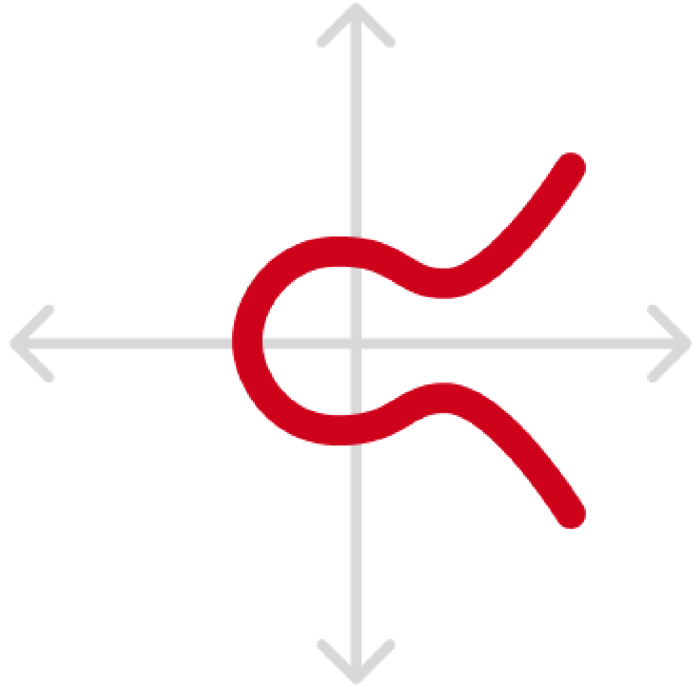
Zgodnie z hipotezą, jeśli wartość tej funkcji w punkcie s=1 wynosi 0, to istnieje nieskończenie wiele rozwiązań wymiernych. Jeśli natomiast wartość funkcji w tym punkcie jest różna od 0, liczba rozwiązań wymiernych jest skończona.



HIPOTEZA BIRCHA I SWINNERTONA-DYERA

Hipoteza została częściowo udowodniona w określonych przypadkach, dla pewnych szczególnych krzywych eliptycznych nad liczbami wymiernymi. Jednak ogólny dowód pozostaje nierozstrzygnięty.

Potwierdzenie jej prawdziwości dostarczyłoby głębszego zrozumienia zagadnień z teorii liczb. Ponadto, wyniki tej hipotezy mają zastosowanie w kryptografii, gdzie krzywe eliptyczne są wykorzystywane w algorytmach szyfrowania, zapewniając bezpieczeństwo cyfrowych transakcji.

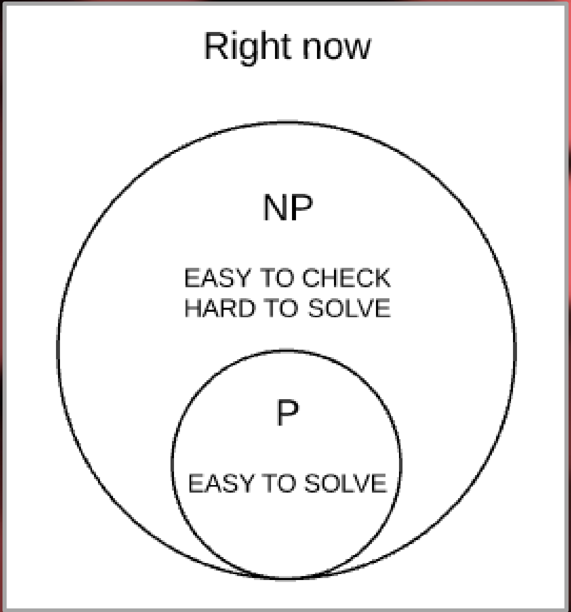


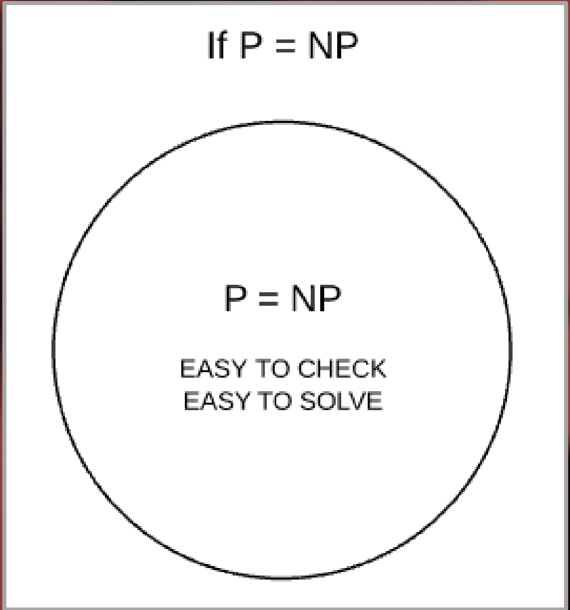
$y^2=x^3+ax+b$

P vs NP

- Zaproponowana w 1971
- P - klasa problemów, które można rozwiązać w czasie wielomianowym $O(n^k)$
- NP - klasa problemów, dla których, mając już gotowe rozwiązanie, można je zweryfikować w czasie wielomianowym $O(n^k)$

- $P \subseteq NP$
- Czy $NP \subseteq P$ (czyli NP = P) ?





P vs NP

Na przykładzie uogólnionego sudoku

- PROBLEM:

Mając niekompletną planszę sudoku o rozmiarze $n^2 \times n^2$, czy istnieje przynajmniej jedno prawidłowe rozwiązanie, w którym każdy wiersz, kolumna i kwadrat $n \times n$ zawiera liczby od 1 do n^2?

- mając podaną propozycję rozwiązania, " łatwo” jest zweryfikować czy jest ono prawidłowe
- nie wiadomo, czy istnieje algorytm działający w czasie wielomianowym, który potrafi poprawnie odpowiedzieć "tak" lub "nie" dla wszystkich przypadków tego problemu
- dlatego uogólnione sudoku należy do klasy NP (szybko weryfikowalne) i może, ale nie musi należeć do klasy P (szybko rozwiązywalne)

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Bibliografia:

- medium.com/@bilalaamir/p-vs-np-problem-in-a-nutshell-dbf08133bec5
- en.wikipedia.org/wiki/Navier%E2%80%93Stokes_existence_and_smoothness
- www.deltami.edu.pl/media/articles/2004/01/delta-2004-01-hipoteza-poincar-ego.pdf
- en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_conjecture
- www.claymath.org/
- www.sciencedirect.com/topics/physics-and-astronomy/yang-mills-theory
- wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/wiadomosci-matematyczne/article/download/4970/4543
- en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems

DZIĘKUJEMY ZA UWAGĘ