SIMR 2011/12, Analiza Zespolona, wykład 1, 2012-11-14

Liczby zespolone

Liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$ są to liczby w postaci:
$z = x + iy\ ,\ x, y \in \mathbb{R}$
i jest jednostką urojoną, $i^2 = -1$
$x = \mathrm{Re}z =$ część rzeczywista z
$y = \mathrm{Im}z =$ część urojona z
Liczby zespolone można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Uwaga: W liczbach zespolonych nie ma relacji nierówności.
Sprzężenie zespolone: $\overline{z} = x - iy$
Moduł liczby zespolonej $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
Zachodzi związek:
$z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Przykład Obliczyć $\mathrm{Im}\dfrac{1-i}{2+i}$
$\mathrm{Im}\dfrac{1-i}{2+i} = \mathrm{Im}\dfrac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \mathrm{Im}\dfrac{2-i-2i+i^2}{2^2+1^2} = \mathrm{Im}\dfrac{2-3i-1}{5} = \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{5} - i\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{3}{5}$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Liczbę zespoloną $z = x + iy\ ,\ x, y \in \mathbb{R}$ można zapisać w postaci trygonometrycznej:
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
gdzie $r, \varphi \in \mathbb{R}\ ,\ r \geqslant 0$
φ nazywamy argumentem liczby zespolonej: $\varphi = \arg z$

Uwaga: W postać algebraicznej $z = x + iy\ ,\ x, y \in \mathbb{R}$ liczby x i y są jednoznaczne dla danej liczby z. W postaci trygonometrycznej tak nie jest.
1. r jest wyznaczone jednoznacznie: $r = |z|$
2. Jeśli $r = 0$ to argument φ może być dowolną liczbą rzeczywistą $\varphi \in \mathbb{R}$. Jeśli natomiast $r > 0$ to do argumentu φ można dodać całkowitą wielokrotność 2π i otrzymamy tę samą liczbę zespoloną:
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
W postaci trygonometrycznej łatwo wykonuje się mnożenie, dzielenie i potęgowanie:
Jeśli $z = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\ ,\ z_2 = r(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_@)$ to
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))\ ,\ r_2 \neq 0$
$z_1^n = r_1^n \cdot r_2(\cos(n\varphi_1) + i\sin(n\varphi_1))\ ,\ n \in \mathbb{N}$

Pierwiastek z liczby zespolonej

Niech $w \in \mathbb{C}$ będzie liczbą zespoloną. Wtedy pierwiastkiem n-tego stopnia z w ($\sqrt[n]{w}$) nazywamy każde rozwiązanie z równania:
$z^n = w$
Dla $w = 0$ mamy jeden pierwiastek $z = 0$.
Dla $w \neq 0$ mamy n różnych rozwiązań. Jeżeli zapiszemy w w postaci trygonometrycznej $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ to:
$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots n-1$

Własności wielomianów zespolonych

Wielomianem stopnia n nazywamy funkcję $W_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$
gdzie $z, a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$ oraz $a_n \neq 0$
Własności:
1. Każdy wielomian stopnia n można rozłożyć na iloczyn n wielomianów stopnia pierwszego:
$W_n(z) = a_n(z - z_1)(z_z 2) \cdots (z - z_n)$
Czyli każdy wielomian stopnia n ma n pierwiastków (licząc z krotnościami).
2. Jeżeli wszystkie współczynniki wielomianu $W_n(z)$ są rzeczywiste i z_0 jest pierwiastkiem wielomianu to $\overline{z_0}$ też jest pierwiastkiem $W_n(z)$.
$W_n(z_0) = 0 \implies W_n(\overline{z_0}) = 0$
Przykład:
Rozkładamy poniższy wielomian na czynniki stopnia pierwszego:
$2z^2 + 8 = 2(z - 2i)(z + 2i)$
Widać, że pierwiastkami tego wielomianu są $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$. Ponieważ współczynniki wielomianu są rzeczywiste, więc jeśli $z_1 = 2i$ jest pierwiastkiem, to $\overline{z_1} = -2i$ też musi być pierwiastkiem.

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Na płaszczyźnie zespolonej liczbę $z = x + iy$ można interpretować jako punkt P o współrzędnych $P = (x, y)$ lub jako wektor $\overrightarrow{OP}$, gdzie $O(0, 0)$ - początek układu współrzędnych.
Wtedy:
$x = \text{Re}z$ jest rzutem wektora z na oś rzeczywistą
$x = \text{Im}z$ jest rzutem wektora z na oś urojoną
Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych jest dodawaniem i odejmowaniem wektorów
$|z|$ jest długością wektora
$\arg z$ jest kątem skierowanym od osi rzeczywistej do wektora z

Funkcje zespolone

Będziemy zajmować się funkcjami argumentu zespolonego i o wartościach zespolonych:
$f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$
Jeżeli zapiszemy argument $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, gdzie $u, v : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ to jednej funkcji zespolonej jednego argumentu zespolonego odpowiadają dwie funkcje rzeczywiste dwóch zmiennych rzeczywistych.

Uwaga: W sposób naturalny utożsamiamy zbiór $\mathbb{C}$ z $\mathbb{R}^2$.

Przykład: Funkcja $f(z) = z^2$.
$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$
$u(x, y) = \text{Re } f = x^2 - y^2$
$v(x, y) = \text{Im } f = 2xy$
Czyli:

$$f(z) = z^2 \leftrightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

Interpretacja geometryczna funkcji zespolonej

Standardowa interpretacja wykresu funkcji wymaga 4 wymiarów rzeczywistych. Można traktować oddzielnie funkcje $u(x,y)$, $v(x,y)$ jako dwie powierzchnie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Najwygodniej jednak narysować płaszczyznę $z = x + iy$ argumentów, płaszczyznę $w = u + iv$ wartości, a następnie narysować na płaszczyźnie z krzywe i odpowiadające im obrazy na płaszczyźnie w. Najczęściej tymi krzywymi są proste pionowe i poziome.

Przykład Znaleźć obraz zbioru $f(D)$, gdzie $D : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ przy przekształceniu $f(z) = z^2$.
Znajdujemy obrazy krzywych ograniczających kwadrat D:
1. Parametryzujemy pierwszy bok kwadratu: $x = t$, $y = 0$, $t \in < 0, 1 >$
wtedy $z = x + iy = t$
$w = f(z) = z^2 = t^2$
$u = \text{Re } w = t^2$
$v = \text{Im } w = 0$
Obrazem , jest więc krzywa: $u = t^2$, $v = 0$, $t \in < 0, 1 >$. Jest to odcinek leżący na prostej $v = 0$.
2. Parametryzujemy drugi bok kwadratu: $x = 1$, $y = t$, $t \in < 0, 1 >$
wtedy $z = x + iy = 1 + it$
$w = f(z) = z^2 = (1 + it)^2 = 1 + 2it - t^2$
$u = \text{Re } w = 1 - t^2$
$v = \text{Im } w = 2t$
Obrazem , jest więc krzywa: $u = 1 - t^2$, $v = 2t$, $t \in < 0, 1 >$. Stąd $t = \frac{v}{2}$ czyli $u = 1 - \frac{v^2}{4}$.
Obrazem jest więc fragment paraboli.
3. Parametryzujemy trzeci bok kwadratu: $x = t$, $y = 1$, $t \in < 0, 1 >$
wtedy $z = x + iy = t + i$
$w = f(z) = z^2 = (t + i)^2 = t^2 + 2it - 1$
$u = \text{Re } w = t^2 - 1$
$v = \text{Im } w = 2t$
Obrazem , jest więc krzywa: $u = t^2 - 1$, $v = 2t$, $t \in < 0, 1 >$. Stąd $t = \frac{v}{2}$ czyli $u = \frac{v^2}{4} - 1$.
Obrazem jest więc fragment paraboli.
4. Parametryzujemy czwarty bok kwadratu: $x = 0$, $y = t$, $t \in < 0, 1 >$
wtedy $z = x + iy = it$
$w = f(z) = z^2 = -t^2$
$u = \text{Re } w = -t^2$
$v = \text{Im } w = 0$
Obrazem , jest więc krzywa: $u = -t^2$, $v = 0$, $t \in < 0, 1 >$. Jest to odcinek leżący na prostej $v = 0$.
Te cztery krzywe ograniczają obszar będący szukanym obrazem. Aby określić ten obszar można np. znaleźć obraz jednego punktu z wnętrza D. Weźmy punkt $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
$f(P) = (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}i$.
Czyli $P' = f(P) = (0, \frac{1}{2})$

Przykład Znaleźć obraz zbioru $f(D)$, gdzie $D : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x$ przy przekształceniu:
a) $f(z) = z + 1 + 2i$
b) $f(z) = 2z$
c) $f(z) = iz$
d) $f(z) = 2iz + 1 + 2i$
Po wykonaniu rysunków widać, że:
a) $f(z)$ jest przesunięciem o wektor $[1, 2]$
b) $f(z)$ jest jednokładnością o skali 2

c) $f(z)$ jest obrotem o kąt $\dfrac{\pi}{2}$ w lewo
d) $f(z)$ jest złożeniem tych przekształceń (przesunięcie jest ostatnie)

Wniosek Przekształcenie $f(z) = az + b$ (funkcja liniowa) jest złożeniem:
- jednokładności o skali $|a|$
- obrotu o kąt $\arg a$ w lewo
- i przesunięcia o wektor b.

Granice ciągów zespolonych

Ciąg liczb zespolonych $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$ ma granicę w wtedy i tylko wtedy, gdy:
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w \iff \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - w| = 0$

Uwaga 1: Symbol lim po lewej stronie oznacza granicę ciągu liczb zespolonych, a lim po prawej stronie granicę ciągu liczb rzeczywistych.

Uwaga 2: Dla granicy ciągu $w = 0$ mamy:
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$

Granice ciągów liczb zespolonych mają własności analogiczne do własności ciągów liczb rzeczywistych: granica sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu. Nie można jednak stosować twierdzenia o trzech ciągach. Czasami wygodniej jest zastąpić jeden ciąg zespolony dwoma ciągami rzeczywistymi:
$z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$
Wtedy:
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
i granica z lewej strony istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice z prawej strony.

Symbol niewłaściwy ∞

W liczbach zespolonych symbol niewłaściwy ∞ oznacza:
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$

Uwaga Symbol niewłaściwy ∞ nie określa kierunku wektora z_n a jedynie jego długość dążącą do ∞.

Symbole nieoznaczone:
$\infty - \infty$
$0 \cdot \infty$
$\dfrac{0}{0}$
$\dfrac{\infty}{\infty}$
Symbole oznaczone, np.:
$\dfrac{1}{0} = \infty$
$\dfrac{1}{\infty} = 0$

Przykład: Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{in^2 + 6n - 5i}{n^2 + 4in + 2n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{in^2 + 6n - 5i}{n^2 + 4in + 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(i + 6\frac{1}{n} - 5i\frac{1}{n^2})}{n^2(1 + 4i\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{i + 6\frac{1}{n} - 5i\frac{1}{n^2}}{1 + 4i\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n}} = \frac{i + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = i$$

Przykład: Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{in + 5}{2n + 1}\right)^n$
Obliczamy granicę ciągu rzeczywistego $|z_n|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{in+5}{2n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{in+5}{2n+1}\right|^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+25}}{\sqrt{4n^2+1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{25}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}}}^{\,n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$$

stąd:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{in+5}{2n+1}\right)^n = 0$$

Szeregi zespolone

Definicja szeregu liczb zespolonych jest taka sama jak dla liczb rzeczywistych:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} z_n$$

Badając zbieżność szeregów zespolonych korzystamy głównie z dwóch kryteriów:

Kryterium 1: Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|$ jest zbieżny to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ też jest zbieżny.

Uwaga: Pierwszy szereg jest szeregiem liczb rzeczywistych o wyrazach nieujemnych.

Kryterium 2: Jeśli $\lim_{n\to\infty}|z_n| \neq 0$ to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Szereg potęgowy liczb zespolonych

Własności szeregów potęgowych w dziedzinie zespolonej są bardzo podobne do własności szeregów potęgowych w dziedzinie rzeczywistej

Szereg potęgowy jest to szereg:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad , \quad a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$$

Dla każdego szeregu potęgowego istnieje promień zbieżności R ($R=0$, $R>0$ lub $R=\infty$). Szereg potęgowy jest zbieżny dla $|z-z_0|<R$ i rozbieżny dla $|z-z_0|>R$. Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest więc wnętrzem koła o środku w punkcie Z_0 i promieniu R (i być może niektórymi punktami z brzegu koła).

Jeżeli istnieją granice:

$q = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ lub

$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

to $R = \frac{1}{q}$

Szereg Taylora

Definicja:

Szeregiem Taylora funkcji zespolonej $f : D \to \mathbb{C}$ w punkcie $z_0 \in D$ nazywamy szereg potęgowy zbieżny do funkcji f w kole $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ dla pewnego $R > 0$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

Definicja: Funkcję, która rozwija się w szereg Taylora w $z_0 \in D$ nazywamy funkcją analityczną w z_0.

Twierdzenie: Jeżeli funkcją rozwija się w kole $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ dla pewnego $R > 0$.

Uwaga: Oczywiście koło musi zawierać się w dziedzinie funkcji: $K \subset D$

Rozszerzenie dziedziny funkcji na liczby zespolone

Korzystając z rozwinięć w szereg Taylora funkcji rzeczywistych możemy rozszerzyć ich dziedzinę na liczby zespolone.

Definicja:

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$

$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$

Powyższe szeregi potęgowe mają promień zbieżności równy $R = \infty$, a więc są zbieżne na całym zbiorze liczb zespolonych.

Korzystając z tych funkcji definiujemy:

$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad , \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad ,$

$\mathrm{tgh}\, z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \mathrm{ctgh}\, z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$

Funkcje te mają w dziedzinie zespolonej podobne własności: np.

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

Związki między funkcjami

$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} + \ldots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) =$
$\cos z + i \sin z \quad , \quad z \in \mathbb{C}$

Stąd łatwo wyprowadzić poniższe wzory:

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$

$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$

$\cosh iz = \cos z$

$\sinh iz = i \sin z$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Przykład: Obliczyć $\sin(\pi + i)$

$\sin(\pi + i) = \frac{e^{i(\pi+i)} - e^{-i(\pi+i)}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{-1+i\pi} - e^{1-i\pi}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-1}e^{i\pi} - e^{1}e^{-i\pi}\right) =$
$\frac{1}{2i}\left(e^{-1}(\cos\pi + i\sin\pi) - e(\cos\pi - i\sin\pi)\right) = \frac{1}{2i}\left(-e^{-1} + e\right) = \frac{i(1-e^2)}{2e}$

Logarytm

Logarytm w dziedzinie zespolonej definiujemy jako funkcję odwrotną do e^z

Definicja:

$w = \ln z \iff z = e^w \quad , z, w \in \mathbb{C}$

Niech $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$ wtedy:

$z = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = e^u\left(\cos v + i \sin v\right)$

Stąd:

$e^u = |z|$

$v = \arg z + 2k\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}$

Pierwsze równanie ma rozwiązanie dla $z \neq 0$. Wtedy $u = \ln|z|$ Stąd:

$\ln z = \ln|z| + i(\arg\ z + 2k\pi)\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Uwaga: Ponieważ mamy nieskończenie wiele rozwiązań, logarytm nie jest funkcją. Wygodnie jest jednak traktować logarytm jak funkcję wielowartościową.

Przykład: Obliczyć $\ln(ei)$
$ei = e \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$
stąd:
$\ln(ei) = \ln e + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 + \frac{(4k+1)\pi i}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Potęgowanie:
Jeśli $z_1 \neq 0$ to definiujemy:
$z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}$
Uwaga: Ponieważ logarytm jest funkcję wielowartościową więc $z_1^{z_2}$ moż mieć wiele wartości.

Przykład: Obliczyć i^i
$i^i = e^{i\ln i}$
$\ln i = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{(4k+1)\pi i}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
$i^i = e^{-\frac{(4k+1)\pi}{2}}$

Uwaga: Poniższe funkcje posiadają typowe własności funkcji zespolonych:
$f(z) = az + b\ ,\ f(z) = \overline{z}\ ,\ f(z) = z^2\ ,\ f(z) = \dfrac{1}{z}\ , f(z) = e^z\ ,\ f(z) = \ln z$