

14 grudnia 2014 r.

Przygotował: Bartłomiej Murawski

Topologia 2014/2015 - kolokwium 1

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Sposób I (z własności)

a) $Int(A \setminus B) \subseteq A \setminus B \subseteq A$.

Ale $Int(A \setminus B)$ jest zbiorem otwartym, a $IntA$ jest sumą wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A , zatem

$$Int(A \setminus B) \subseteq IntA.$$

Z drugiej strony

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$$

i oba zbiory można pomniejszyć, otrzymując

$$Int(A \setminus B) \cap IntB = \emptyset.$$

Łącząc obie zależności dostajemy tezę.

Kontrprzykładem na inkluzję przeciwną jest

$$A = \mathbb{R}, \quad B = \mathbb{Q}$$

z topologią euklidesową.

b)

$$A \cap B \subseteq A \subseteq ClA.$$

Ale ClA jest zbiorem domkniętym, a $Cl(A \cap B)$ jest przecięciem wszystkich zbiorów domkniętych zawierających $A \cap B$, zatem

$$Cl(A \cap B) \subseteq ClA.$$

Zamieniając miejscami A i B w powyższym rozumowaniu, dostajemy

$$Cl(A \cap B) \subseteq ClB,$$

co daje tezę. Kontrprzykładem na inkluzję w drugą stronę jest

$$A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{Q}$$

z topologią euklidesową.

Sposób II (z definicji)

$$\begin{aligned}
 \text{a) } x \in \text{Int}(A \setminus B) &\iff \exists_{U-\text{otwarty}} x \in U \subset A \setminus B \iff \\
 &\iff \exists_{U-\text{otwarty}} x \in U \wedge U \subset A \wedge U \cap B = \emptyset \implies \\
 &\implies (\exists_{U-\text{otwarty}} x \in U \wedge U \subset A) \wedge x \notin B \implies \\
 &\implies (\exists_{U-\text{otwarty}} x \in U \wedge U \subset A) \wedge x \notin \text{Int}B \iff \\
 &\iff x \in \text{Int}A \wedge x \notin \text{Int}B \iff x \in \text{Int}A \setminus \text{Int}B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } x \in \text{Cl}(A \cap B) &\iff \forall_{U-\text{otoczenie } x} \exists_{y \in A \cap B} y \in U \implies \\
 &\implies (\forall_{U-\text{otoczenie } x} \exists_{y \in A} y \in U) \wedge (\forall_{U-\text{otoczenie } x} \exists_{z \in B} z \in U) \iff \\
 &\iff x \in \text{Cl}A \cap \text{Cl}B
 \end{aligned}$$

Kontrprzykłady oczywiście się nie zmieniają.

Zadanie 2.

Zbiór A jest otwarty. Aby to wykazać, należy skorzystać z tego, że każda funkcja ciągła na zbiorze zwartym $[0, 1]$ przyjmuje swoje kresy, w szczególności minimum, które musi być ostro większe od 2014. Jeśli zatem weźmiemy kulę, której środkiem jest ustalona funkcja f o minimum równym m , a promieniem jest $r = m - 2014 > 0$, to będzie ona zawarta w zbiorze A . Ustalmy teraz funkcję $g \in B(f, r)$ i $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
 g(x) &= f(x) - (f(x) - g(x)) \geq f(x) - |f(x) - g(x)| \geq \\
 &\geq f(x) - \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| > m - (m - 2014) = 2014,
 \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Zbiór B nie jest otwarty. Aby to zobaczyć, wystarczy narysować "tubę" i zauważyć, że niezależnie od jej szerokości, zawsze zmieści się w niej kawałek funkcji stałej. Dla dowodu wystarczy znaleźć jedną funkcję, która nie jest punktem wewnętrznym tego zbioru. Weźmy zatem funkcję identycznościową $f(x) = x$ i kulę wokół niej o dowolnym promieniu $r > 0$. Zdefiniujmy funkcję g następująco:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, \frac{r}{2}) \\ x - \frac{r}{2} & \text{dla } x \in [\frac{r}{2}, 1] \end{cases}$$

Nie jest to funkcja ściśle rosnąca, ale należy do $B(f, r)$. Istotnie,

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| &= \max\{\sup_{t \in [0, \frac{r}{2}]} |f(t) - g(t)|, \sup_{t \in [\frac{r}{2}, 1]} |f(t) - g(t)|\} = \\
 &= \max\{\sup_{t \in [0, \frac{r}{2}]} |t|, \sup_{t \in [\frac{r}{2}, 1]} |t - (t - \frac{r}{2})|\} = \max\{\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\} = \frac{r}{2} < r,
 \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Uwaga: Zauważywszy, że w każdej kuli wokół każdej funkcji da się zmieścić kawałek funkcji stałej, można się pokusić o wykazanie, że żaden punkt zbioru B nie jest jego punktem wewnętrznym. W tym celu wystarczy wziąć dowolną ściśle rosnącą (a więc i odwracalną) funkcję f , kulę o promieniu r , a funkcję g zdefiniować następująco:

$$g(x) = \begin{cases} f(0) & \text{dla } x \in [0, c) \\ f(x) - \frac{r}{2} & \text{dla } x \in [c, 1] \end{cases},$$

gdzie $c = f^{-1}(f(0) + \frac{r}{2})$.

Zadanie 3.

Oba stwierdzenie są nieprawdziwe, a jako przykład można podać metrykę dyskretną na dowolnym co najmniej dwupunktowym zbiorze X . W metryce dyskretnej wszystkie zbiory są jednocześnie otwarte i domknięte. Weźmy punkt $x_0 \in X$. Zachodzą równości:

$$Bd B(x_0, 1) = \emptyset, \quad S(x_0, 1) = X \setminus \{x_0\},$$

$$Cl B(x_0, 1) = \{x_0\}, \quad \overline{B(x_0, 1)} = X.$$

Zatem powyższe zbiory są parami różne, co kończy zadanie.

Zadanie 4.

a) $Cl_X A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) : x = \frac{1}{n}, y \in [0, \frac{1}{n}]\}$

Oczywiście domknięcie A musi zawierać A , zajmijmy się zatem pozostałymi punktami z X . Wystarczy przy tym korzystać z definicji domknięcia, czyli dla końców odcinków pokazać, że każde ich otoczenie w X (będące z definicji przecięciem kuli otwartej w $\mathbb{R}^2$ z X) ma niepuste przecięcie z A , a dla pozostałych znaleźć jedno otoczenie z pustym przecięciem z A .

Górne końce:

$$\{(x, y) : x = \frac{1}{n}, y \in (\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n} + r)\} \subseteq B((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), r) \cap X$$

$$\{(x, y) : x = \frac{1}{n}, y \in (\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n} + r)\} \cap A \neq \emptyset$$

Dolne końce:

$$\{(x, y) : x = \frac{1}{n}, y \in (-r, r)\} \subseteq B((\frac{1}{n}, 0), r) \cap X$$

$$\{(x, y) : x = \frac{1}{n}, y \in (-r, r)\} \cap A \neq \emptyset$$

Weźmy teraz punkt spoza tego zbioru, $(\frac{1}{n}, y)$, i oznaczmy jego odległość od odcinka J_n przez $c = \min\{|y - \frac{1}{n}|, |0 - y|\} > 0$. Teraz wystarczy wziąć kulę wokół tego punktu o promieniu równym co najwyżej c , ale też takim, żeby kula nie sięgała do sąsiednich odcinków (bliżej jest ten po lewej stronie), a więc $r = \min\{c, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\}$, a będzie ona na pewno rozłączna ze zbiorem A .

b)

$$Int_X A = A$$

Wystarczy pokazać, że odcinki J_n są otwarte w X , wówczas suma zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, a zbiór otwarty jest równy swojemu wnętrzu. Weźmy więc punkt $(\frac{1}{n}, y) \in J_n$ i kulę wokół niego o promieniu $r = \min\{|\frac{1}{n} - y|, |y - 0|\} > 0$, a jej przecięcie ze zbiorem X będzie zawarte w zbiorze J_n , co kończy dowód.

c)

$$Cl_Y A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) : x = \frac{1}{n}, y \in [0, \frac{1}{n}]\} \cup \{(0, 0)\}$$

Dolne końce odcinków należą do domknięcia z tego samego powodu co w a). Górne końce tym razem nie należą, ponieważ nie należą do Y . Punkt $(0, 0)$ można sprawdzić z definicji. Widać, że dla dowolnego $r > 0$ znajdziemy takie n , że $(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}) \in B((0, 0), r) \cap A$. Wystarczy znaleźć choć jedno naturalne rozwiązanie nierówności:

$$\sqrt{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{2n})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2n} < r,$$

czyli na przykład $n = \lceil \frac{\sqrt{5}}{2r} \rceil + 1$.

Alternatywnie, wystarczy napisać, że ciąg $(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n})$ zbiega do punktu $(0, 0)$, który należy do Y , więc granica musi należeć do domknięcia.

Weźmy jeszcze dowolny inny punkt $(x, 0)$ t.j. $x \neq \frac{1}{n}$ i pokażmy, że do domknięcia nie należy. Wystarczy zauważyć, że musi on leżeć pomiędzy punktami $(\frac{1}{n}, 0)$ i $(\frac{1}{n+1}, 0)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wystarczy wziąć kulę o promieniu równym odległości od bliższego z nich, aby była ona rozłączna ze zbiorem A .

d)

$$\text{Int}_Y A = A$$

Uzasadnienie jest takie samo, jak w punkcie b).