Egzamin z MATEMATYKI DYSKRETNEJ (EiTI) z dnia 2010-01-26

Imię i nazwisko:

Zaznacz X prawdziwe odpowiedzi lub uzupełnij w miejscu ...... Każda odpowiedź za 2 punkty.

1. Niech $T = (V, E)$ będzie grafem.
   (A) Jeśli T jest drzewem to $|V| = |E| + 1$. **(B)** Jeśli T jest dwudzielny to nie ma cykli.
   (C) Jeśli T nie jest pojedyńczym cyklem, ani grafem pełnym to $\chi(T) \leq \max\{\delta_T v : v \in V\}$

2. Niech $\mathcal{U} = (A_1, \cdots, A_n)$ będzie rodziną zbiorów skończonych oraz niech $P \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
   (A) Jeśli $\forall I \subset \{1, \cdots, n\}$ $|\bigcup_{i \in I} A_i| = |I|$ to $\mathcal{U}$ ma traswersalę.
   (B) Jeśli $\forall I \subset \{1, \cdots, n\}$ $|P \setminus \bigcup_{i \in I} A_i| \leq n - |I|$ to $\mathcal{U}$ ma traswersalę zawierającą wszystkie elementy P.
   (C) Jeśli $\mathcal{U}$ ma traswersalę zawierającą wszystkie elementy P to $\forall I \subset \{1, \cdots, n\}$ $|P \setminus \bigcup_{i \in I} A_i| \leq n - |I|$.

3. Niech ciąg $[1, 3, 3, 5, 1, 5]$ będzie kodem Prüfera drzewa $D = (V, E)$.
   (A) $|V| = \ldots\ldots$ **(B)** $\delta_D 1 = \ldots\ldots$ **(C)** $\{1, 2\} \in E$.

4. Dla ustalonych liczb naturalnych n, k, $n > 2k$, liczba rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k+1} = 2n$
   (A) w liczbach całkowitych nieujemnych wynosi ...... **(B)** w liczbach parzystych dodatnich wynosi ......
   (C) w liczbach nieparzystych nieujemnych wynosi ......

5. Niech H będzie grafem przedstawionym na rysunku.
   (A) $\chi_e(H) = \ldots\ldots$ **(B)** Liczba automorfizmów grafu H wynosi ...... **(C)** H jest hamiltonowski.

   Przepisz poniższe zadania i rozwiąż na oddzielnych kartkach. Każde zadanie za 15 punktów.

6. Wyprowadź wzór na liczbę nieporządków zbioru n-elementowego.

7. Rozwiązać równanie rekurencyjne: $a_n = 5na_{n-1} - 15n + 3$ dla $n \geq 1$ i $a_0 = 4$.

H

Egzamin z Matematyki Dysktretnej (EiTI) z dnia 26 I 2010

Imię i nazwisko:

Zaznacz X prawdziwe odpowiedzi lub uzupełnij w miejscu ...... Każda odpowiedź za 2 punkty.

1. Niech $T = (V, E)$ będzie grafem.
   (A) Jeśli T jest eulerowski to istnieje rozkład E na cykle rozkłączne. **(B)** $\chi_e(T) \leq \max\{\delta_T v : v \in V\} + 1$
   (C) Jeśli w T istnieje ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki z V to T jest semi-eulerowski.

2. Niech $\mathcal{U} = (A_1, \cdots, A_n)$ będzie rodziną zbiorów skończonych oraz niech $P \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
   (A) Jeśli $\mathcal{U}$ ma traswersalę to $\forall I \subset \{1, \cdots, n\}$ $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq |I|$.
   (B) Jeśli $\exists I \subset \{1, \cdots, n\}$ $|P \setminus \bigcup_{i \in I} A_i| > n - |I|$ to $\mathcal{U}$ nie ma traswersali zawierającej wszystkie elementy P.
   (C) Jeśli $\mathcal{U}$ ma traswersalę zawierającą wszystkie elementy P to $\forall I \subset \{1, \cdots, n\}$ $|P \setminus \bigcup_{i \in I} A_i| < n - |I|$.

3. Niech ciąg $[5, 5, 3, 5, 1, 5]$ będzie kodem Prüfera drzewa $D = (V, E)$.
   (A) $|E| = \ldots\ldots$ **(B)** $\delta_D 2 = \ldots\ldots$ **(C)** $\{1, 2\} \in E$.

4. Dla ustalonych liczb naturalnych n, k, $n > 2k$, liczba rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k} = 2n + 1$
   (A) w liczbach całkowitych nieujemnych wynosi ...... **(B)** w liczbach parzystych dodatnich wynosi ......
   (C) w liczbach nieparzystych nieujemnych wynosi ......

5. Niech H będzie grafem przedstawionym na rysunku.
   (A) $\chi(H) = \ldots\ldots$ **(B)** Liczba grafów izomorficznych z H wynosi ...... **(D)** H jest hamiltonowski.

   Przepisz poniższe zadania i rozwiąż na oddzielnych kartkach. Każde zadanie za 15 punktów.

6. Wyprowadź wzór na liczbę surjekcji zbioru n-elementowego w zbiór m-elementowy.

7. Rozwiązać równanie rekurencyjne: $a_{n+1} = (2n + 2)a_n - 10n - 5$ dla $n \geq 0$ i $a_0 = 6$.

H