RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

WYKŁAD 6

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

PRZYKŁAD (*przypomnienie*)

Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y''-4y'+4y=e^{2x} \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

Równanie charakterystyczne

$$r^2-4r+4=0$$

ma rzeczywisty pierwiastek podwójny $r=2$, stąd CORJ jest funkcja

$$\underline{\underline{y_1=C_1xe^{2x}+C_2e^{2x}=(C_1x+C_2)e^{2x}}}.$$

CSRN przewidujemy w postaci

$$y_2=Ax^2e^{2x},$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

PRZYKŁAD (c. d.)

Obliczamy pochodne

$$y_2' = 2A(x^2 + x)e^{2x},$$

$$y_2'' = (4Ax^2 + 8Ax + 2A)e^{2x}.$$

Wstawiamy to do równania $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ i uzyskujemy

$$(4Ax^2 + 8Ax + 2)Ae^{2x} - 8A(x^2 + x)e^{2x} + 4Ax^2e^{2x} = e^{2x}.$$

Po przekształceniach dostajemy $2Ae^{2x} = e^{2x}$, skąd $A = \frac{1}{2}$

CSRN jest równa $y_2 = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$, więc CORN jest postaci

$$\underline{\underline{y = C_1xe^{2x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} = (\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2)e^{2x}.}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

PRZYKŁAD (c. d.)

Z warunków początkowych $y(0)=1, y'(0)=0$, dostajemy $C_2=1$ i ponieważ

$y'=C_1e^{2x}+2(C_1x+C_2)e^{2x}+xe^{2x}+x^2e^{2x}$ to

$0=C_1+2C_2$, czyli $C_1=-2$.

Rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego jest funkcja

$$\underline{\underline{y=-2xe^{2x}+e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}=\left(\frac{1}{2}x^2-2x+1\right)e^{2x}.}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Definicja

Równaniem różniczkowym liniowym n-tego rzędu nazywamy równanie postaci

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),}$$

gdzie $y(x)$ jest funkcją niewidomą zmiennej x, a współczynniki $a_{n-1}(x), a_{n-2}(x), \ldots, a_0(x), f(x)$ są ciągłe na przedziale określoności równania.

Jeśli $f(x) \equiv 0$, to równanie nazywamy **jednorodnym**,

Jeśli $f(x) \neq 0$, to równanie nazywamy **niejednorodnym.**

Twierdzenie

Jeżeli $a_{n-1}(x), a_{n-2}(x), \ldots, a_0(x), f(x)$ są ciągłe na przedziale (a, b) oraz $x_0 \in (a, b)$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in R$, to zagadnienie Cauchy'ego

$$\boxed{\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(\dot{x})y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie na przedziale (a, b).

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Uwaga

Równania liniowe wyższych rzędów mają podobne własności do równań pierwszego i drugiego rzędu, stąd konstrukcja rozwiązań jest uogólnieniem wcześniej omawianych metod.

Podobnie jak w przypadku równań pierwszego i drugiego rzędu, rozwiązywanie równania liniowego niejednorodnego rzędu n-tego polega na wyznaczeniu CORJ, a następnie zastosowaniu metody uzmiennienia stałych, bądź przewidywań.

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Równania różniczkowe liniowe jednorodne rzędu n-tego

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,}$$

Równanie liniowe jednorodne ma zawsze **rozwiązanie zerowe** ($y(x) \equiv 0$).

Twierdzenie

Jeżeli funkcje

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

są całkami szczególnymi równania liniowego jednorodnego, to ich kombinacja liniowa

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

jest też rozwiązaniem tego równania.

Jeżeli dodatkowo funkcje te tworzą **fundamentalny układ rozwiązań** (tzn. są liniowo niezależne), to ich kombinacja liniowa jest CORJ.

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Twierdzenie

Funkcje $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ klasy $C^1(a, b)$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy **wyznacznik Wrońskiego (wrońskian)**

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) \; y_2(x) \ldots y_n(x) \\ y_1^{'}(x) \; y_2^{'}(x) \ldots y_n^{'}(x) \\ y_1^{''}(x) \; y_2^{''}(x) \ldots y_n^{''}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} y_2^{(n-1)} \ldots y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

dla każdego x z przedziału (a, b).

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Równania różniczkowe liniowe jednorodne n-tego rzędu o stałych współczynnikach

Definicja

Równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym rzędu n-tego o stałych współczynnikach nazywamy równanie postaci

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots a_{n-1} \in R$.

Poszukujemy rozwiązań szczególnych tego równania w postaci funkcji

$$y = \mathrm{e}^{rx}$$

Po wstawieniu do równania otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$\boxed{r^n + a_{n-1}r^{(n-1)} + \ldots + a_1 r + a_{0.} = 0}$$

Twierdzenie

Jeżeli r jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, to funkcja $y = \mathrm{e}^{rx}$ jest rozwiązaniem szczególnym równania.

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Wyznaczanie układu fundamentalnego rozwiązań

- Jeżeli równanie charakterystyczne ma *n* <u>różnych</u> pierwiastków rzeczywistych $r_1, r_2, \dots, r_n.$ to układ fundamentalny rozwiązań tworzą funkcje

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}, \quad \dots \quad , y_n(x) = e^{r_n x},$$

(CORJ *jest kombinacją liniową tych funkcji*)

- Jeżeli równanie charakterystyczne ma <u>różne</u> pierwiastki zespolone, to każdej parze pierwiastków sprzężonych $r_k = \alpha + \beta i$ oraz $r_{k+1} = \alpha - \beta i$ odpowiadają funkcje

$$y_k(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \ \text{ i } \ y_{k+1}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

- Jeżeli r jest <u>*m*- krotnym</u> pierwiastkiem równania charakterystycznego, to odpowiada mu m-rozwiązań szczególnych postaci

$$y_k(x), \quad x \cdot y_k(x), \dots, x^{m-1} \cdot y_k(x),$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$r^3 - 5r^2 + 6r = 0$$

Pierwiastki równania

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 3$$

Układ fundamentalny rozwiązań

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = e^{3x}$$

CORJ:

$$\underline{\underline{y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y'''+3y''+9y'-13y=0$$

Równanie charakterystyczne

$$r^3+3r^2+9r-13=0$$

Pierwiastki równania

$$r_1=1,\quad r_2=-2+3i,\quad r_3=-2-3i$$

Układ fundamentalny rozwiązań

$$y_1=e^x,\quad y_2=e^{-2x}\cos 3x,\quad y_3=e^{-2x}\sin 3x$$

CORJ:

$$\underline{\underline{y=C_1e^x+e^{-2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$$

Pierwiastki równania

$$r_1 = 1, \quad r_2 = r_3 = 2$$

Układ fundamentalny rozwiązań

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = xe^{2x}$$

CORJ:

$$\underline{\underline{y = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 + C_3 x)}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

Pierwiastki równania

$$r_1 = r_2 = i, \quad r_3 = r_4 = -i$$

Układ fundamentalny rozwiązań

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x, \quad y_3 = x\cos x, \quad y_4 = x\sin x$$

CORJ:

$$\underline{\underline{y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Metoda uzmiennienia stałych dla równania liniowego niejednorodnego rzędu n-tego

Jeżeli CORJ ma postać

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

to CORN poszukujemy w postaci

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x)$$

Wyznaczenie funkcji $C_1(x),\ C_2(x), \ldots, C_n(x)$ wymaga rozwiązania układu równań liniowych

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + \ldots + C_n'(x) y_n(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + \ldots + C_n'(x) y_n'(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2''(x) + \ldots + C_n'(x) y_n''(x) = 0, \\ \ldots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Jest to układ Cramera, więc jego rozwiązanie ma postać

$$C_1'(x) = \frac{W_1}{W}, \; C_2'(x) = \frac{W_2}{W}, \; \ldots, \; C_n'(x) = \frac{W_n}{W},$$

gdzie W oznacza wyznacznik Wrońskiego (różny od zera!), zaś $W_1, W_2, \ldots, W_n$ są wyznacznikami, które otrzymujemy zastępując kolejne kolumny wyznacznika Wrońskiego kolumną wyrazów wolnych $[0, 0, \ldots, f(x)]^T$.

Po scałkowaniu otrzymanych funkcji dostajemy „uzmiennione współczynniki”

$$C_1(x), \; C_2(x), \ldots, C_n(x)$$

oraz szukaną CORN

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x).$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład

Rozwiązać równanie metodą uzmiennienia stałych

$$y''' + y' = 2x$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$r^3 + r = 0$$

Jego pierwiastkami są liczby $r_1 = 0$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$.

CORJ: $\underline{\underline{y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x}}$

CORN szukamy w postaci

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$$

Tworzymy układ równań

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0 \\ \quad - C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0 \\ \quad - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = 2x \end{cases}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład (c. d)

Rozwiązujemy układ metodą wyznacznikową.

$$W(x)=\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}=1 \quad (\neq 0)$$ *(wyznacznik macierzy układu (wrońskian))*

Kolejne wyznaczniki

$$W_1(x)=\begin{vmatrix}0 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 2x & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}=2x$$

$$W_2(x)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \sin x\\ 0 & 0 & \cos x\\ 0 & 2x & -\sin x\end{vmatrix}=-2x\cos x$$

$$W_3(x)=\begin{vmatrix}1 & \cos x & 0\\ 0 & -\sin x & 0\\ 0 & -\cos x & 2x\end{vmatrix}=-2x\sin x$$

Przykład (c. d)

Otrzymujemy

$$C_1'(x)=2x,\quad C_2'(x)=-2x\cos x,\quad C_3'(x)=-2x\sin x,$$

Całkując otrzymane funkcje dostajemy

$$C_1(x)=x^2+C_1,$$

$$C_2(x)=-2x\sin x-2\cos x+C_2,$$

$$C_3(x)=2x\cos x-2\sin x+C_3,$$

CORN

$$y=x^2+C_1-(2x\sin x+2\cos x+C_2)\cos x+$$
$$+(2x\cos x-2\sin x+C_3)\sin x$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Metoda przewidywań dla równania liniowego niejednorodnego rzędu n-tego o stałych współczynnikach

Metodę przewidywań możemy stosować w przypadku równań o stałych współczynnikach, gdy wyraz wolny ma jedną z postaci przedstawionych w kolumnie 2 tabeli zamieszczonej w poprzednim wykładzie.

Wyznaczamy CSRN i wykorzystujemy zależność

CORN = CORJ + CSRN

Podobnie jak w przypadku równań niższego rzędu możemy też wykorzystać poniższe twierdzenie

Twierdzenie

Suma całki szczególnej równania

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_1(x),$$

i całki szczególnej równania

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_2(x),$$

jest całką szczególną równania

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_1(x)+f_2(x),$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład

Znaleźć całkę ogólną równania

$$y^{(4)}+3y'''+5y''+5y'+2y=3x$$

Wyznaczamy CORJ

$$y^{(4)}+3y'''+5y''+5y'+2y=0$$

Równanie charakterystyczne

$$r^4+3r^3+5r^2+5r+2=0$$

$$(r+1)^2(r^2+r+2)=0$$

$$\Delta=1-8=-7=7i^2$$

$$r=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład (c. d.)

Otrzymujemy jeden pierwiastek rzeczywisty o krotności 2 oraz dwa pierwiastki zespolone sprzężone

$$r_1 = -1, (k=2), \qquad r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \qquad r_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}, .$$

Układ fundamentalny rozwiązań

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x}, \quad y_3 = e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x, \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

CORJ

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x}(C_3 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_4 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x)}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład (c. d.)

CSRN wyznaczamy metodą przewidywań.

Przewidywana postać CSRN

$$y_1 = Ax + B$$

$$y_1' = A$$

$$y_1'' = y_1''' = y_1^{(4)} = 0$$

Po wstawieniu do równania otrzymujemy $A = \frac{3}{2},\ B = -\frac{15}{4}$

CSRN

$$\underline{\underline{y_1 = \frac{3}{2}x - \frac{15}{4}}}$$

CORN

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x}(C_3 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_4 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x) + \frac{3}{2}x - \frac{15}{4}}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y''' + y' = x$$

Wyznaczamy CORJ

Równanie charakterystyczne

$$r^3 + r = 0$$

Pierwiastki równania

$$r_1 = 0, \quad r_2 = i, \quad r_3 = -i$$

Układ fundamentalny rozwiązań

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \cos x, \quad y_3 = \sin x,$$

CORJ:

$$\underline{\underline{y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład (c. d)

CSRN równania wyznaczamy metodą przewidywań.
Przewidywana postać rozwiązania szczególnego

$$y_1 = x(Ax + B)$$

Obliczamy pochodne

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

$$y''' = 0$$

Wstawiamy do równania

$$2Ax + B = x, \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = 0$$

CSRN: $y_1 = \frac{1}{2}x^2$

CORN: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{2}x^2$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y'''-3y''+3y'-y=2e^x$$

Wyznaczamy CORJ

Równanie charakterystyczne

$$(r-1)^3=0$$

Pierwiastki równania

$$r_1=r_2=r_3=1$$

Układ fundamentalny rozwiązań

$$y_1=e^x, \quad y_2=xe^x, \quad y_3=x^2e^x,$$

CORJ:

$$\underline{\underline{y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x,}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład (c. d)

CSRN równania wyznaczamy metodą przewidywań.

Przewidywana postać rozwiązania szczególnego

$$y = Ax^3 e^x$$

Obliczamy pochodne

$$y' = 3Ax^2 e^x + Ax^3 e^x$$

$$y'' = 6Axe^x + 6Ax^2 e^x + Ax^3 e^x$$

$$y''' = 6Ae^x + 18Axe^x + 9Ax^2 e^x + Ax^3 e^x$$

Po wstawieniu do równania otrzymujemy $A = \frac{1}{3}$

Stąd CSRN: $\underline{\underline{y = \frac{1}{3} x^3 e^x}}$

CORN: $$\underline{\underline{y = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 x^2 e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x.}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y''+y=\sin x+\cos 2x$$

Wyznaczamy CORJ

Równanie charakterystyczne

$$r^2+1=0$$

Pierwiastki równania

$$r_1=i, \quad r_2=-i$$

Układ fundamentalny rozwiązań

$$y_1=\cos x, \quad y_2=\sin x$$

CORJ:

$$\underline{\underline{y=C_1\cos x+C_2\sin x}}$$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład (c. d)

Metodą przewidywań wyznaczamy CSRN równania

$$y''+y=\sin x$$

Przewidywana postać rozwiązania szczególnego

$$y_1 = x(A\cos x + B\sin x)$$

Obliczamy pochodne

$$y_1' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$y_1'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$$

Wstawiamy do równania

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$$

Otrzymujemy $A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0$

CSRN: $\underline{\underline{y_1 = -\frac{1}{2}x\cos x}}$

Równania różniczkowe liniowe n-tego rzędu

Przykład (c. d)

Metodą przewidywań wyznaczamy CSRN równania

$$y'' + y = \cos 2x$$

Przewidywana postać rozwiązania szczególnego

$$y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$$

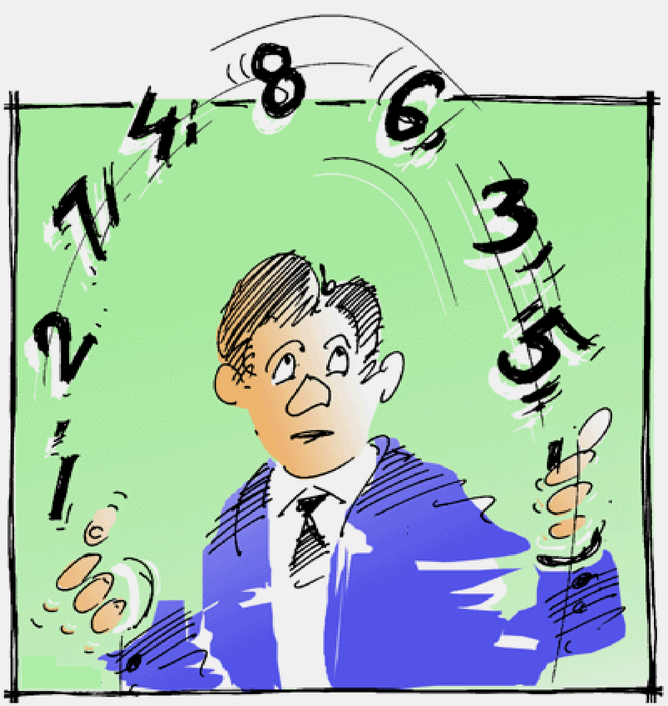
Po wyznaczeniu pochodnych i wstawieniu do równania otrzymujemy

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0$$

CSRN: $$y_2 = -\frac{1}{3}\cos 2x$$

CORN

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x$$



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ