

TEORIA CHAOSU

Autorzy: Szymon Sapkowski, Karolina Seweryn, Olaf Skrabacz, Kinga Szarkowska

Wydział MiNI
Politechnika Warszawska
Rok akademicki 2015/2016 Semestr letni

Krótki kurs historii matematyki

DEFINICJA

Chaos (grec. Χάος)

- pustka; bezkształtna „masa”,
- nieporządek, nieregularność.

Deterministyczny - istnieje przepis matematyczny (równania różnicowe/różniczkowe) określający stan w danej chwili na podstawie stanu w chwili wcześniejszej.

HISTORIA



Jacques Salomon
Hadamard



Jules Henri Poincaré

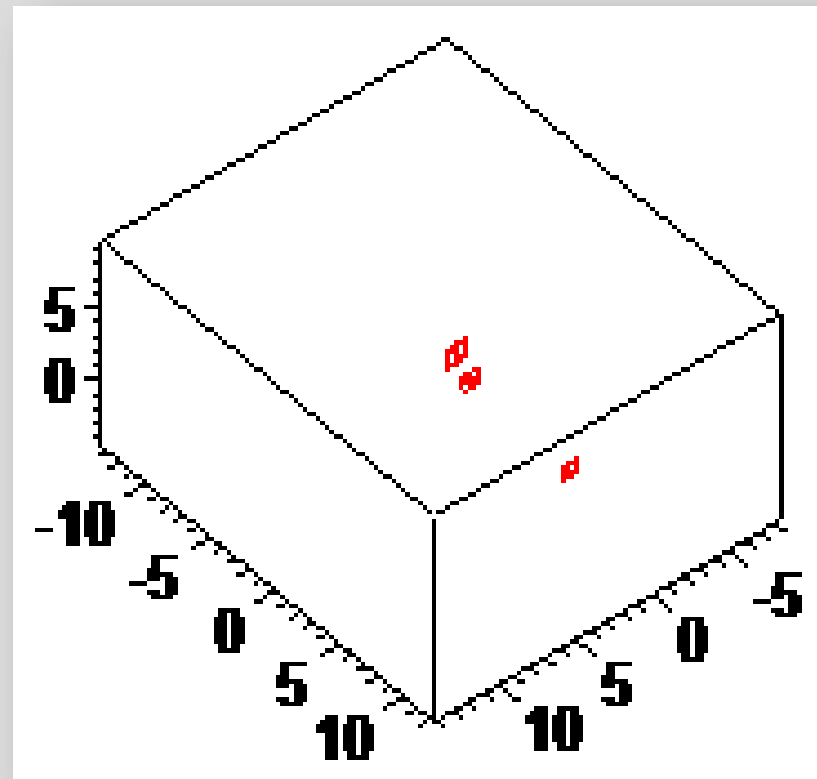


Edward Norton Lorenz

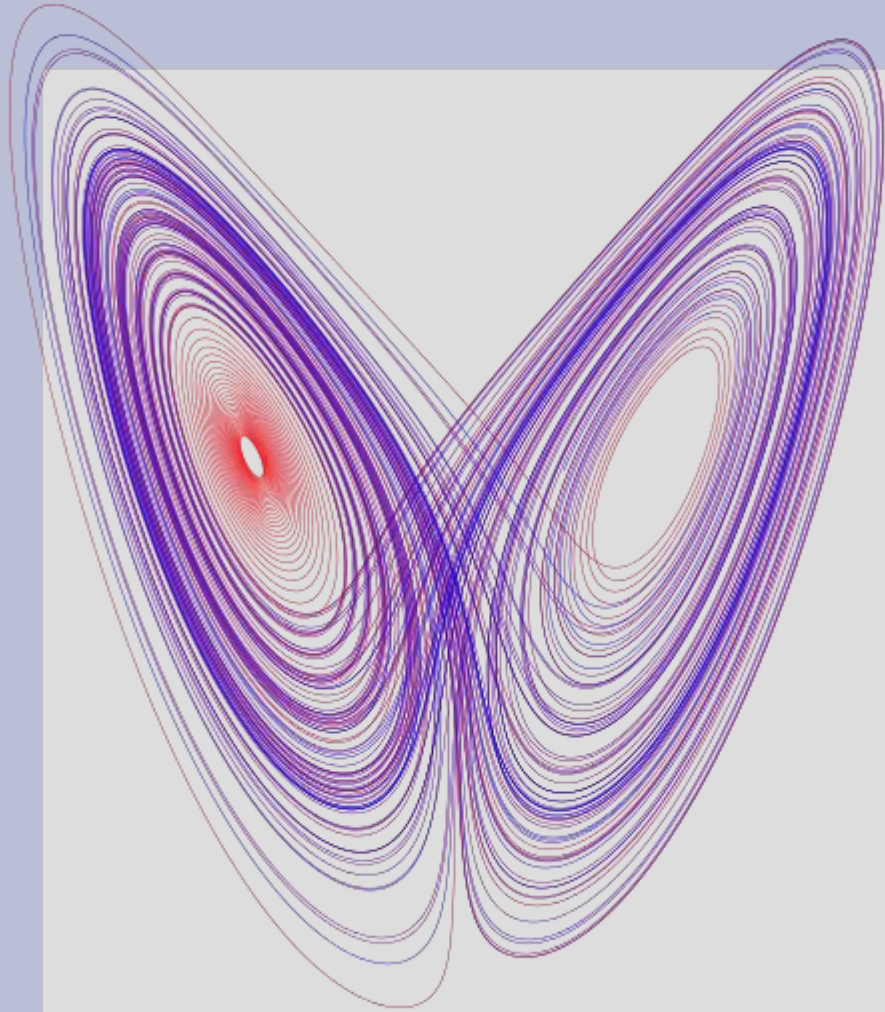
POCZĄTKI

Zagadnienie trzech ciał badane przez Henri'ego Poincare'go (1892).

Wyznaczenie toru ruchów wszystkich ciał danego układu o danych masach, prędkościach i położeniach początkowych w oparciu o prawa ruchu.



EFEKT MOTYLA



When the present determines the future, but the approximate present does not approximately determine the future.

Edward Lorenz

WNIOSKI

Niewielkie zaburzenie warunków początkowych powoduje rosnące wykładniczo z czasem zmiany w zachowaniu układu. Popularnie nazywane jest to efektem motyla - znikoma różnica na jakimś etapie może po dłuższym czasie urosnąć do dowolnie dużych rozmiarów. Powoduje to, że choć model jest deterministyczny, w dłuższej skali czasowej wydaje się zachowywać w sposób losowy.

DEMON LAPLACE'A

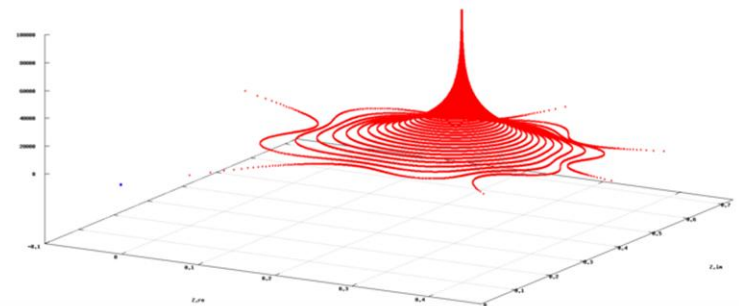


PRZESTRZEŃ FAZOWA

- **Przestrzeń fazowa** – przestrzeń wszystkich możliwych stanów w jakich może znajdować się badany układ. Każdy stan układu jest jednym punktem tej przestrzeni.
- W mechanice klasycznej przestrzeń fazowa zwykle zawiera dopuszczalne wartości pozycji i prędkości poszczególnych obiektów. Wykres pokazujący zmiany tych wartości w czasie nazywany jest wykresem fazowym.

ATRAKTOR

- **Atraktor** – zbiór w przestrzeni fazowej, do którego w miarę upływu czasu zbiegają trajektorie rozpoczynające się w różnych obszarach przestrzeni fazowej.
- Atraktorem może być punkt, zamknięta krzywa lub fraktal.
- Czasem stosowana jest polska nazwa: ściek. Każdy atraktor ma swój obszar przyciągania zwany basenem przyciągania (zbiór takich warunków początkowych, dla których trajektoria zmierza do atraktora)
- Przykład: punkt.



KRYTERIUM CHAOTYCZNOŚCI

- Określenie wartości wykładników Lapunowa.
- Układ jest chaotyczny, jeśli ma co najmniej jeden dodatni wykładnik Lapunowa. W takim wypadku w przestrzeni fazowej blisko leżące trajektorie mogą po pewnym czasie dowolnie się od siebie oddalić.

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right|$$

WYKŁADNIK LAPUNOWA

Współczynnik ten jest również miarą utraty informacji o układzie w jednym przekształceniu. Mogą zaistnieć trzy możliwości:

- $\lambda < 0$ - orbita zmierza do stabilnego punktu lub staje się orbitą periodyczną,
- $\lambda = 0$ - orbita zmierza do neutralnego, stałego punktu,
- $\lambda > 0$ - orbita jest niestabilna i chaotyczna.

UKŁADY CHAOTYCZNE

- Niektóre równania i układy liniowe posiadają rozwiązania niestabilne.
- Niektóre układy dynamiczne są chaotyczne wszędzie, ale w większości wypadków takie zachowanie dotyczy jedynie pewnego podzbioru przestrzeni fazowej.

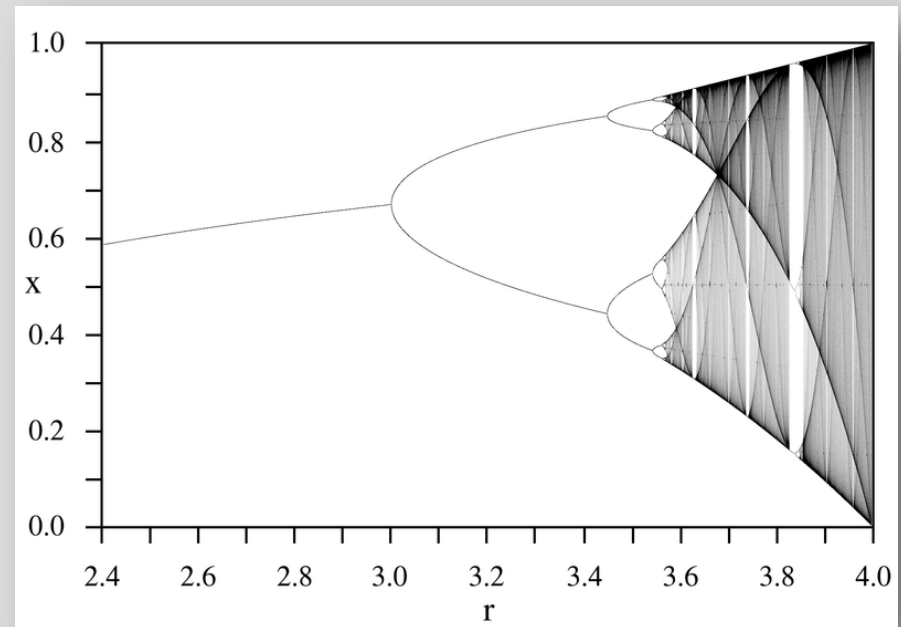


Diagram pokazujący dojście do zachowania chaotycznego

PRZERWA NA PROGNOZĘ POGODY

JAK PRZEWIDZIEĆ POGODĘ?

- Marzec 1963
Edward Lorenz publikuje prace „*Jurnal of the atmospheric sciences*”.
- W tej pracy opisuje on układ trzech równań różniczkowych, które w przybliżony sposób opisują zjawisko konwekcji termicznej w atmosferze.

JAK PRZEWIDZIEĆ POGODĘ?

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

ZASTOSOWANIA

- Kodowanie informacji graficznych – sztuczne krajobrazy i efekty specjalne
- Modele używane w biologii – procesy ewolucyjne
- Ekonomia i nauki społeczne

CHAOS W POLSCE

- Konferencja naukowa „Geometric Theory of Dynamical Systems” organizowana w 2002 roku
- Międzynarodowa konferencja „Euroattractor 2002” organizowana kilkukrotnie w Warszawie

PODSUMOWANIE

- Teoria chaosu jest jedną z trzech największych rewolucji XX wieku (obok Teorii Względności i Mechaniki Kwantowej), jednak w odróżnieniu do wyżej wymienionych dotyczy każdej dziedziny nauki (fizyki, chemii, biologii).
- Chaos deterministyczny jest zjawiskiem powszechnym w naturze.
- Źródłem chaosu jest nieliniowość.
- Cecha charakterystyczna układów chaotycznych: wrażliwość na warunki początkowe skutkująca nieprzewidywalnością w dużej skali czasowej.

DZIĘKUJEMY ZA UWAGĘ 😊