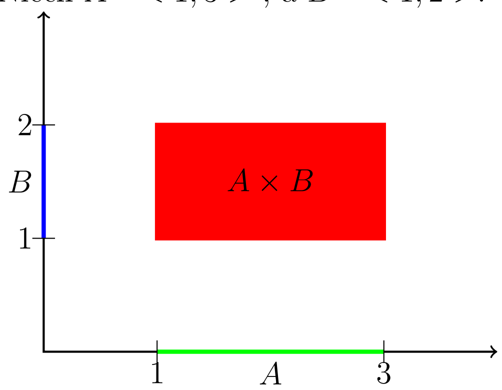
SIMR 2013/14, Analiza 1, wykład 1, 2013-10-04

# Zbiory - oznaczenia, operacje

Oznaczenia zbiorów:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3. \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3. \dots\}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in Z, q \neq 0\}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych
$< a, b >$ , $(a, b >$ , $(-\infty, b >$ , $(a, \infty)$ i.t.p. - przedziały
Działania na zbiorach:
$A \cup B$ - suma zbiorów
$A \cap B$ - iloczyn zbiorów (przecięcie)
$A \setminus B$ - różnica zbiorów
$A'$ - dopełnienie zbioru $A$
**Uwaga:** Użwyając dopełnienie zakłabamy, że zbiór $A$ jest podzbiorem jakiegoś większego, ustalonego zbioru (najczęściej $\mathbb{R}$ . Wtedy $A' = \mathbb{R} \setminus A$
$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ - iloczyn kartezjański zbiorów
**Przykład 1:**
Niech $A = \{1, 2\}$ , a $B = \{1, 2, 3\}$. Wtedy:
$A \times B = \{(1, 1) , (1, 2) , (1, 3) , (2, 1) , (2, 2) , (2, 3)\}$
**Przykład 2:**
Niech $A =< 1, 3 >$ , a $B =< 1, 2 >$. Wtedy: $A \times B$ jest prostokątem:




Dla iloczynu kartezjańskiego tego samezgo zbioru przez siebie stosujemy oznaczenie:
$A^2 = A \times A$ , $A^3 = A \times A \times A$ i.t.p.

# Funkcje

Funkcją nazywamy trójkę $(X, Y, W)$ , gdzie $X, Y$ są zbiorami, a $W \subset X \times Y$ jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego mającym własność:
Dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$ taki, że $(x, y) \in W$

Zbiór $X$ nazywamy dziedziną funkcji, $Y$ przeciwdziedziną funkcji, a $W$ wykresem funkcji. Stosujemy też oznaczenie: $y = f(x)$ zamiast $(x, y) \in W$ , oraz $f : X \to Y$

Element $x$ nazywamy argumentem funkcji, a $y = f(x)$ obrazem lub wartością funkcji.

Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem $X$ to zbiór $f(A) = \{y \in Y : (\exists x \in X) \quad y = f(x)\}$ nazywamy obrazem zbioru $A$.

Obraz dziedziny $f(X)$ nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Jeśli $B \subset Y$ jest podzbiorem $Y$ to zbiór $f^{-1}(B) = \{x \in X : (\exists y \in B) \quad y = f(x)\}$ nazywamy przeciwobrazem zbioru $B$.

Funkcja jest 'na' wtedy i tylko wtedy, gdy $f(X) = Y$ - zbiór wartości jest równy przeciwdziedzinie. Inaczej można to sformułować: przeciwobraz zbioru niepustego jest niepusty.
Funkcja jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz zbioru jednoelementowego jest zbiorem jednoelementowym lub pustym: $(\forall x_1, x_2 \in X) \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

Jeżeli funkcja jest różnowartościowa i 'na' to istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \to X$ zdefiniowana następująco:
$(\forall x \in X, y \in Y) \quad x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$
Taką funkcję nazywamy też bijekcją.

**Uwaga:** Zmiast funkcja używa się też sformułowań: przekształcenie, odwzorowanie, transformacja, operator, działanie.

## Elementy logiki

$p$ - zdanie. Może być prawdziwe albo fałszywe
$p(x)$ , $p(x,y)$ i.t.p - funkcja zdaniowa jednej lub wielu zmiennych. Dla pewnych wartości zmiennych może być prawdziwa, dla innych fałszywa.

**Uwaga:** W poniższych przykładach zmienne $x, y \in \mathbb{R}$.

Przykład:
Funkcja zdaniowa $p(x) : x > 1$ jest prawdziwa dla $x = 2$ , a fałszywa dla $x = 0$
Funkcja zdaniowa $p(x) : \sqrt{x^2} = x$ jest prawdziwa dla $x \geqslant 0$ , a fałszywa dla $x < 0$

### Negacja

Stosowane oznaczenia:
$\sim p$
$\neg p$
Czytamy: nie $p$ ; nieprawda, że $p$
Wartość logiczna: Negacja $\sim p$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie $p$ jest fałszywe.

### Koniunkcja

Oznaczenia: $p \wedge q$
Czytamy: $p$ i $q$
Wartość logiczna: Koniunkcja $p \wedge q$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie $p$ i $q$ są prawdziwe.

### Alternatywa

Oznaczenia: $p \vee q$
Czytamy : $p$ lub $q$
Wartość logiczna: Alternatywa $p \vee q$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $p$ jest prawdziwe lub $q$ jest prawdziwe.

### Implikacja

Oznaczenia: $p \Rightarrow q$
Czytamy: Jeśli $p$ to $q$ ; z $p$ wynika $q$ ; $q$ wtedy, gdy $p$ ; $p$ jest warunkiem dostatecznym dla $q$ ; $q$ jest warunkiem koniecznym dla $p$

Wartość logiczna: Implikacja $p \vee q$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $p$ jest fałszywe lub $p$ i $q$ są prawdziwe.

**Równoważność**

Oznaczenia: $p \Leftrightarrow q$
Czytamy: $q$ jest równoważne $q$ ; $q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p$ ; $p$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym dla $q$
Wartość logiczna: Równoważność $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $p$ i $q$ są prawdziwe lub $p$ i $q$ są fałszywe.

**Kwantyfikatory**

Kwantyfikator ogólny:
Dla każdego $x$, dla wszystkich $x$
Oznaczenia:
$\forall x$
$\bigwedge\limits_{x}$
Kwantyfikator szczegółowy:
Istnieje $x$
$\exists x$
$\bigvee\limits_{x}$
**Uwaga:** Niech $p(x)$ będzie funkcją zdaniową. Wtedy $\Big(\exists x\Big)p(x)$ jest zdaniem, a nie funkcją zdaniową zmiennej $x$. Mówimy, że $x$ jest zmienną związaną. Np. zdanie $\Big(\exists x\Big)(x > 1)$ jest prawdziwe, a zdanie $(x > 1)$ prawdziwe dla $x = 2$, fałszywe dla $x = 0$ .

**Pewne prawa logiczne:**

$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$
$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$
$p \Rightarrow q \equiv (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ - dowód nie wprost
$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q)$
$p \Rightarrow q \equiv (p \wedge (\sim q) \Rightarrow \text{Fałsz})$ - dowód przez doprowadzenie do sprzeczności
$\sim \forall x\Big(p(x)\Big) \equiv \exists x\Big(\sim p(x)\Big)$
$\sim \exists x\Big(p(x)\Big) \equiv \forall x\Big(\sim p(x)\Big)$

## Kresy

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym zbiorem liczb rzeczywistych. Wtedy

**Definicja:** $M$ jest ograniczeniem górnym (dolnym) zbiotu $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
$\Big(\forall x \in A\Big) \quad x \leqslant M \quad (x \geqslant M)$

Liczbę $M$ nazywamy ograniczeniem górnym ciagu.

**Definicja:** Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony od góry (od dołu) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ograniczenie górne (dolne). Zbiór jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony zarówno od góry jak i od dołu.

**Definicja:** Elementem największym (maksimum) zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy element $y \in A$ będący ograniczeniem górnym zbioru $A$. Oznaczamy:
$y = \max A$

**Definicja:** Elementem najmniejszym (minimum) zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy element $y \in A$ będący ograniczeniem dolnym zbioru $A$. Oznaczamy:
$y = \min A$

**Przykład:**
$\min < 0, 1 > \quad = 0$
$\min (0, 1 >$ nie istnieje
$\min (-\infty, 1 >$ nie istnieje

**Uwaga:** W przykładzie 2 zbiór jest ograniczony od dołu, ale nie ma elementu najmniejszaego.

**Definicja:** Kresem górnym (supremum) zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy najmniejszy element zbioru ograniczeń górnych zbioru $A$. Oznaczamy:
$y = \sup A$

**Definicja:** Kresem dolnym (infimum) zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy największy element zbioru ograniczeń dolnych zbioru $A$. Oznaczamy:
$y = \inf A$

**Przykład:**
$\inf < 0, 1 >= \max (-\infty, 0 >= 0$
$\inf (0, 1 >= \max (-\infty, 0 >= 0$
$\inf (-\infty, 1 >= \max \emptyset$ nie istnieje

**Uwaga:**
Jeżeli nie istnieje kres górny zbioru $A \subset \mathbb{R}$ to stosuje się też oznaczenie:
$\sup A = \infty$
Jeżeli nie istnieje kres dolny zbioru $A \subset \mathbb{R}$ to stosuje się też oznaczenie:
$\inf A = -\infty$

**Aksjomat ciągłości:** Każdy niepusty, ograniczony od góry podzbiór zbiou liczb rzeczywistych ma kres górny.

**Uwaga 1:** Wynika stąd, że każdy niepusty, ograniczony od dołu podzbiór zbiou liczb rzeczywistych ma kres dolny.
**Uwaga 2:** Jest to bardzo ważna własność zbioru liczb rzeczywistych. Własności tej nie ma zbiór liczb wymiernych.