Analiza Matematyczna I, MiNI PW (Informatyka oraz IAD)

Wykład 1 (3.10.2018)
Liczby rzeczywiste

Zaczniemy od przypomnienia kwantyfikatorów i kilku symboli logicznych, których będziemy używać w dalszej części wykładu:

$\forall$	dla każdego
$\exists$	istnieje
$\exists!$	istnieje dokładnie jeden
$\vee$	lub
$\wedge$	i
$\Longrightarrow$	to
$\Longleftrightarrow$	wtedy i tylko wtedy

Będziemy stosować następujące oznaczenia:
$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, przy czym przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

Sformułujemy teraz aksjomaty, czyli własności, które stanowią punkt wyjścia w Analizie Matematycznej. Wszystkie twierdzenia, które będziemy dowodzić, powinny dać się wyprowadzić z aksjomatów lub z twierdzeń przed nimi udowodnionych.

Aksjomatyka liczb rzeczywistych
Dany jest zbiór $\mathbb{R}$ z dwoma wyróżnionymi elementami 0 i 1, relacja $<$ oraz dwa działania : $+$ oraz $\cdot$, przypisujące parze liczb rzeczywistych liczbę rzeczywistą $x+y$ oraz $x \cdot y$, przy czym spełnione są podane niżej aksjomaty. Aksjomaty te wygodnie jest podzielić na trzy grupy: aksjomaty dotyczące algebraicznych własności $\mathbb{R}$ (A1-A9), aksjomaty porządku (P1-P4) i aksjomat ciągłości (AC):

(A1) Przemienność dodawania: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x+y=y+x$.
(A2) Łączność dodawania: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x+y)+z=x+(y+z)$.
(A3) Charakteryzacja zera: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+0=x$.
(A4) Istnienie elementów przeciwnych względem $+$:
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y=0$ (taki element y oznaczamy przez $-x$).
(A5) Przemienność mnożenia: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y=y \cdot x$.
(A6) Łączność mnożenia: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \cdot y) \cdot z=x \cdot (y \cdot z)$.
(A7) Charakteryzacja jedynki: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1=x$.
(A8) Istnienie elementów przeciwnych względem $\cdot$:
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y=1$ (taki element y oznaczamy przez x^{-1}).
(A9) Rozdzielność mnożenia względem dodawania: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y+z)=x \cdot y+x \cdot z$.

(P1) Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwosci: $x<y,\ x=y,\ y<x$.
(P2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x<y \ \wedge\ y<z) \Longrightarrow x<z$.
(P3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x<y \Longrightarrow x+z<y+z$.
(P4) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x<y \ \wedge\ 0<z) \Longrightarrow x \cdot z<y \cdot z$.

Zauważmy, że wymienione dotychczas aksjomaty spełnione są na przykład przez liczby wymierne, a zatem nie wystarczą do zdefiniowania zbioru liczb rzeczywistych. Jest jeszcze jeden aksjomat (*aksjomat ciagłości*), którego sformułowanie poprzedzimy kilkoma uwagami i definicjami.

Uwaga. Używać będziemy (znanych wszystkim dobrze) symboli $>$, $\leqslant$, $\geqslant$. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$a > b \iff b < a$$

$$a \leqslant b \iff (a = b \ \vee \ a < b)$$
$$a \geqslant b \iff (a = b \ \vee \ a > b)\,.$$

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się

- *ograniczony z góry* jeśli istnieje liczba $M \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność $x \leqslant M$.
- *ograniczony z dołu* jeśli istnieje liczba $m \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność $x \geqslant m$.
- *ograniczony* jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.

Definicja. Niech $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$. Mówimy, że zbiór B *ma liczbę najmniejszą* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists\ b \in B \quad \forall x \in b \quad x \geqslant b.$$

Jeśli zbiór B ma liczbę najmniejszą, to oznaczamy ją przez $\min B$. Analogicznie definiujemy liczbę największą w zbiorze B i jeśli istnieje, oznaczamy ja przez $\max B$.

Możemy teraz sformułować aksjomat ciągłości:

(AC) Jeśli A jest dowolnym niepustym i ograniczonym z góry podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych to zbiór ograniczeń górnych zbioru A ma liczbę najmniejszą.

Jako wniosek z aksjomatu ciągłości otrzymujemy, że jeśli A jest dowolnym niepustym i ograniczonym z dołu podzbiorem $\mathbb{R}$, to zbiór ograniczeń dolnych zbioru A ma liczbę największą.

Kresy zbiorów

Najmniejsze z ograniczeń górnych zbioru A, którego istnienie gwarantuje aksjomat ciągłości, nazywamy *kresem górnym* zbioru A.

Równoważna definicja kresu górnego jest następująca:

Definicja. Liczba M jest *kresem górnym* zbioru A (niepustego i ograniczonego z góry) wtedy i tylko wtedy gdy :
(1) $\forall x \in A \;\; x \leqslant M$
(2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in A \;\; x > M - \varepsilon$.

Analogicznie definiuje się kres dolny:

Definicja. Liczba m jest *kresem dolnym* zbioru A (niepustego i ograniczonego z dołu) wtedy i tylko wtedy gdy :
(1) $\forall x \in A \;\; x \geqslant m$
(2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in A \;\; x < m + \varepsilon$.

Kres górny zbioru A oznaczamy przez $\sup A$, zaś kres dolny przez $\inf A$ (od słów *supremum* i *infimum*). Jeśli A nie jest ograniczony z dołu, to przyjmujemy $\inf A = -\infty$, natomiast jeśli A nie jest ograniczony z góry, to przyjmujemy $\sup A = +\infty$.

Konsekwencją aksjomatu ciągłości są np. następujące "oczywiste" fakty:

Twierdzenie 1. Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry.

Wniosek (Zasada Archimedesa)**.** Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b istnieje liczba naturalna n taka, że $a \cdot n > b$.

Twierdzenie 2. Dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje dokładnie jedna liczna całkowita n taka, że $n \leqslant x < n + 1$.

Liczbę, o której mówi Tw.2 nazywa się *częścią całkowitą z liczby rzeczywistej* x i oznacza symbolem $[x]$. Wykorzystując powyższe fakty dowodzi się, że zbiory liczb wymiernych i niewymiernych są gęste w zbiorze liczb rzeczywistych.

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się *gęsty* w $\mathbb{R}$ jesli dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, istnieje element $a \in A$ taki, że $x < a < y$.

Twierdzenie 3. Zbiory $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ są gęste w $\mathbb{R}$.

Innymi słowy, w każdym przedziale na prostej rzeczywistej jest jakaś liczba wymierna i jakaś liczba niewymierna.

Sformułujemy teraz zasadę indukcji matematycznej, która stanowi ważną metodę dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych.

Twierdzenie 4 (Zasada indukcji matematycznej)**.** Jeśli $A \subset \mathbb{N}$ spełnia warunki:
(1) $1 \in A$
(2) $\forall n \in \mathbb{N} \;\; (n \in A \implies (n+1) \in A)$,
to $A = \mathbb{N}$.

Na zakończenie przykład **błędnego** rozumowania indukcyjnego (autorem tego ćwiczenia jest węgierski matematyk George Polya):

Udowodnimy, że wszystkie konie są jednej maści. Przeprowadzimy "dowód indukcyjny" względem liczby koni. Dowolny zbiór złożony z jednego konia jest zbiorem koni o jednej maści. Rozpatrzmy dowolny $(n+1)$-elementowy zbiór koni. Na początek wyłączmy z tego zbioru pierwszego konia. Pozostały, n-elementowy zbiór koni jest zbiorem koni o tej samej maści (na mocy założenia indukcyjnego). A teraz dołączmy z powrotem pierwszego konia, natomiast wyłączmy z naszego $(n+1)$-elementowego zbioru ostatniego konia. Wszystkie pozostałe konie, a jest ich teraz n, stanowią zbiór koni o jednej maści. A zatem, pierwszy koń jest tej samej maści co pozostałe konie, które z kolei są tej samej maści co ostatni koń. Zatem wszystkie są tej samej maści.
Gdzie jest błąd?