ANALIZA ZESPOLONA

IV semestr 2013/14

oprac. Janina Kotus

Spis treści

.

1 Pojęcia podstawowe

Zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ można utożsamiać z płaszczyzną dwuwymiarową, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{C}$ i nazywać *płaszczyzną zespoloną otwartą.*

Aby zdefiniować jej domknięcie podamy najpierw definicję przekształcenia zwanego rzutem stereograficznym.

1.1 Rzut stereograficzny

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ definiujemy sferę $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ o środku w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \frac{1}{2})$ i promieniu $r = \frac{1}{2}$, styczną do płaszczyzny układu OXY w początku układu współrzędnych. Punkt $N = (0, 0, 1) \in S^2$ nazywać będziemy biegunem północnym sfery.

Konstrukcja rzutu stereograficznego

Każdemu punktowi $z = x + iy \in \mathbb{C}$ przyporządkujemy punkt $Z(\xi, \eta, \zeta) \in S^2 \setminus \{N\}$ będący punktem przecięcia odcinka łączącego punkt $z \in \mathbb{C}$ z punktem N.

Definicja 1.1
Odwzorowanie

$$P : \mathbb{C} \quad z \Longrightarrow Z \in S^2 \setminus \{N\},$$
$$z = x + iy \Longrightarrow Z = (\xi, \eta, \zeta),$$

gdzie

$$\xi = \frac{x}{1 + |z^2|}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z^2|}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z^2|},$$

nazywamy rzutem stereograficznym.

Uwaga 1.1
Rzut stereograficzny posiada przekształcenie odwrotne

$$P^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \Longrightarrow \mathbb{C}, \quad Z = (\xi, \eta, \zeta) \Longrightarrow z = x + iy,$$

zdefiniowane wzorem $x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$.

Zatem rzut stereograficzny jest bijekcją między *płaszczyzną otwartą* $\mathbb{C}$ i sferą bez bieguna północnego, któremu nie odpowiada żaden punkt na płaszczyźnie.

Uwaga 1.2
Umówimy się, że punktowi N odpowiada punkt w nieskończoności (ozn. ∞).

Definicja 1.2
Płaszczyzną domnkiętą, *która oznaczamy symbolem* $\bar{\mathbb{C}}$ *nazywamy sumę* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *i utożsamiamy ją z dwywymiarową sferą zwaną sferą Riemanna.*

1.2 Metryki w $\mathbb{C}$ i $\bar{\mathbb{C}}$

W płaszczyźnie otwartej $\mathbb{C}$ wprowadzamy metrykę *euklidesową*

$$d(z_1, z_2) := \sqrt{(\mathrm{Re} z_1 - \mathrm{Re} z_2)^2 + (\mathrm{Im} z_1 - \mathrm{Im} z_2)^2} = |z_1 - z_2|.$$

W płaszczyźnie domkniętej $\bar{\mathbb{C}}$ wprowadzamy metrykę *sferyczną*, w której odległość między punktami z_1, z_2 rozumiemy odległość euklidesową między ich obrazami przy rzucie stereograficznym na sferze tzn.

$$\rho(z_1, z_2) := d(P(z_1), P(z_2)) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} \quad z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C},$$

$$\rho(z, \infty) := \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, \quad z \neq \infty.$$

Uwaga 1.3
Aby otrzymać drugi wzór z pierwszego należy za z_1 podstawić z i podzielić licznik oraz mianownik przez z_2.

$$\rho(z, z_2) = \frac{|z - z_2|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} = \frac{|\frac{z}{z_2} - 1|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{\frac{1+|z_2|^2}{|z_2|^2}}} \to \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad \text{jesli } z_2 \to \infty.$$

Uwaga 1.4
$\forall z_1, z_2 \in \bar{\mathbb{C}}, \quad 0 \leq \rho(z_1, z_2) \leq 1.$

Uwaga 1.5
Płaszczyzna domknięta $\bar{\mathbb{C}}$ z metryką sferyczną jest przestrzenią metryczną zwartą.

Uwaga 1.6
Na zbiorach ograniczonych, zawartych w $\mathbb{C}$ obie metryki euklidesowa i sferyczna są równoważne tzn. jeśli $A \subset \{z : |z| \leq R\}$, $(R < \infty)$, to

$$\frac{|z_1 - z_2|}{1+R^2} \leq \rho(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in A.$$

Definicja 1.3
Zbiór $U(z_0,\epsilon)=\{z\in\mathbb{C}: d(z,z_0)=|z-z_0|<\epsilon\}$ *nazywamy* ϵ*-otoczeniem punktu* $z_0\in\mathbb{C}$ *w płaszczyźnie* $\mathbb{C}$ *(otwartej).*

Definicja 1.4
Zbiór $U(z_0,\epsilon)=\{z\in\bar{\mathbb{C}}: \rho(z,z_0)<\epsilon\}$ *nazywamy* ϵ*-otoczeniem punktu* $z_0\in\bar{\mathbb{C}}$ *w płaszczyźnie* $\bar{\mathbb{C}}$ *(domkniętej). Zatem:*

$$U(\infty,\epsilon)=\{z\in\bar{\mathbb{C}}: \rho(z,\infty)<\epsilon\}=\{z\in\bar{\mathbb{C}}: \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}<\epsilon\}=$$

$$\{z\in\bar{\mathbb{C}}: |z|>\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2}-1}\},\quad \epsilon-\textit{małe}.$$

Otoczeniem punktu w ∞ *w płaszczyźnie* $\bar{\mathbb{C}}$ *jest dopełnienie domkniętego koła o środku w zerze.*

Definicja 1.5

- *Otoczeniem nakłutym punktu* $z_0\in\mathbb{C}$ *w płaszczyźnie* $\mathbb{C}$ *nazywamy zbiór* $U(z_0,\epsilon)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-z_0|<\epsilon\}$.
- *Otoczeniem nakłutym punktu* $z_0\in\bar{\mathbb{C}}$ *w płaszczyźnie* $\bar{\mathbb{C}}$ *nazywamy zbiór* $U(z_0,\epsilon)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{C}: 0<\rho(z,z_0)<\epsilon\}$.

Definicja 1.6
Obszarem D *nazywamy zbiór punktów płaszczyzny* $\bar{\mathbb{C}}$ *spełniający warunki:*

- *(***otwartość***)* $\forall a\in D \quad \exists\, U(a,\epsilon)$*-otoczenie takie, że* $U(a,\epsilon)\subset D$,
- *(***łukowa spójność***)* $\forall a,b\in D$ *istnieje droga o końcach a,b zawarta w* D.

Drogą o końcach a,b *nazywamy funkcję ciągłą* $\gamma:[t_0,t_1]\to\bar{\mathbb{C}}$ *taką, że* $\gamma(t_0)=a, \gamma(t_1)=b$.

Stwierdzenie 1.1
Dla zbiorów otwartych zawartych w $\mathbb{C}$ *(odpow. w* $\bar{\mathbb{C}}$*) łukowa spójność pokrywa się ze spojnością zbiorów.*

Definicja 1.7*
Obszar $D\subset\mathbb{C}$ *(odpow.* $D\subset\bar{\mathbb{C}}$*) nazywamy jednospójnym, jeśli jego brzeg jest zbiorem spójnym. W przeciwnym przypadku obszar nazywamy wielospójnym.*
(*) Później podamy inną definicję jednospójności.

2 Funkcje zespolone

Definicja 2.1
Odwzorowanie

$$f : D \Rightarrow \bar{\mathbb{C}}, \quad D \subset \mathbb{C}$$

$$z \Rightarrow w = f(z)$$

nazywamy funkcję zespoloną zmiennej zespolonej.

Argument z funkcji f i jej wartość $w = f(z)$ rozkładamy na część rzeczywistą i urojoną tzn. $z = x + iy$, $w = u + iv$. Otrzymujemy w ten sposób rozkład funkcji

$$w = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

na część rzeczywistą $\mathrm{Re}f(z) := u(x, y)$ i część urojoną $\mathrm{Im}f(z) := v(x, y)$.

Część rzeczywista i urojona funkcji zespolonej f jest funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych x, y.

Przykład 2.1
Znaleźć część rzeczywistą i urojoną funkcji $f(z) = iz^2$.

$$f(z) = iz^2 = i(x + iy)^2 = i(x^2 + 2ixy - y^2) = ix^2 - 2xy - iy^2 = -2xy + i(x^2 - y^2).$$

Zatem

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x, y) = -2xy, \quad \mathrm{Im}f(z) = v(x, y) = x^2 - y^2.$$

Przykład 2.2
Dane są część rzeczywista $u(x, y) = x - y$ i urojona $v(x, y) = 4xy$ funkcji zespolonej f. Przedstawić funkcję f jako funkcję zmiennej zespolonej z.

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad \Rightarrow \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Podstawiamy

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (x - y) + i4xy = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + i4\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$$

$$= z\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2i}\right) + \bar{z}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\right) - (z^2 - \bar{z}^2) = z\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) + \bar{z}\left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right) + z^2 - \bar{z}^2.$$

2.1 Granica i ciągłość

Definicja 2.2

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = g \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall z \in D \quad 0 < d(z, z_0) < \delta \Rightarrow d(f(z), g) < \epsilon.$$

Stwierdzenie 2.1

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = g \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = \mathrm{Re} g \quad \text{i} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = \mathrm{Im} g.$$

Definicja 2.3
Funkcja f jest ciągła w $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Twierdzenie 2.1
Funkcja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jest ciągła w $z_0 \Leftrightarrow$ funkcje u i v są ciagłe w (x_0, y_0).

Definicja 2.4
Funkcja f jest ciągła w ∞, jeśli funkcja $f(\frac{1}{z})$ jest ciągła w zerze.

2.2 Pochodna

Definicja 2.5
Granicę właściwą ilorazu różnicowego

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

nazywamy pochodną funkcji f w punkcie z i oznaczamy $f'(z)$.

$$f'(z) := \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Jeżeli funkcje f i g mają pochodną w punkcie z, to

1. $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$.
2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \quad$ dla $\quad z \notin g^{-1}(0)$.

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie $g(z)$ i g ma pochodną w punkcie z, to

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

Twierdzenie 2.2 (warunek konieczny istnienia pochodnej)
Jeżeli funkcja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ma w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ pochodną $f'(z_0)$, to istnieją w punkcie (x_0, y_0) pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ i spełniają w punkcie (x_0, y_0) warunki:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

zwane **warunkami Cauchy'ego-Riemanna.**

Dowód. Zakładamy, że istnieje

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Niech $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

(1) $\Delta y = 0 \Rightarrow \Delta z = \Delta x$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

(2) $\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta z = i\Delta y$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \right] \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Stąd

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

□

Wniosek 2.1
Jeżeli istnieje pochodna funkcji f w punkcie z_0, to:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Wniosek 2.2
Pochodne cząstkowe funkcji f wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =& \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =& \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Stąd i z wniosku 2.1 otrzymamy następujące wzory na pochodną funkcji f w punkcie z_0.

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Twierdzenie 2.3 (warunek dostateczny istnienia pochodnej)
Jeżeli funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są rózniczkowalne w punkcie (x_0, y_0) i spełniają w tym punkcie warunki Cauchy'ego Riemanna, to funkcja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ma pochodną $f'(z_0)$.

Dowód. Funkcje u i v są różniczkowalne w punkcie (x_0, y_0), więc

$$(1) \quad \Delta u(x_0, y_0) = u(x, y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o_1(|\Delta z|),$$

gdzie $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, o_1 jest wielkością małego rzędu tzn. $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o_1(|\Delta z|)}{\Delta z} = 0$.
Analogicznie

$$(2) \quad \Delta v(x_0, y_0) = v(x, y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o_2(|\Delta z|),$$

o_2 jest wielkością małego rzędu tzn. $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o_2(|\Delta z|)}{\Delta z} = 0$.

$$\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0).$$

$$(3) \quad \Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0).$$

Podstawiając (1) i (2) do (3) otrzymamy:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}(z_0) = \frac{\Delta u}{\Delta z}(x_0, y_0) + i\frac{\Delta v}{\Delta z}(x_0, y_0) =$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\Delta x}{\Delta z} + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right) + \frac{o_1(|\Delta z|)}{\Delta z} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\Delta x}{\Delta z} + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right) + i\frac{o_2(|\Delta z|)}{\Delta z} =$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\frac{\Delta x}{\Delta z} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\frac{\Delta y}{\Delta z} + \frac{o_1(|\Delta z|)}{\Delta z} + i\frac{o_2(|\Delta z|)}{\Delta z}.$$

Korzystając z założenia, że funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ spełniają warunki Cauchy'ego-Riemanna

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

otrzymamy, że

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\left(\frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta z}\right) + \frac{o_1(|\Delta z|)}{\Delta z} + i\frac{o_2(|\Delta z|)}{\Delta z}.$$

Zatem

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right) + \frac{o_1(|\Delta z|)}{\Delta z} + i\frac{o_2(|\Delta z|)}{\Delta z}.$$

Stąd wynika, że istnieje granica właściwa ilorazu różnicowego w punkcie z_0, czyli istnieje pochodna $f'(z_0)$. □

Przykład 2.3

Dla jakich punktów $z \in \mathbb{C}$ funkcja $f(z) = z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ ma pochodną?
$\mathrm{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 + y^2$, $\mathrm{Im} f(z) = v(x, y) \equiv 0$. Funkcje u i v są różniczkowalne dla $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sprawdzamy warunki C-R.

$$u'_x = 2x, \quad u'_y = 2y, \quad v'_x = v'_y = 0.$$

Stąd

$$u'_x = v'_y \Leftrightarrow x = 0, \quad u'_y = -v'_x \Leftrightarrow y = 0.$$

Zatem warunki Cauche'go Riemanna są spełnione tylko w punkcie $z_0 = 0$. Z Twierdzenia 2.2 wynika, że tylko w tym punkcie spełniony jest warunek konieczny istnienia pochodnej. Z twierdzenia 2.3 zaś wynika, że w punkcie $z_0 = 0$ spełnione sa również warunki dostateczne istnienia pochodnej funkcji f. Pochodną funkcji policzymy z definicji.

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \bar{z} = 0.$$

2.3 Pochodne formalne

Niech $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Załóżmy, że funkcje $u(x,y)$ i $v(x,y)$ są różniczkowalne w punkcie $z_0 = (x_0, y_0)$. Wyprowadzimy wzory na pochodne formalne $f(z)$.

$$\begin{aligned} df = du + idv =&(u'_x dx + u'_y dy) + i(v'_x dx + v'_y dy) \\ =&(u'_x dx + iv'_x dx) + (u'_y dy + iv'_y dy) \\ =&\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ponieważ $dz = dx + idy$ i $d\bar{z} = dx - idy$, to

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}). \tag{2.2}$$

Wstawiając (2.2) do (2.1) otrzymamy

$$\begin{aligned} df =&\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \\ =&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z} \\ =&\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Definicja 2.6.
Pochodne formalne funkcji $f(z)$ definiujemy następująco:

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Twierdzenie 2.4 (warunek różniczkowalności funkcji w postaci zespolonej)
Niech $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Zakładamy, że funkcje $u(x,y)$ i $v(x,y)$ są różniczkowalne w punkcie $z_0 = (x_0, y_0)$. Wtedy funkcja $f(z)$ ma pochodną w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

Dowód Korzystając z definicji pochodnej formalnej mamy, że

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(u'_x + iv'_x + i(u'_y + iv'_y)\right) = \frac{1}{2}\left(u'_x - v'_y + i(u'_x + iv'_y)\right).$$

Zauważmy, że warunek $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0)$ i $u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0)$, czyli gdy spełnione są warunki Cauchy'ego-Riemanna w punkcie z_0. $\square$

Uwaga 2.1 $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

Dowód
Z wniosku 2.1 wynika, że $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$. Natomiast $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(u'_x + iv'_x - i(u'_y + iv'_y)\right) = \frac{1}{2}\left((u'_x + v'_y) + i(v'_x - u'_y)\right)$. Korzystając z faktu, że jeśli istnieje $f'(z_0)$ to f spełnia w punkcie z_0 warunki Cauchy'ego-Riemanna otrzymamy, że

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= \frac{1}{2}\left[u'_x(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0) + i(v'_x(x_0, y_0) - u'_y(x_0, y_0))\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2u'_x(x_0, y_0) + i2v'_x(x_0, y_0)\right] = f'(z_0)\end{aligned}$$

□

2.4 Pochodna kierunkowa funkcji

Niech $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Wtedy

$$\Delta f = f(z) - f(z_0), \quad \Delta z = z - z_0, \quad \Delta\bar{z} = \bar{z} - \bar{z}_0.$$

Zatem

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Delta\bar{z} + o(\Delta z),$$

gdzie $o(\Delta z)$ oznacza małą wyższego rzędu względem Δ tzn. $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0$. Zapiszemy $\Delta z = |\Delta z|e^{i\theta}$, wtedy $\Delta\bar{z} = |\Delta z|e^{-i\theta}$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}e^{-2i\theta} + \eta(\Delta z),$$

gdzie $\eta(\Delta z) = \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \to$ dla $\Delta z \to 0$.

Do istnienia granicy ilorazu $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ dla $\Delta z \to 0$ potrzeba i wystarcza, aby przy dążeniu $\Delta z \to 0$ kąt $\theta = arg(\Delta z)$ dążył do pewnej granicy ϕ. Granicą ilorazu $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ gdy $arg(\Delta z)$ dąży do kąta ϕ nazywamy pochodną funkcji f w kierunku kąta ϕ w punkcie z_0 i oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial z_\phi}$.

$$\frac{\partial f}{\partial z_\phi} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}e^{-2i\phi}.$$

Uwaga 2.2
Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \neq 0$, to pochodne kierunkowe w tym punkcie zależą od od kierunku.

Uwaga 2.3
Funkcja ma pochodną w punkcie $z_0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \Leftrightarrow$ gdy pochodna funkcji f nie zależy od od kierunku ϕ w punkcie z_0.

2.5 Funkcje holomorficzne

Definicja 2.7
Funkcję $f(z)$ nazywamy holomorficzną (różniczkowalną w sensie zespolonym) w obszarze D jeśli w każdym punkcie $z \in D$ istnieje pochodna $f'(z)$.

Ozn. $\mathbf{f} \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$.

Definicja 2.8
Funkcję $f(z)$ nazywamy holomorficzną (różniczkowalną w sensie zespolonym) w punkcie $z_0 \in D$ jeśli jest holomorficzna w pewnym otoczeniu tego punktu.

Przykład 2.4
Zbadać holomorficzność funkcji $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$.

Wiadomomo, że $f'(z_0)$ istnieje wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. Policzymy $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = z$. Stąd $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Zatem f ma pochodną tylko w $z_0 = 0$. Policzymy ją z definicji

$$f'(z_0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to 0} \frac{z\bar{z} - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \bar{z} = 0.$$

- f ma pochodną tylko w zerze, zatem nie jest holomorficzna ani w punkcie $z_0 = 0$, ani w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$.

Przykład 2.5
Zbadać holomorficzność funkcji $f(z) = z^2\bar{z}$.

Policzymy $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = z^2$. Stąd $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Zatem f ma pochodną tylko w $z_0 = 0$. Policzymy ją z definicji

$$f'(z_0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2\bar{z} - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0} z\bar{z} = 0$$

- f ma pochodną tylko w zerze, zatem nie jest holomorficzna ani w punkcie $z_0 = 0$, ani w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$. Jest to kolejny przykład funkcji, która ma pochodną w punkcie ale nie jest w nim holomorficzna.

Własności funkcji holomorficznych:

1. Jeśli $f, g \in H(D)$, to $(f \pm g) \in H(D)$ oraz $fg \in H(D)$.
2. Jeśli $f, g \in H(D)$, to $\frac{f}{g} \in H(D \setminus (g^{-1}(0))$.
3. Jeśli $g \in H(D), f \in H(f(D))$, to $(f \circ g) \in H(D)$.

3 Funkcje elementarne

3.1 Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą w dziedzinie zespolonej zdefiniujemy tak samo jak w analizie rzeczywistej tzn.

$$exp(z) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Wykażemy istnienie tej granicy dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

1. Najpierw pokażemy zbieżność modułów tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = e^x. \tag{3.1}$$

   Skorzystamy z własności, że $|z^n| = |z|^n$. Zatem

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \left[1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right]^{n/2}.$$

   Przechodząc do granicy otrzymamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = e^x,$$

   czyli zachodzi (3.1).

2. Niech $Argz$ oznacza argument główny liczby z. Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} Arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y. \tag{3.2}$$

   Zauważmy najpierw, że

$$Arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = arctg\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}.$$

   Ponieważ $Arg(z^n) = nArg(z)$, to

$$Arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = narctg\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right).$$

Przechodząc do granicy otrzymamy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(n arctg\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)\right)=y,$$

czyli zachodzi (3.2).

Z jednoznaczności zapisu liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej otrzymamy, że moduł liczby e^z czyli $|e^z|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|=e^x$, zaś $Arg(e^z)=\lim_{n\to\infty}Arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=y$. Stąd

$$exp(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x(cosy+isiny). \tag{3.3}$$

Podstawiając za $z=0+iy$ otrzymamy **wzór Eulera** tzn.

$$\forall y\in I\!R\quad e^{iy}=cosy+isiny \tag{3.4}$$

Wracając do definicji funkcji wykładniczej e^z (znowu korzystając z jednoznaczności zapisu liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej) otrzymamy, że

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(cosy+isiny).$$

Własności

a) Część rzeczywista i urojona funkcji $f(z)=e^z$ wynoszą odpowiednio

$$u(x,y)=e^xcosy,\quad v(x,y)=e^xsiny.$$

b) $|e^z|=e^x$.

c) funkcja e^z jest holomorficzna w $\mathbb{C}$ oraz $(e^z)'=e^z$.

Jest oczywiste, że część rzeczywista i urojona funkcji są klasy $C^1(\mathbb{R}^2)$. Pokażemy, że spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna:

$$u'_x(x,y)=e^xcosy,\quad u'_y(x,y)=-e^xsiny,\quad v'_x(x,y)=e^xsiny,\quad v'_y(x,y)=e^xcosy,$$

$$u'_x(x,y)=v'_y(x,y),\quad u'_y(x,y)=-v'_x(x,y).$$

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}=u'_x+iv'_x=e^xcosy+ie^xsiny=e^x(cosy+isiny)=e^z.$$

d) $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C},\quad e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$.

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1}(cosy_1+isiny_1)e^{x_2}(cosy_2+isiny_2)=e^{x_1+x_2}\left(cos(y_1+y_2)+isin(y_1+y_2)\right).$$

$$=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=e^{z_1+z_2}.$$

e) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z \neq 0.$

Przypuśćmy, że

$$e^z = 0 \iff e^x(cosy + isiny) = 0 \iff e^x cosy = 0 \wedge e^x siny = 0.$$

Ponieważ $e^x \neq 0$ to $cosy = 0$ i $siny = 0$. Pierwsza równość zachodzi dla $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, druga zaś dla $y = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Ponieważ obie równości nie mogą zachodzić jednocześnie, otrzymana sprzeczność dowodzi, że $e^z \neq 0$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

f) funkcja e^z jest okresowa o okresie podstawowym $T = 2\pi i$.

Dla $k \in \mathbb{Z}$ korzystając z okresowości funkcji trygonometrycznych $sinx$ i $cosx$ mamy

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(cos(2k\pi) + isin(2k\pi)) = e^z(1 + i0) = e^z.$$

g) funkcja e^z jest rozszerzeniem do dziedziny zespolonej funkcji wykładniczej e^x.

Niech $z = x + i0 \in \mathbb{R}$. Wtedy $e^z = e^x(cos0 + isin0) = e^x(1 + i0) = e^x$.

Uwaga 3.1
Zostanie później udowodnione, że funkcja wykładnicza e^z rozwinie się w szereg Maclaurina tzn.

$$e^z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{dla każdego} \quad z \in \mathbb{C}.$$

3.2 Funkcje trygonometryczne

Funkcje $cosz$ i $sinz$ w dziedzinie zespolonej definiujemy następująco:

$$cosz := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad sinz := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$tgz = \frac{sinz}{cosz} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \quad ctgz = \frac{cosz}{sinz} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{(e^{iz} - e^{-iz})}.$$

Własności

a) Są to funkcje holomorficzne w swojej dziedzinie tzn. $sinz$ i $cosz$ dla $z \in \mathbb{C}$, tgz dla $z \in \{z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$, $ctgz$ dla $z \in \{z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

Korzystamy z faktu, że funkcja wykładnicza e^z jest funkcją holomorficzną oraz z własności działań na tych funkcjach. Stąd można wyprowadzić wzory na pochodną:

$$(cosz)' = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -sinz.$$

$$(sinz)' = \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) = \frac{i}{2i}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = cosz.$$

$$(tgz)' = \frac{1}{cos^2 z} \quad (ctgz)' = \frac{-1}{sin^2 z}.$$

b) $cos^2 z + sin^2 z = 1.$

$$\begin{aligned} cos^2 z + sin^2 z = & \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 \\ = & \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}\right) \\ = & \frac{4e^{iz}e^{-2iz}}{4} = 1. \end{aligned}$$

c) Części rzeczywiste i urojone funkcji trygonometrycznych wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} sinz &= sinxchy + icosxshy \\ cosz &= cosxchy - isinxshy \\ tgz &= \frac{sin2x}{cos2x + ch2y} + i\frac{sh2y}{cos2x + ch2y} \end{aligned}$$

Dowód podamy dla funkcji $sinz$

$$\begin{aligned} sinz &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(cosx + isinx) - e^{y}(cosx - isinx)}{2i} \\ &= cosx\left(\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\right) + isinx\left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{2i}\right) \\ &= sinxchy + icosxshy. \end{aligned}$$

d) Funkcje trygonometryczne $sinz, cosz, tgz$ są rozszerzeniem do dziedziny zespolonej funkcji $sinx, cosx, tgx$.

Niech $z = x + i0 \in I\!R$. Wtedy

$$\begin{aligned} sinz &= sinxch0 + icos0sh0 = sinx + i0 = sinx.\\ cosz &= cosxch0 - icosxsh0 = cosx - i0 = cosx.\\ tgz &= \frac{sin2x}{cos2x + ch0} + i\frac{sh0}{cos2x + ch0} = \frac{2sinxcosx}{1 + (2cos^2x - 1)} = tgx. \end{aligned}$$

e) Funkcje trygonometryczne są okresowe tzn.

- $sinz$ i $cosz$ o okresie podstawowym $T = 2\pi$.
- tgz i $ctgz$ o okresie podstawowym $T = \pi$.

$$\begin{aligned} sin(z + 2\pi) =& sin(x + iy + 2\pi) = sin(x + 2\pi)chy + icos(x + 2\pi)shy\\ =& sin(x)chy + icos(x)shy = sinz. \end{aligned}$$

Dowód dla $cosz$ jest analogiczny.

$$\begin{aligned} tg(z + \pi) =& \frac{sin2(x + \pi)}{cos2(x + \pi) + ch2y} + i\frac{sh2y}{cos2(x + \pi) + ch2y}\\ =& \frac{sin2x}{cos2x + ch2y} + i\frac{sh2y}{cos2x + ch2y} = tgz. \end{aligned}$$

f) $|sinz| = \sqrt{sin^2x + sh^2y}$ oraz $|cosz| = \sqrt{cos^2x + sh^2y}$.

Ponieważ funkcja hiperboliczna shy jest nieograniczona, wynika stą, że w przeciwieństwie do funkcji rzeczywistych funkcje $sinz$ i $cosz$ są nieograniczone.

g) $sinz, tgz, ctz$ to funkcje nieparzyste, natomiast $cosz$ jest funkcją parzystą tzn. $sin(-z) = -sinz$, $coz(-z) = cosz$.

h) $sin(\bar{z}) = \overline{sinz}$, $\quad cos(\bar{z}) = \overline{cosz} \quad tg(\bar{z}) = \overline{tgz} \quad ctg(\bar{z}) = \overline{ctgz}$.

i) $sin(z_1 \pm z_2) = sinz_1cosz_2 \pm cosz_1sinz_2$.
$cos(z_1 + z_2) = cosz_1cosz_2 - sinz_1sinz_2$.
$cos(z_1 - z_2) = cosz_1cosz_2 + sinz_1sinz_2$.

j) Funkcje $sinz$ oraz $cosz$ przyjmują wszystkie wartości z płaszczyzny otwartej $\mathbb{C}$. Funkcje tgz i $ctgz$ omijają dwie wartości $i, -i$, natomiast przyjmują wartość ∞, tgz w punktach $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $ctgz$ w punktach $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.3 Funkcje hiperboliczne

Funkcje chz i shz w dziedzinie zespolonej definiujemy tak samo jak w dziedzinie rzeczywistej tzn.

$$chz := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad shz := \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$thz := \frac{shz}{chz} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad cthz := \frac{chz}{shz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Własności

a) Są to funkcje holomorficzne w swojej dziedzinie tzn. shz i chz dla $z \in \mathbb{C}$, thz dla $z \in \{z \in \mathbb{C} : z \neq i(k\pi + \frac{\pi}{2}), \quad k \in \mathbb{Z}\}$, $cthz$ dla $z \in \{z \in \mathbb{C} : z \neq ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

$$(chz)' = shz, \quad (shz)' = chz, \quad (thz)' = \frac{1}{ch^2 z}, \quad (cthz)' = \frac{-1}{sh^2 z}.$$

b) $ch^2 z - sh^2 z = 1$ dla $\forall z \in \mathbb{C}$.

c) Części rzeczywiste i urojone funkcji hiperbolicznych wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} shz &= shxcosy + ichxsiny, \\ chz &= chxcosy + ishxsiny, \\ thz &= \frac{sh2x}{ch2x + cos2y} + i\frac{sin2y}{ch2x + cos2y}. \end{aligned}$$

d) Funkcje hiperboliczne $shz, chz, thz, cthz$ są rozszerzeniem do dziedziny zespolonej funkcji $shx, chx, thx, cthx$.

e) Funkcje hiperboliczne są okresowe tzn.

- shz i chz o okresie podstawowym $T = 2\pi i$.
- thz i $cthz$ o okresie podstawowym $T = \pi i$.

f) $|shz| = \sqrt{sh^2 x + sin^2 y}$ oraz $|chz| = \sqrt{sh^2 x + cos^2 y}$.

g) $cosiz = chz, \quad siniz = ish(z)$.

3.4 Funkcja logarytmiczna

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Każdą liczbę zespoloną w spełniającą równanie

$$e^w = z$$

nazywamy logarytmem liczby z i oznaczamy lnz. Niech

$$z = x + iy = e^w = e^{u+iv} = e^u(cosv + isinv). \tag{3.5}$$

Zatem $|z| = e^u$ czyli $u = ln|z| = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Z (3.5) wynika, że $v = Argz + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $Argz$ oznacza argument główny liczby z.

Każda liczba zespolona $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma nieskończenie wiele logarytmów wyrażonych wzorem

$$w = u + iv = ln|z| + i(Argz + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcja zdefiniowa wzorem

$$lnz = ln|z| + iargz \tag{3.6}$$

dla $z \neq 0$ nazywamy funkcją logarytmiczną. Funkcja lnz jest nieskończenie wielowartościowa. Funkcję

$$Lnz = ln|z| + iArgz, \quad -\pi < Argz \leq \pi \tag{3.7}$$

nazywamy gałezią główną logarytmu. Z (3.6) i (3.7) wynika, że

$$lnz = Lnz + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

W każdym obszarze jednospójnym nie zawierającym 0 i ∞ istnieje jednoznaczna gałąź logarytmu. Takim obszarem jest np. płaszczyzna rozcięta wzdłuż osi ujemnej tzn.

$$E = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

3.5 Funkcja potęgowa

Niech μ będzie dowolną liczbą zespoloną, E obszarem spójnym w którym istnieje jednoznaczna gałąź logarytmu zmiennej z. Funkcję potegową o wykładniku μ nazywamy funkcję zdefiniowaną wzorem

$$z^\mu = e^{\mu lnz}. \tag{3.8}$$

Jest to także fukcja wielowartościowa. Gałęzią główną tej funkcji nazywamy gałąź zdefiniowaną za pomocą gałęzi głównej logarytmu tzn.

$$e^{\mu Lnz}.$$

Szczególnym przykładem funkcji potęgowej jest funkcja $\sqrt[n]{z} = e^{(1/n)lnz}$ zwana pierwiastkiem n-stopnia z liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. W każdym obszarze jednospójnym nie zawierającym zera i ∞ istnieje dokładnie n gałęzi różniących się czynnikiem $e^{2k\pi i/n}$, $\quad k = 0, 1, \ldots n-1$.

3.6 Powierzchnie Riemanna funkcji wielowartościowych

Funkcja lnz zdefiniowana dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest nieskończenie wielowartościowa. Na płaszczyźnie rozciętej wzdłuż półosi rzeczywistej ujemnej istnieje nieskończenie wiele gałęzi jednoznacznych logarytmu $Lnz + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$. Utwórzmy nieskończony ciąg tak rozciętych płaszczyzn i ponumerujmy je liczbami $k \in \mathbb{Z}$. Z każdej płaszczyzny usuwamy punkt 0. Łączymy górny brzeg rozcięcia każdej z nich z dolnym brzegiem rozcięcia następnej tak aby punkty brzegowe o tych samych współrzędnych tworzyły jeden punkt. Otrzymamy nieskończenie wielolistną powierzchnię złożoną z plaszczyzn zwanych liściami. Taka powierzchnia przedstawia powierzchnię Riemanna pełnej funkcji lnz. Punktom płaszczyzny oznaczonej liczbą 0 przyporzadkujemy wartości gałęzi głownej Lnz. Ogólnie, punktowi z n-płaszczyzny przyporządkowujemy wartości $Lnz + i2n\pi$. W ten sposób każdej wartości funkcji lnz zostaje przyporządkowany dokładnie jeden punkt powierzchni i na odwrót. Na tej powierzchni lnz jest funkcją **jednoznaczną**. Startując z pewnego punktu z i okrążając punkt 0 dojdziemy po jednym okrążeniu do punktu $z \pm 2\pi i$ zależnie od tego czy okrążamy punkt 0 w dodatniej czy ujemnej orientacji.

Funkcja $\sqrt[n]{z}$ ma n gałęzi jednoznacznych na całej płasczyźnie rozciętej wzdłuż półosi rzeczywistej ujemnej. Gdy okrążamy raz punkt 0 wzdłuż pewnej krzywej zamkniętej w kierunku dodatnim na płaszczyźnie nierozciętej, wówczas każda gałąź przechodzi w następną. Wartość funkcji zostaje pomnożona przez $e^{2\pi i/n}$. Po n-krotnym okrążeniu punktu 0 wartość funkcji wraca do swej początkowej wartości bo zmieni sie o czynnik $e^{2\pi i/n} = 1$.
Aby skonstruować powierzchnię Riemanna funkcji $\sqrt[n]{z}$ umieszczamy n rozciętych płaszczyzn wzdluż osi rzeczywistej ujemnej i łączymy górny brzeg rozcięcia każdej płaszczyzny z dolnym brzegiem rozcięcia następnej. Tak samo połączymy górny brzeg ostatniej płaszczyzny z dolnym brzegiem pierwszej. Zawsze łączymy punkty o tych samych współrzędnych. Otrzymana w ten sposób n-listną powierzchnia przedstawia powierzchnię Riemanna pełnej funkcji $\sqrt[n]{z}$. Na jednym liściu tej powierzchni rozmieśćmy wartości jednoznacznej gałęzi naszej funkcji, a na każdym następnym liściu wartości tej gałęzi pomnożonej przez $e^{2\pi i/n}$. W ten sposób każdej wartości funkcji $\sqrt[n]{z}$ zostaje przyporządkowany dokładnie jeden punkt powierzchni i na odwrót. Na tej powierzchni $\sqrt[n]{z}$ jest funkcją **jednoznaczną**.

4 Szeregi funkcyjne

4.1 Szeregi liczbowe

Definicja 4.1
Szereg $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o dowolnych wyrazach zespolonych nazywamy zbieżnym do sumy s, gdy ciąg sum cząstkowych $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$, $n \in \mathbb{N}$, jest zbieżny do granicy s.

Definicja 4.2
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *nazywamy:*

i) bezwzględnie zbieżnym jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *jest zbieżny,*

ii) warunkowo zbieżnym jeśli jest zbieżny ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Twierdzenie 4.1

i) Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ii) Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny przy dowolnym uporządkowaniu wyrazów i jego suma nie zależy od porządku wyrazów.

iii) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, *gdzie* $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, *jest zbieżny do sumy* $s = \alpha + \beta$ *wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ *są zbieżne tzn.* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \alpha$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \beta$.

Twierdzenie 4.2 (**Kryterium porównawcze**)
Jeżeli dla prawie wszystkich wyrazów szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *zachodzi nierówność* $|a_n| \leq A_n$ *i szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie.*

Twierdzenie 4.3 (**Kryterium d'Alamberta**)
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny, gdy* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ *oraz rozbieżny, gdy* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

Twierdzenie 4.4 (**Kryterium Cauchy'ego**)
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny, gdy* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ *oraz rozbieżny, gdy* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Twierdzenie 4.5 (**Kryterium Dirichleta**)
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny, jeśli wyrazy* a_n *są rzeczywiste, dodatnie i ze wzrostem* n *maleją do zera, a ciąg sum cząstkowych szeregu* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *jest ograniczony.*

Przykład 4.1
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla $|z| = 1$, $z \neq 1$, bo przyjmując $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = z^n$, $|z| = 1$ i $|1 - z| > \eta$ otrzymamy

$$|s_n| = |z + z^2 + \ldots + z^n| = \left|\frac{z(1 - z^n)}{1 - z}\right| < \frac{2}{\eta},$$

a więc założenia kryterium Dirichleta są spełnione. Zauważmy, że ten szereg nie jest zbieżny bezwzględnie dla z takich, że $|z| = 1$, ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

4.2 Rodzaje zbieżności szeregów funkcyjnych

Definicja 4.3
Niech $D \subset \mathbb{C}$ zbiór (często otwarty lub obszar), $f_n : D \to \mathbb{C}$ ciąg funkcji. Powiemy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny w D jeżeli ciąg $\{s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\}$ jest zbieżny w D tzn. jeśli granica $\lim_{n\to\infty} s_n(z) = s(z)$ jest funkcją dobrze określoną w zbiorze D. Taki rodzaj zbieżności nazywamy **zbieżnością punktową.**

Zbieżność w D nazywamy **jednostajną**, jeśli

$$\forall \epsilon \quad \exists N(\epsilon) \quad \forall n > N(\epsilon) \quad \forall z \in D \quad |s_n(z) - s(z)| < \epsilon.$$

Warunek jednostajnej zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ można także sformułować następująco:

$$\forall \epsilon \quad \exists N(\epsilon) \quad \forall n > N(\epsilon) \quad \forall z \in D \quad |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z)| < \epsilon.$$

Funkcję graniczną $s(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z)$ nazywamy sumą danego szeregu.

Uwaga 4.1
Niech $D \subset \mathbb{C}$ zbiór otwarty (lub obszar), $f_n : D \to \mathbb{C}$ ciąg funkcji ciągłych. Jeżeli ciąg funkcyjny (szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$) jest zbieżny jednostajnie w D, to granica ciągu (suma szeregu) jest funkcją ciągłą w D.

Twierdzenie 4.6 (Weierstrassa)
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie w zbiorze $D \subset \mathbb{C}$, jeśli istnieje ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(z)| \leq a_n$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Definicja 4.4
Niech $D \subset \mathbb{C}$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ ciąg funkcji. Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ nazywamy zbieżnym niemal jednostajnie w zbiorze D, jeśli jest on zbieżny jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze zbioru D.

Uwaga 4.2
Zbieżność jednostajną można często zastąpić zbieżnościa niemal jednostajną. Granica zbieżnego niemal jednostajnie ciągu (szeregu) funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

4.3 Szeregi potęgowe

Definicja 4.5
Szeregiem potęgowym o środku w punkcie z_0 *nazywamy szereg postaci*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{4.1}$$

gdzie $a_n \in \mathbb{C}$.

Definicja 4.6
Promieniem zbieżności szeregu potegowego (4.1) nazywamy kres górny zbioru tych liczb r*, że dany szereg jest zbieżny w kole* $\{z : |z - z_0| < r\}$.

Wzór Cauchy'ego-Hadamarda
Niech dany będzie szereg potęgowy (4.1) i

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}, \tag{4.2}$$

gdzie $0 \leq R \leq \infty$ (przyjmujemy, że $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$). Wówczas szereg (4.1) jest zbieżny w każdym punkcie z, dla którego $|z - z_0| < R$, i jest rozbieżny w każdym punkcie z, dla którego $|z - z_0| > R$.

Dowód
Niech $0 < R < \infty$. Wtedy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N$ mamy $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/R + \epsilon$. Stąd

$$|a_n(z - z_0)^n| < \left[\left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)|z - z_0|\right]^n. \tag{4.3}$$

Jeśli $|z - z_0| < R$, to ϵ można dobrać tak małe, że spełniona będzie nierówność

$$\left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)|z - z_0| = q < 1.$$

Wówczas z (4.3) widać, że wyrazy szeregu (4.1) dla $n \geq N$ są majoryzowane przez wyrazy szeregu geometrycznego $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ i w konsekwencji szereg (4.1) jest zbieżny, gdy $|z - z_0| < R$.

Z definicji granicy górnej wynika, że dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje taki podciąg n_k, że

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1/R - \epsilon.$$

Zatem

$$|a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}| > \left[\left(\frac{1}{R}-\epsilon\right)|z-z_0|\right]^{n_k}. \tag{4.4}$$

Jeśli $|z-z_0| > R$, to liczbę ϵ można dobrać tak małą aby $(1/R-\epsilon)|z-z_0| > 1$. Wówczas z (4.4) wynika, że $|a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}| > 1$, a w konsekwencji nie zachodzi warunek konieczny zbieżności szeregu (4.1), więc szereg ten jest rozbieżny dla $|z-z_0| > R$. □

Wniosek 4.1
Obszarem zbieżności szeregu potęgowego (4.1) jest koło $\{z : |z-z_0| < R\}$, gdzie R jest liczbą wyznaczoną ze wzoru Cauchy'ego-Hadamarda.

Przykład 4.2

1. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ jest zbieżny w kole $K(0,1) = \{z : |z| < 1\}$, ponieważ

   $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} = 1.$$

   Jeśli $|z| = 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ nie jest zbieżny, bo nie zachodzi warunek konieczny zbieżności - wyraz $z^n = e^{in\phi}$ ma moduł równy 1, czyli nie dąży do zera.

2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ jest zbieżny w kole $\overline{K(0,1)} = \{z : |z| \le 1\}$, ponieważ

   $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \frac{1}{R} = 1$$

   oraz $\forall n \in \mathbb{N} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. ($\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.) Zatem szereg jest zbieżny w kole i na brzegu.

3. Dla szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ promień zbieżności $R = 0$, ponieważ

   $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n|} = \limsup_{n\to\infty} n = \infty = \frac{1}{R}.$$

   Szereg jest zbieżny tylko dla $z = 0$.

Twierdzenie 4.7 (Abela)
Jeżeli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny w punkcie $z_1 \neq 0$, to jest on bezwzględnie zbieżny w kole $K(0,|z_1|) = \{z : |z| < |z_1|\}$ oraz jest zbieżny jednostajnie w każdym kole $\overline{K(0,\rho)}$, gdzie $\rho < |z_1|$.

Dowód.
Ponieważ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ jest zbieżny, to zachodzi warunek konieczny zbieżności, czyli $\lim_{n\to\infty} a_n z_1^n \to 0$. Zatem

$$\exists M > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n \geq N \quad |a_n z_1^n| < M.$$

Stąd wynika, że

$$\exists M > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n \geq N \quad \forall z \quad |z| < |z_1| \Rightarrow \quad |a_n z^n| < M. \quad (*)$$

Pokażemy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ jest zbieżny w $K(0, |z_1|) = \{z : |z| < |z_1|\}$. Mamy

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_1^n \frac{z^n}{z_1^n} \right| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z^n}{z_1^n} \right| \leq M \left| \frac{z^n}{z_1^n} \right| = M q^n,$$

gdzie $q := \left| \frac{z}{z_1} \right| < 1$. Ponieważ $q < 1$, szereg geometyczny $\sum_{n=1}^{\infty} M q^n$ jest zbieżny. Korzystając z kryterium porównawczego otrzymamy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny bezwzględnie w kole $K(0, |z_1|) = \{z : |z| < |z_1|\}$.

Niech $\rho < |z_1|$. Weźmy z takie, że $|z| \leq \rho$. Wtedy istnieje ρ_1 takie, że $\rho < \rho_1 < |z_1|$.

$$|a_n z^n| = \left| a_n \rho_1^n \frac{z^n}{\rho_1^n} \right| = |a_n \rho_1^n| \left| \frac{z^n}{\rho_1^n} \right| \leq M p^n,$$

gdzie $p := \left| \frac{z}{\rho_1} \right| < 1$, gdzie $|a_n \rho_1^n| < M$ z (*). Zatem z kryterium Weierstrassa szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie w kole $\overline{K(0, \rho)} = \{z : |z| \leq \rho\}$.

Zatem w kole $K(0, |z_1|) = \{z : |z| < |z_1|\}$ szereg potęgowy jest zbieżny niemal jednostajnie. □

Twierdzenie 4.8 (o holomorficzności sumy szeregu potęgowego)
Jeżeli promień R zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest dodatni, to f-suma tego szeregu jest funkcją holomorficzną w kole $K(0, R) = \{z : |z| < R\}$ i dla każdego $z \in K(0, R)$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

(Szereg potęgowy wewnątrz koła zbieżności można różniczkować wyraz po wyrazie).

Dowód
Napiszemy szereg pochodnych formalnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Promień zbieżności tego szeregu jest taki sam jak szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, ponieważ

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Z Twierdzenia Abela wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny jednostajnie, w każdym kole $\overline{K(0,\rho)}$, gdzie $\rho < R$. Weźmy $z_0 \in K(0,R)$, gdzie $|z_0| < \rho < R$. Rozpatrzmy iloraz różnicowy

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right),$$

gdzie $z \in K(0,R)$. Wykażemy, że otrzymany szereg jest bezwględnie jednostajnie zbieżny (skorzystamy z tw. Weierstrassa).

$$\left|a_n \left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right)\right| \leq |a_n| n |\rho|^{n-1}$$

jeśli $|z| \leq \rho$. Weźmy ρ_1 takie, że $\rho < \rho_1 < R$. Wtedy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho_1^n$$

jest zbieżny, zatem $\lim_{n\to\infty} a_n \rho_1^n = 0$. Stąd istnieje $M > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $|a_n \rho_1^n| \leq M$. Niech $q := \frac{\rho}{\rho_1} < 1$ oraz

$$|a_n| n \rho^{n-1} \leq |a_n| n \rho_1^n \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \frac{1}{\rho} \leq \frac{M}{\rho} n q^n.$$

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho} n q^n$ jest zbieżny bo z kryterium Cauchy'ego wynika, że $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{M}{\rho} n q^n} = q < 1$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho} n q^n$ potraktujemy jako majorantę w twierdzeniu Weierstrassa. Stąd szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right)$$

jest bezwględnie jednostajnie zbieżny w otoczeniu z_0, a dokładniej dla $|z| \leq \rho$. Wtedy istnieje granica tego szeregu dla $z \to z_0$. Zatem

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

Czyli f jest holomorficzna $K(0,R)$. $\square$

Wniosek 4.2
Szereg potęgowy ma pochodną dowolnego rzędu:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}.$$

Otrzymane wnioski można uogólnić na przypadek szeregów postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Twierdzenie 4.9
Jeżeli funkcję f można przedstawić w kole $K(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$ w postaci sumy szeregu potęgowego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n,$$

to współczynniki tego szeregu są wyznaczone jednoznaczne i określają je wzory

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dowód
Wstawiając do wzoru na szereg za z punkt z_0 otrzymamy $f(z_0) = a_0$. Różniczkując wyraz po wyrazie dostaniemy

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \dots$$

Podstawiając za $z = z_0$ otrzymamy, że $f'(z_0) = a_1$. Po n-krotnym zróżniczkowaniu dostaniemy, że

$$f^{(n)}(z) = n!a_n + \tilde{a}_1(z-z_0) + \tilde{a}_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Dla $z = z_0$ dostaniemy, że $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$. Stąd $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. $\square$

Uwaga 4.3 (Inne brzmienie powyższego twierdzenia)
Każdy zbieżny szereg potęgowy jest szeregiem Taylora swojej sumy.

4.4 Funkcje analityczne

Definicja 4.7
Niech $D \subset \mathbb{C}$ obszar, funkcję $f : D \to \mathbb{C}$ nazywamy analityczną w $D \Leftrightarrow$ gdy dla każdego $z_0 \in D$ istnieje szereg potęgowy postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ zbieżny w kole $K(z_0, r) \subset D$ taki, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n$ dla $z \in K(z_0, r)$.

Ozn. $A(D)$ oznacza ***zbiór wszystkich funkcji analitycznych*** w D.

Z twierdzenia 4.8 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 4.3
Zachodzi inkluzja $A(D) \subset H(D)$.

Wniosek 4.4
Jeżeli $f \in A(D)$, *to* f *posiada pochodne dowolnego rzędu.* (Porównać z wnioskiem 4.2).

Wniosek 4.5
Suma szeregu potęgowego jest funkcją analityczną w kole zbieżnosci tego szeregu. (Porównać z twierdzeniem 4.9).

Definicja 4.8
Iloczynem szeregów potęgowych $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *nazywamy szereg potęgowy postaci*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)(z - z_0)^n.$$

Twierdzenie 4.10 (Cauchy'ego)
Jeżeli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ *są zbieżne odpowiednio w kołach* $K(z_0, r_1)$ *i* $K(z_0, r_2)$, *to ich iloczyn*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)(z - z_0)^n$$

jest zbieżny w kole $K(z_0, r)$, *gdzie* $r = \min\{r_1, r_2\}$.

Bez dowodu.

Twierdzenie 4.11
Jeżeli $f, g \in A(D)$, *to* $f \pm g \in A(D)$, $fg \in A(D)$.
Bez dowodu.

Przykład 4.3
Rozwinąć $f(z) = \frac{1}{1-z}$ w szereg wokół

(a) punktu $z_0 = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{\frac{1}{2} - (z - \frac{1}{2})} = \frac{2}{1 - 2(z - \frac{1}{2})} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z - \frac{1}{2}\right)^n$$

zbieżny w kole $\{z : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$.

(b) $z_0 = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{2}{3}\frac{1}{1 - \frac{2}{3}(z + \frac{1}{2})} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(z + \frac{1}{2})^n}{3^n}$$

zbieżny w kole $K(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Uwaga 4.4
Promień zbieżności szeregu jest wyznaczony przez odległość punktu z_0 - środka szeregu od najbliższego punktu nieholomorficzności.

5 Odwzorowania konforemne

5.1 Interpretacja geometryczna pochodnej zespolonej

Niech $I := <\alpha, \beta> \subset \mathbb{R}$. Funkcję

$$<\alpha, \beta> \ni t \to z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$$

nazywamy funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej.

Definicja 5.1
Funkcja $z(t)$ jest ciągła w t_0 jeśli $\lim_{t\to t_0} z(t) = z(t_0)$.

Definicja 5.2
Pochodną funkcji $z(t)$ w punkcie $t_0 \in I$ definiujemy jako granicę ilorazu różnicowego tzn.

$$z'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right).$$

Zatem $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$.

Definicja 5.3
Równanie postaci $z = z_0 + at, \quad t \in \mathbb{R}, a, z \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$, określa prostą przechodzącą przez punkt z_0. Kąt nachylenia prostej do osi OX jest określony przez argument główny liczby a.

Definicja 5.4
Wykres funkcji ciągłej $z(t)$ nazywamy krzywą i oznaczmy symbolem γ.

Równanie siecznej do wykresu γ przechodzącej przez punkty $z(t_0)$ i $z(t_1)$ ma postać

$$z = z(t_0) + \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0} t, \quad t \in I.$$

Gdy $t \to t_0$, to sieczna dąży do stycznej w punkcie $z_0 = z(t_0)$. Stąd *równanie stycznej* w tym punkcie ma postać

$$z = z_0 + z'(t_0)t,$$

a argument główny $\phi = Argz'(t_0)$ jest kątem nachylenia stycznej do osi Ox.

Niech $D \subset \mathbb{C}$ obszar, $f : D \to \mathbb{C}$ funkcja holomorficzna, $z_0 \in D$ oraz $f'(z_0) \neq 0$. Niech γ będzie łukiem gładkim o równaniu $z(t)$, $t \in I$ (tzn. funkcja $z(t)$ jest funkcją klasy C^1) wychodzącym z punktu $z_0 = z(t_0)$. Wtedy funkcja f przekształca łuk γ na łuk $\Gamma = f(\gamma)$ o równaniu $w = f(z(t)) = w(t)$ wychodzący z punktu $w_0 = f(z_0)$. Z tożsamości

$$\frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(z(t) - f(z(t_0)}{z(t) - z(t_0)} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$$

dla $t \to t_0$ otrzymujemy $w'(t_0) = f'(z(z_0))z'(t_0)$, więc styczna do Γ w punkcie w_0 tworzy z osią rzeczywistą kąt

$$\Phi := Argw'(t_0) = Arg\left(f'(z_0)z'(t_0)\right) = Argf'(z_0) + \phi. \tag{5.1}$$

Uwaga 5.1
Przy odwzorowaniu holomorficznym w otoczeniu punktu z_0 takiego, że $f'(z_0) \neq 0$, nachylenie ϕ do osi Ox każdego gładkiego łuku γ wychodzącego z punktu z_0 wzrasta o kąt równy argumentowi pochodnej $f'(z_0)$.

Gdy $z \to z_0$, wówczas stosunek odległości $|w - w_0| = |f(z) - f(z_0)|$ do odległości $|z - z_0|$ dąży do $|f'(z_0)|$. Granicę tego stosunku czyli $|f'(z_0)|$ nazywamy dylatacją odwzorowania f w punkcie z_0.

Uwaga 5.2
Przy odwzorowaniu holomorficznym w otoczeniu punktu z_0 takiego, że $f'(z_0) \neq 0$, każdy łuk wychodzący z punktu z_0 wydłuża się lub względnie skraca się w pobliżu punktu z_0 w tym samym stosunku równym dylatacji $|f'(z_0)|$.

Uwaga 5.4
Niech $D \subset \mathbb{C}$ obszar, $f : D \to \mathbb{C}$ funkcja holomorficzna, $z_0 \in D$ oraz $f'(z_0) \neq 0$. Niech styczne do krzywych gładkich γ_1, γ_2 wychodzących z punktu z_0 mają kąty nachylenia równe odpowiednio ϕ_1, ϕ_2. Definujemy $\Gamma_1 = f(\gamma_1), \Gamma_2 = f(\gamma_2)$. Ponieważ f jest funkcją holomorficzną w D, to Γ_1 i Γ_2 sa krzywymi gładkimi. Kąt nachylenia stycznej do krzywych Γ_1, Γ_2 w $w_0 = f(z_0)$ oznaczmy przez Φ_1, Φ_2. Wtedy

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (Argf'(z_0) + \phi_2) - (Argf'(z_0) + \phi_1) = \phi_2 - \phi_1. \tag{5.2}$$

Definicja 5.4
Kątem między krzywymi gładkimi γ_1 i γ_2 wychodzącymi z punktu z_0 nazywamy kąt skierowany między między stycznymi do krzywych γ_1 i γ_2 w punkcie z_0.

Wniosek 5.1
Z Uwagi 5.4 wynika, że jeśli $f'(z_0) \neq 0$, to odzworowanie holomorficzne f zachowuje kąt między krzywymi gładkimi w małym otoczeniu tego punktu tzn. kąt skierowany między obrazami krzywych jest taki sam jak kąt skierowany między krzywymi.

5.2 Interpretacja geometryczna równań Cauchy'ego-Riemanna

Niech $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ będzie funkcją holomorficzną w obszarze $D \subset \mathbb{C}$. Rozpatrzmy rodziny krzywych $u(x, y) = c, v(x, y) = c'$, gdzie c, c' oznaczają stałe rzeczywiste. Weźmy punkt z_0 w którym pochodna $f'(z_0) \neq 0$. Styczne do wykresu tych krzywych opisują się równaniami

$$u'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad v'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{5.3}$$

Na mocy równań Cauchy'ego-Riemanna mamy, że

$$u'_x(x_0, y_0)v'_x(x_0, y_0) + u'_y(x_0, y_0)v'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{5.4}$$

To oznacza, że styczne są prostopadłe. Aby to zobaczyć spróbujemy rozwikłać równanie $u(x, y) = c$ w otoczeniu (x_0, y_0). Ponieważ $f'(z_0) \neq 0$, to $u'_y(x_0, y_0) \neq 0$ lub $v'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Jeśli $u'_y(x_0, y_0) \neq 0$, to z twiedzenia o funkcjach uwikłanych równanie $u(x, y) = c$ opisuje fukcję uwikłaną $y_A(x)$ oraz $u'_x(x_0, y_0) + u'_y(x_0, y_0)y'_A(x_0) = 0$. Stąd

$$y'_A(x_0) = \frac{-u'_x(x_0, y_0)}{u'_y(x_0, y_0)}. \tag{5.5}$$

Analogicznie jeśli $v'_y(x_0, y_0) \neq 0$, to z twiedzenia o funkcjach uwikłanych równanie $v(x, y) = c'$ opisuje fukcję uwikłaną $y_B(x)$ oraz $v'_x(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0)y'_B(x_0) = 0$. Stąd

$$y'_B(x_0) = \frac{-v'_x(x_0, y_0)}{v'_y(x_0, y_0)}. \tag{5.6}$$

Z równań (5.5) i (5.6) wynika, że

$$y'_A(x_0)y'_B(x_0) = \left(\frac{-u'_x(x_0, y_0)}{u'_y(x_0, y_0)}\right)\left(\frac{-v'_x(x_0, y_0)}{v'_y(x_0, y_0)}\right) = -\left(\frac{v'_y(x_0, y_0)}{v'_x(x_0, y_0)}\right)\left(\frac{v'_x(x_0, y_0)}{v'_y(x_0, y_0)}\right) = -1.$$

□

5.3 Odworowania konforemne

Niech $D \subset \mathbb{C}$ zbiór otwarty, $f \in H(D)$. Funkcję $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ możemy potraktować jako odzworowanie rzeczywiste

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

W punkcie $z_0 \in D$ rozpatrzmy odwzorowanie styczne

$$[\Delta x, \Delta y] \mapsto [\Delta u, \Delta v],$$

gdzie $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $u - u_0 = \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$, $\Delta v = v - v_0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$. Odwzorowanie styczne do f w punkcie z_0 możemy też zapisać w postaci zespolonej

$$w - w_0 = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z_0}),$$

gdzie $w_0 = f(z_0) = u_0 + iv_0$. Jakobian tego przekształcenia wyraża się wzorem

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2.$$

Definicja 5.5
Odwzorowanie holomorficzne f nazywamy konforemnym w punkcie z_0, jeśli zachowuje kąt skierowany między dowolnymi krzywymi wychodzącymi z punktu z_0.

Definicja 5.6
Odwzorowanie holomorficzne, które jest różnowartościowe i konforemne w każdym punkcie obszaru D nazywamy konforemnym w D.

Twierdzenie 5.1
Odwzorowanie holomorficzne f jest konforemne w punkcie z_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(z_0) \neq 0$.

Dowód
Implikacja $\Leftarrow$ została już udowodniona (patrz wniosek 4.1).
$\Rightarrow$. Przypuśćmy, że $f'(z_0) = 0$. Rozpatrzmy dwa wektory $\Delta z_1 = z - z_0 = 1$ oraz $\Delta z_2 = z - z_0 = i$. Wektory te są prostopadłe ($\Delta z_2 = i\Delta z_1$). Odworowanie styczne $\Delta z \mapsto \Delta w$ w punkcie z_0 przyjmuje wartość $\Delta w_1 = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ jeśli $\Delta z = 1$ oraz $\Delta w_2 = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)i + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)i = 0$. dla $\Delta z = i$. Ponieważ wektory $\Delta z_1 = 1$ i $\Delta z_2 = i$ są prostopadłe, a f zachowuje kąty w $z = z_0$, zatem wektor $\Delta w_1 = 1$ jet prostopadły do wektora Δw_2. Tymczasem wektory Δw_2 i Δw_1 są zerowe, zatem nie można zdefiniować kąta między nimi, co przeczy założeniu, że f jest konforemne. □

Uwaga 5.5
Założenie, że $f'(z_0) \neq 0$ jest istotne.

Dowód
Rozpatrzmy funkcję $f(z) = z^2$ oraz krzywą $\gamma_1 = \{z : x = t, y = 0, t \in \mathbb{R}^+\} \cup \{0\}$ i $\gamma_2 = \{z = re^{i\frac{\pi}{4}},\ r \in \mathbb{R}^+\} \cup \{0\}$. Kąt w z_0 między γ_1 i γ_2 wynosi $\frac{\pi}{4}$. Obrazem γ_1 jest γ_1, zaś $f(\gamma_2) = \{z = re^{2i\frac{\pi}{4}} = re^{i\frac{\pi}{2}},\ r \in \mathbb{R}^+\}$. Zatem kąt między obrazami krzywych γ_1 i γ_2 w punkcie $w_0 = f(z_0) = 0$ wynosi $\frac{\pi}{2}$, czyli f nie zachowuje kątów w $z_0 = 0$. □

Wniosek 5.2
Jeżeli funkcja f jest różnowartościowa i holomorficzna w obszarze D oraz dla każdego $z \in D$, $f'(z_0) \neq 0$, to f jest konforemne w D.

Definicja 5.7
Odwzorowanie postaci $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ nazywamy homografią.

Przyjmujemy, że $f(\infty) = \frac{a}{c}$ $f(-\frac{d}{c}) = \infty$. Odzworowanie odwrotne do $f(z)$ jest także homografią tzn.

$$f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{a - cw}.$$

Twierdzenie 5.2 (o konforemności homografii)
Homografia jest konforemnym przekształceniem $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$.

Dowód

Łatwo sprawdzić, że homografia jest różnowartościowa. Policzymy pochodną homografii.

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-cb}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad dla \quad z \in \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}.$$

Zatem homografia jest konforemnna w $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$. Zanim skończymy dowód podamy jeszcze kilka definicji.

Definicja 5.8
Kąt w punkcie ∞ między krzywymi γ_1 i γ_2 definiujemy jako kąt między obrazami krzywych Γ_1 i Γ_2 przy przekształceniu $z \to Z = \frac{1}{z}$ w punkcie $Z = 0$.

Pokażemy, że homografia jest konforemna w $z = -\frac{d}{c}$. Wiemy, że $f(-\frac{d}{c}) = \infty$. Niech γ_1 i γ_2 będą krzywymi przechodzącymi przez $-\frac{d}{c}$. Wtedy ich obrazy $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ i $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$ będą krzywymi przechodzącymi przez ∞. Kąt między Γ_1 i Γ_2 jest równy kątowi między krzywymi Γ_1^*, Γ_2^*, które są obrazami Γ_1 i Γ_2 przy odwzowowaniu $W = \frac{1}{w}$, gdy $W = 0$. Zatem $W(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{cz+d}{az+b}$. Stąd

$$\frac{dW}{dz} = \frac{c(az+b) - a(cz+d)}{(az+b)^2} = \frac{cb-ad}{(az+b)^2}.$$

Zatem dla $z = -\frac{d}{c}$, $W'(-\frac{d}{c}) \neq 0$, czyli homografia jest w tym punkcie konforemna.

Pozostaje sprawdzić, że homografia jest konforemna w ∞. Wtedy rozpatrujemy

$$H(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a+bz}{c+dz}$$

w punkcie $z = 0$. Stąd

$$\frac{dH}{dz} = \frac{b(c+dz) - d(a+bz)}{(c+dz)^2} = \frac{cb-ad}{(c+dz)^2}.$$

Zatem dla $H'(0) \neq 0$ o ile $c \neq 0$. Dla $c = 0$ mamy przekształcenie liniowe $f(z) = az+b, a \neq 0$. W tym przypadku rozpatrujemy $F(z) = \frac{1}{f(1/z)}$. Wtedy $\frac{dH}{dz} = \frac{a}{(a+bz)^2} \neq 0$ dla $z = 0$. □

Twierdzenie 5.3
Zbiór przekształceń homograficznych tworzy grupę nieabelową z działaniem składania przekształceń.

Definicja 5.9
Okręgiem na płaszczyźnie domkniętej $\overline{\mathbb{C}}$ nazywamy okrąg na płaszczyźnie otwartej lub prostą.

Twierdzenie 5.4
Homografia przekształca okręgi na $\overline{\mathbb{C}}$ na okręgi na $\overline{\mathbb{C}}$.

Dowód
Przedstawimy homografię jako superpozycję trzech przekształceń.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = A + \frac{B}{z-D} = L_3 \circ L_2 \circ L_1$$

- $L_1 : z \to z - D$ - translacja,
- $L_2 : z \to \frac{1}{z}$ - inwersja (szczególny przypadek homografii),
- $L_3 : z \to A + Bz$ - złożenie translacji i obrotu (ewentualnie jednokładności gdy $B \in \mathbb{R}$.)

Translacja L_1 przekształca okręgi na okręgi i proste na proste.
Złożenie translacji i obrotu ma też taką własność.
Zostało do pokazania, że inwersja przekształca okręgi na $\overline{\mathbb{C}}$ na okręgi na $\overline{\mathbb{C}}$.
Napiszemy ogólne równanie okręgu:

$$\gamma : \alpha(x^2 + y^2) + \beta_1 x + \beta_2 y + \delta = 0.$$

Wstawimy

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

do równania okręgu. Wtedy otrzymamy:

$$\gamma : \alpha(z\bar{z}) + \theta z + \overline{\theta}\bar{z} + \delta = 0,$$

gdzie $\theta = \frac{1}{2}(\beta_1 - i\beta_2), \bar{\theta} = \frac{1}{2}(\beta_1 + i\beta_2)$. Przekształceniem odwrotnym do inwersji $w = \frac{1}{z}$ jest też inwersją $z = \frac{1}{w}$. W miejsce z wstawimy do równania okręgu $z = \frac{1}{w}$. Stąd

$$\alpha\left(\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}}\right) + \theta\frac{1}{w} + \overline{\theta}\frac{1}{\overline{w}} + \delta = 0.$$

Mnożąc stronami przez $w\bar{w}$ dostaniemy

$$\alpha + \theta\bar{w} + \overline{\theta}w + \delta w\bar{w} = 0.$$

Jest to równanie okręgu. □

Definicja 5.10
Dwa punkty p i q są symetryczne względem okręgu $\{z : |z - z_0| = r\}$, jeśli

1. $p \neq z_0$, $q \neq z_0$, p, q leżą na jednej półprostej wychodzącej z z_0 tj. $Arg(p - z_0) = Arg(q - z_0)$,

2. $|p - z_0||q - z_0| = r^2$.

Z tej definicji wynika, że punktem symetrycznym do z_0 jest ∞.

Twiedzenie 5.5
Homografia przekształca punkty symetryczne względem okręgów na $\overline{\mathbb{C}}$ na punkty symetryczne względem ich obrazów.

Problem 1
Mamy dane przekształcenie f i obszar D. Znaleźć obraz $f(D)$.

Problem 2
Dane są dwa obszary D_1 i D_2. Znaleźć przkształcenie konforemne z D_1 na D_2.

Przykład 5.1
Wyznaczyć wszystkie homografie, które przekształcają $D = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ na kolo $D(0, 1)$.

Wybierzmy punkt a taki, że $\mathrm{Im}a > 0$. Punktem symetrycznym do niego względem brzegu, czyli osi OX jest punkt $\bar{a}$. Szukana homografia musi przekształcić punkt a na punkt należący do $D(0, 1)$. Możemy przyjąć, że $f(a) = 0$. Wtedy homografia f punkt $\bar{a}$ musi przekształcić na punkt symetryczny względem 0 czyli na ∞. Zatem $f(a) = 0$, $f(\bar{a}) = \infty$. Stąd możemy napisać $f(z) = k\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ Pokażemy, że $k = e^{i\phi}$. Ponieważ f przekształca oś OX na okrąg jednostkowy, to $|f(1)| = 1$. Korzystając z tego dostaniemy $1 = |f(1)| = |k| \left|\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right|$. Należy zauważyć, że $\overline{z - a} = \bar{z} - \bar{a}$, więc $\overline{1 - a} = 1 - \bar{a}$. Stąd $\left|\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right| = 1$ i w konsekwencji $|k| = 1$, czyli $k = e^{i\phi}$. Szukane homografie mają następującą postać

$$f(z) = e^{i\phi}\frac{z - a}{z - \bar{a}}, \quad \mathrm{Im}a > 0, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

□

Twierdzenie 5.6 (Riemanna dla odwzorowań konforemnych)
Jeżeli:

1. *D i D' obszary jednospójne takie, że brzeg każdego z nich zawiera co najmniej 2 punkty,*
2. *$z_0 \in D$, $w_0 \in D'$ dowolne punkty; $\phi \in [0, 2\pi)$.*

Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie konforemne, które odwzorowuje obszar D na D' i takie, że $f(z_0) = w_0, Argf'(z_0) = \phi$.

6 Całka z funkcji zespolonej

6.1 Całka z funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej

Definicja 6.1
Niech $< \alpha, \beta > \subset \mathbb{R}$. Dana jest funkcja zespolona ograniczona zmiennej rzeczywistej

$$< \alpha, \beta > \ni t \to f(t) = u(t) + iv(t) \in \mathbb{C}.$$

Weźmy podział normalny odcinka $< \alpha, \beta >$ tzn. $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 \dots t_n = \beta$, obierzmy w każdym przedziale punkt $\theta_j \in < t_{j-1}, t_j >$ i utwórzmy sumę całkową

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\theta_j)(t_j - t_{j-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów przedziału $< \alpha, \beta >$ ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny do tej samej granicy, niezależnej od wyboru punktów θ_k, to granicę tę nazywamy całką funkcji zespolonej f po odcinku $< \alpha, \beta > \subset \mathbb{R}$ i oznaczamy

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

Sumę całkową S_n można zapisać jako sumy całkowe części rzeczywistej i części urojonej funkcji f tzn. jako

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} u(\theta_j)(t_j - t_{j-1}) + i \sum_{j=1}^{n} v(\theta_j)(t_j - t_{j-1}), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} S_n$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice ciągu sum częściowych odpowiadających części rzeczywistej $u(t)$ i części urojonej $v(t)$, zatem

Uwaga 6.1
Funkcja $f(t) = u(t) + iv(t)$ jest całkowalna na przedziale $< \alpha, \beta >$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $u(t)$ i $v(t)$ są całkowalne na przedziale $< \alpha, \beta >$ oraz

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} u(t)dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t)dt.$$

Własności

1. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale domkniętym (lub ogólniej: ograniczona i mająca skończoną ilość punktów nieciągłości) to jest całkowalna na przedziale $< \alpha, \beta >$, ponieważ wtedy funkcje $u(t)$ i $v(t)$ są całkowalne na przedziale $< \alpha, \beta >$.

2. Jeżeli $\gamma \in (\alpha, \beta)$ to
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\gamma f(t)dt + \int_\gamma^\beta f(t)dt.$$

3. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest całkowalna, to jej moduł jest funkcją całkowalną oraz
$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(t)|dt.$$

4. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale $< \alpha, \beta >$, to funkcja $F(t)$ zdefiniowana wzorem
$$F(t) = \int_\alpha^t f(s)ds, \quad t \in < \alpha, \beta >$$
jest funkcją pierwotną funkcji $f(t)$ tzn. $F(t)$ ma pochodną $F'(t) = f(t)$ określoną w całym przedziale $< \alpha, \beta >$.

5. Jeżeli funkcja $F(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(t)$ w przedziale $< \alpha, \beta >$, to
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha).$$

Przykład 6.1
Funkcja $f(t) = (a + it)^n$ ma funkcję pierwotną równą $\frac{(a+it)^n}{i(n+1)} + C$, stąd
$$\int_0^1 (a + it)^n dt = \left[\frac{(a + it)^{n+1}}{i(n + 1)} \right]_0^1 = \frac{(a + i)^{n+1}}{i(n + 1)} - \frac{a^{n+1}}{i(n + 1)}.$$

Przykład 6.2
Funkcja $f(t) = e^{t+it}$ ma funkcję pierwotną równa $\frac{e^{t+it}}{1+i} + C$, stąd
$$\int_0^1 e^{t+it} dt = \left[\frac{e^{t+it}}{1 + i} \right]_0^1 = \frac{e^{1+i}}{1 + i} - \frac{1}{1 + i}.$$

Przykład 6.3
Funkcja $f(t) = sin(at + b)$, $a \neq 0$ ma funkcję pierwotną równa $-\frac{1}{a}cos(at + b) + C$.

6.2 Całka z funkcji zespolonej zmiennej zespolonej

Definicja 6.2
Niech $< \alpha, \beta > \subset \mathbb{R}$. Krzywą kawałkami gładką nazywamy obraz funkcji

$$z :< \alpha, \beta >\ni t \mapsto z(t) \in \mathbb{C},$$

jeśli $z(t)$ jest klasy C^1 poza skończoną ilością punktów $t_i \in< \alpha, \beta >$, $t_i \neq t_j$, $\quad i, j = 1, \ldots n$.

Definicja 6.3
Niech dana będzie krzywa kawałkami gładka $K = \overline{AB}$ parametryzowana funkcją

$$z :< \alpha, \beta >\ni t \to z(t) \in K \subset \mathbb{C},$$

gdzie $A = z(\alpha), B = z(\beta)$. Niech $D \subset \mathbb{C}$ obszar, $f : D \to \mathbb{C}$ funkcja zespolona ograniczona, $K \subset D$. Chcemy zdefiniować $\int_K f(z)dz$. Określamy kolejno:

- podział normalny odcinka $< \alpha, \beta >$ tzn. $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 \ldots, t_n = \beta$,
- podział łuku K na łuki $\overline{z_{k-1}z_k}$, $k = 1, \ldots, n$, gdzie $z_k = z(t_k)$,
- na każdym łuku wybieramy dowolny punkt $\zeta_k \in \overline{z_{k-1}z_k}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$,
- tworzymy sumę całkową $S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k$.

Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów przedziału $< \alpha, \beta >$ ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny do tej samej granicy, niezależnej od wyboru punktów ζ_k, to granicę tę nazywamy całką funkcji f wzdłuż łuku K i oznaczamy $\int_K f(z)dz$.

Twierdzenie 6.1 (o zamianie całki z funkcji zespolonej na całkę oznaczoną)
Jeżeli f jest ciągła na krzywej kawałkami gładkiej $\overline{AB}$ parametryzowany funkcją $z = z(t)$, $t \in< \alpha, \beta >$, to

$$\int_{\overline{AB}} f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt. \tag{6.1}$$

Dowód
Niech $K = \overline{AB}$. Najpierw zakładamy, że $\overline{AB}$ będzie krzywą gładką. Wtedy istnieje pochodna $z'(t)$ i jest funkcją ciągłą na odcinku $< \alpha, \beta >$. Zatem całka po prawej stronie (6.1) istnieje. Jej sumy całkowe mają postać

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(z(\theta_k))z'(\theta_k)(t_k - t_{k-1}), \quad \theta_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, \ldots, n.$$

Niech s_n oznacza sumę całkową całki $\int_{\overline{AB}} f(z)dz$,

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad z_k = z(t_k), \quad \zeta_k := z(\theta_k) \in \overline{z_{k-1}z_k}, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Rozważmy różnicę $s_n - \sigma_n$.

$$s_n - \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} [f(\zeta_k)\Delta z_k - f(z(\theta_k))z'(\theta_k)(t_k - t_{k-1})]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[f(\zeta_k)\frac{z_k - z_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} - f(\zeta_k)z'(\theta_k) \right] (t_k - t_{k-1}).$$

Niech

$$\delta_k := \frac{z_k - z_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} - z'(\theta_k).$$

Ponieważ f jest ciągła na $K = \overline{AB}$, to $\exists M = \sup_{\overline{AB}} |f(z)|$. Zatem

$$|s_n - \sigma_n| \leq \sum_{k=1}^{n} M|z'(\theta_k) + \delta_k - z'(\theta_k)||t_k - t_{k-1}|.$$

Ponieważ funkcja $z'(t)$ jest ciągła na $[\alpha, \beta]$, to jest także jednostajnie ciągła czyli

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t, t' \quad |t - t'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |z'(t) - z'(t')| < \epsilon.$$

Możemy, założyć, że dokonujemy takiego podziału normalnego aby $|t_k - t_{k-1}| < \delta$. Wtedy $|\delta_k| < \epsilon$. Zatem

$$|s_n - \sigma_n| < M\epsilon(\beta - \alpha).$$

Z dowolności ϵ wynika, $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$. Zatem istnieje całka $\int_{\overline{AB}} f(z)dz$ i równa się całce $\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$. Gdy $\overline{AB}$ jest krzywą kawałkami gładką, to całka $\int_{\overline{AB}} f(z)dz$ jest sumą skończonej ilości całek wzdłuż gładkich krzywych. □

Wniosek 6.1

1. *Jeżeli funkcje f, g są całkowalne wzdłuż $K = \overline{AB}$, liczby $a, b \in \mathbb{C}$, to kombinacja liniowa $af + bg$ jest całkowalna wzdłuż K oraz $\int_K [af(z) + bg(z)]dz = a\int_K f(z)dz + b\int_K g(z)dz$ (liniowość)*

2. $\int_{\overline{BA}} f(z)dz = -\int_{\overline{AB}} f(z)dz.$

   Dowód
   Jeśli funkcja $z(t), t \in <\alpha, \beta>$ opisuje parametryzację krzywej $\overline{AB}$, to zamiana zmiennych $z_1 : t \mapsto z_1(t) = z(\alpha + \beta - t)$ wyznacza orientację przeciwną krzywej K od punktu B do punktu A. Wtedy

$$\int_{\overline{BA}} f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z_1(t))z_1'(t)dt = -\int_\alpha^\beta f(z_1(t))z'(t)dt = -\int_{\overline{AB}} f(z)dz.$$

3. jeśli $C \in \overline{AB}$ to $\int_{\overline{AB}} f(z)dz = \int_{\overline{AC}} f(z)dz + \int_{\overline{CB}} f(z)dz$.

4. $\left|\int_{\overline{AB}} f(z)dz\right| < \int_{\overline{AB}} |f(z)||dz| \leq ML$, gdzie $M = sup_{\overline{AB}}|f(z)|$, $L = |\overline{AB}|$- długość łuku.

Dowód

$$\left|\int_{\overline{AB}} f(z)dz\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt\right| = e^{i\Phi}\int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)))z'(t)dt.$$

dla pewnej liczby $\Phi \in \mathbb{R}$. Ponieważ powyższa całka jest liczbą rzeczywista nieujemną, to

$$\left|\int_{\overline{AB}} f(z)dz\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{Re}\left(e^{-i\Phi} f(z(t))z'(t)\right) dt\right|.$$

Ponieważ dla funkcji rzeczywistych $|\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)|dt$ oraz $|\mathrm{Re}z| \leq |z|$, zatem

$$\left|\int_{\overline{AB}} f(z)dz\right| \leq \int_{\overline{AB}} |f(z)||z'(t)dt| = \int_{\overline{AB}} |f(z)||dz|.$$

Przykład 6.4
Obliczyć $\int_{\overline{AB}} \bar{z}dz$, gdzie $\overline{AB} = \{z(t) = t + it,\ t \in <0, 1>\}$. Wtedy $z'(t) = 1 + i$. Zatem

$$\int_{\overline{AB}} \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it)(1 + i)dt = (1 - i)(1 + i)\int_0^1 tdt = 1.$$

Przykład 6.5
Obliczyć $\int_{L\cup L_1} \bar{z}dz$, gdzie $L = \{z(t) = t,\ t \in <0, 1>\}$, $L_1 = \{z(t) = 1 + it,\ t \in <0, 1>\}$.

$$\int_{L\cup L_1} \bar{z}dz = \int_L \bar{z}dz + \int_{L_1} \bar{z}dz = \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1 - it)idt = \frac{1}{2} + \left[i(t - it^2/2)\right]_0^1 = 1 + i.$$

Przykład 6.6 (podstawowy)
Obliczyć

$$\int_K (z - z_0)^n dz,$$

gdzie $n \in \mathbb{Z}$, $K = \{z : |z - z_0| = r\}$ (inny zapis okręgu $K = \{z : z = z_0 + re^{it},\ t \in <0, 2\pi)\}$).

$$\int_K (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} re^{it} idt = r^{n+1} i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt.$$

Dla $n = -1$

$$\int_K (z - z_0)^n dz = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Dla $n \neq -1$

$$\int_K (z-z_0)^n dz = r^{n+1} i \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1} \left(e^{i(n+1)2\pi} - e^0 \right) = 0.$$

Definicja 6.4
Niech $D \subset \mathbb{C}$ obszar, $f : D \to \mathbb{C}$ funkcja zespolona. Funkcję holomorficzną $F : D \to \mathbb{C}$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji f w obszarze D wtedy i tylko wtedy, gdy dla $\forall z \in D$, $F'(z) = f(z)$.

Uwaga 6.2
Jeśli F_1 i F_2 są funkcjami pierwotnymi funkcji f, to $F_1 - F_2$=const.

Twierdzenie 6.2 (o istnieniu funkcji pierwotnej)
Jeżeli f jest ciągła w kole $D = D(z_0, r)$ i dla każdego trójkąta $\Delta \subset D$

$$\int_{\partial\Delta^+} f(z)dz = 0,$$

to funkcja $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ jest funkcją pierwotną funkcji f w D.

Ważne: w powyższym twierdzeniu całkujemy po podcinku łączącym punkty z_0 i z. W dalszych wykładach symbol $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ będzie oznaczać, że całkujmy po dowolnej krzywej łączącej oba punkty.

Dowód
Niech z będzie dowolnym punktem z obszaru $D = D(z_0, r)$. Definiujemy funkcję

$$F(z) := \int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta,$$

całkujemy wzdłuż odcinka łączącego z_0 i z zawartego w D. Niech h będzie tak małe aby odcinek łączący z i $z+h$ był zawarty całkowicie w D. Suma odcinków łaczących z_0 i $z+h$, $z+h$ i z oraz z i z_0 tworzy krzywą gładką poza skończoną ilością punktów. Z założenia wynika, że

$$\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta + \int_{z+h}^{z} f(\zeta)d\zeta + \int_{z}^{z_0} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Stąd

$$F(z+h)-F(z) = -\int_{z+h}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta - hf(z) = \frac{\int_{z}^{z+h}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta}{h} \qquad (*)$$

Zatem

$$\left|\int_{z}^{z+h}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right| \leq \int_{z}^{z+h} |f(\zeta)-f(z)|\,|d\zeta|.$$

Ponieważ f jest ciągła, to

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |\zeta - z| < \delta \Rightarrow |f(\zeta)-f(z)| < \epsilon.$$

Wstawiając to oszacowanie do poprzedniej nierówności otrzymamy, że

$$\left|\int_{z}^{z+h}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right| \leq \epsilon|h|.$$

Tutaj i w (*) korzystamy z założenia, że punkty z i $z+h$ łączył odcinek (stąd jego długość jest równa h). Zatem

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \frac{\epsilon|h|}{|h|} = \epsilon.$$

Przechodząc do granicy otrzymamy, że

$$F'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z).$$

Stąd $F'(z) = f(z)$. □

Twierdzenie 6.3 (lemat podstawowy rachunku całkowego)
$D \subset \mathbb{C}$, D-obszar, $K = \partial D$ jest sumą skończonej ilości odcinków i łuków okręgów, $f \in H(\bar{D})$. Wtedy

$$\int_K f(z)dz = 0.$$

Dowód
a) **Załóżmy, że $\Delta \subset D$ jest trójkątem**, $K = \partial\Delta$ jest zorientowany dodatnio. Podzielimy trójkąt Δ na 4 przystające trójkąty $\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(3)}, \Delta_1^{(4)}$ o brzegach zorientowanych dodatnio, które oznaczymy przez $K_1^{(1)}, K_1^{(2)}, K_1^{(3)}, K_1^{(4)}$.

Wtedy

$$\int_K f(z)dz = \int_{K_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{K_1^{(2)}} f(z)dz + \int_{K_1^{(3)}} (z)dz + \int_{K_1^{(4)}} f(z)dz,$$

bo całki wzdłuż wspólnych brzegów znoszą się. Wsród trójkątów $\Delta_1^{(i)}, i = 1, 2, 3, 4$ istnieje $\Delta_1^{(i_1)}, i_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ taki, że

$$\left|\int_K f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{K_1^{(i_1)}} f(z)dz\right|.$$

Dzieląc $\Delta_1^{(i_1)}$ znowu na 4 przystające trójkąty $\Delta_2^{(i)}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ znajdziemy wsród nich $\Delta_2^{(i_2)}$ taki, że

$$\left|\int_{K_1^{(i_1)}} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{K_2^{(i_2)}} f(z)dz\right|.$$

Postępując tak dalej dostaniemy ciąg trójkątów $\Delta_n^{(1)}, \Delta_n^{(2)}, \Delta_n^{(3)}, \Delta_n^{(4)}, n \in \mathbb{N}$, z których każdy jest 1/4 poprzedniego. Niech d_n oznacza długośc $K_n^{(i_n)}$. Wtedy $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1}$. Stąd $d_n = \frac{d}{2^n}$. Niech $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n^{(i_n)}$. Ponieważ $f \in H(D)$, to

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon,$$

czyli $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) + \eta(z)(z - z_0)$, gdzie $\eta(z)$ w kole $\{z : |z - z_0| < \delta\}$ spełnia nierówność $|\eta(z)| < \epsilon$. W tym kole leżą wszystkie trójkąty począwszy od pewnego $n = N$. Zatem dla $n \geq N$

$$\int_{K_n^{(i_n)}} f(z)dz = \int_{K_n^{(i_n)}} f(z_0)dz + \int_{K_n^{(i_n)}} f'(z_0)(z - z_0)dz + \int_{K_n^{(i_n)}} \eta(z - z_0)dz.$$

Dwie pierwsze całki po prawej stronie równe są zeru (korzystamy z przykładu 6.6 (podstawowy) dobierając odpowiednio n=0 i n=1), zaś

$$\left|\int_{K_n^{(i_n)}} \eta(z - z_0)dz\right| \leq \int_{K_n^{(i_n)}} |\eta||z - z_0||dz| \leq \epsilon d_n^2,$$

bo $|z - z_0| < d_n$, a droga całkowania ma długość d_n. Zatem

$$\left|\int_K f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{K_n^{(i_n)}} f(z)dz\right| \leq 4^n \epsilon \frac{d^2}{2^{2n}} = \epsilon d^2.$$

Z dowolności $\epsilon \to 0$ wynika, że $\int_K f(z)dz = 0$.

Załóżmy, że K jest sumą boków wielokąta zorientowanego dodatnio. Dzielimy wielokąt na trójkąty przekątnymi. Wtedy całka po brzegu wielokąta jest sumą całek wzdłuż brzegów trójkątów. Zatem z poprzedniego kroku całka będzie równa zeru.

Ogólny przypadek. Sprowadzimy go do przypadku poprzedniego. W n-tym kroku wybierzmy na konturze K punkty z_k oraz dyski $D_k = \{z : |z - z_k| < r\}$, $k = 1, \ldots, n$ dla pewnego r tak aby funkcja f była holomorficzna na $D_r := D_0 \cup \bigcup_{k=1}^{n} D_k$, gdzie D_0 to obszar t.że $\partial D_0 = K$. Tworzymy ciąg sum całkowych $I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$, gdzie $\zeta_k \in \overline{z_{k-1}z_k}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $I_n \to \int_K f(z)dz$. Wybierzmy n takie, że

$$\left| \int_K f(z)dz - I_n \right| < \frac{1}{2}\epsilon. \tag{6.2}$$

Gdy n jest dostatecznie duże, to długości odcinków $\overline{z_k z_{k+1}}$ są dowolnie małe i łamana Γ_n o wierzchołkach w punktach $z_1, \ldots, z_n$ leży całkowiecie w obszarze D_r.

Możemy przy tym założyć, że zachodzi nierówność $|f(z) - f(\zeta_k)| < \frac{\epsilon}{2d}$, gdzie d oznacza długość konturu K tzn. $d = |K|$. Policzymy całkę z f wzdłuż łamanej Γ_n.

$$\int_{\Gamma_n} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)dz$$

Niech $\eta_k(z) := f(z) - f(\zeta_k)$. Wtedy z jednostajnej ciągłości f wynika, że dla dużych n,

$$|\eta_k(z)| < \frac{\epsilon}{2d}.$$

Wtedy

$$\int_{\Gamma_n} f dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} [f(\zeta_k) + \eta_k]dz = I_n + \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \eta_k.$$

Zatem
$$\left|\int_{\Gamma_n} f(z)dz - I_n\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{z_{k-1}}^{z_k} \eta_k(z)dz\right| \le \frac{\epsilon}{2d}\sum_{k=1}^{n}|z_k - z_{k-1}| \le \frac{\epsilon}{2},$$
bo dlugość $|\Gamma_n| \le d$. Stąd i z (6.2) otrzymamy, że
$$\left|\int_K f(z)dz - \int_{\Gamma_n} f(z)dz\right| \le \left|\int_K f(z)dz - I_n\right| + \left|\int_{\Gamma_n} f(z)dz - I_n\right| \le \epsilon.$$
Ponieważ $\int_{\Gamma_n} f(z)dz = 0$ z poprzedniego kroku, to moduł z całki $\left|\int_K f(z)dz\right|$ jest dowolnie mały. Zatem całka $\int_K f(z)dz$=0. □

Z Twierdzenia 6.2 i Twierdzenia 6.3 wynika następujący wniosek.

Twierdzenie 6.4
Jeżeli $f \in H(D)$, to w każdej kuli $D(z_0, r) \subset D$ funkcja f ma funkcję pierwotną $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, gdzie $z \in D(z_0, r)$, całkujemy po odcinku łączącym z_0 i z.

Twierdzenie 6.5
Jeżeli $F \in H(D)$ i jej pochodna $f \in C(D)$, wtedy dla każdego kawałkami gładkiego łuku $K \subset D$ o końcach z_1, z_2 zachodzi
$$\int_K f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$
Dowód
Ponieważ zakładamy, że pochodna funkcji F' jest funkcją ciągłą, to możemy skorzystać z twierdzenia o zamianie całki z funkcji zespolonej na całkę oznaczoną. Zatem
$$\int_K f(z)dz = \int_K F'(z)dz = \int_\alpha^\beta F'(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{dF(z(t))}{dt}dt = [F(z(t))]_\alpha^\beta$$
$$= F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = F(z_2) - F(z_1).$$
□

Wniosek 6.2

1. Przy założeniach powyższego twierdzenia $\int_K f(z)dz = 0$, gdzie K krzywa zamknięta.
2. Przy założeniach powyższego twierdzenia całka $\int_K f(z)dz$ nie zależy od drogi całkowania w obszarze D.

Dowód pierwszego wniosku jest oczywisty.
Aby dowieśc drugi połączmy punkty z_1, z_2 krzywymi K_1, K_2 i obierzmy na nich zwrot od z_1 do z_2. Wtedy
$$0 = \int_{K_1 \cup -K_2} f(z)dz = \int_{K_1} f(z)dz + \int_{-K_2} f(z)dz = \int_{K_1} f(z)dz - \int_{K_2} f(z)dz.$$

Stąd

$$\int_{K_1} f(z)dz = \int_{K_2} f(z)dz.$$

Uwaga 6.3
Założenie holomorficzności funkcji F w obszarze D jest istotne.

Przykład 6.7
Niech $f(z) = \frac{1}{z}$. Jej funkcją pierwotną jest funkcja $F(z) = Lnz$.
Niech D_1 będzie ograniczonym obszarem takim, że $0 \notin \overline{D_1}$, $K_1 = \partial D_1$. Wtedy $f \in H(D)$ zaś $f(z) = F'(z)$ jest funkcją ciągła w D. Zatem $\int_{K_1} f(z)dz = 0$. Jeśli natomiast $D_2 = \{z : |z| < 1\}$, to $F(z)$ nie jest zdefinowana w zerze czyli $F \notin H(D_2)$, zaś całka $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}e^{it}idt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$.

7 Twierdzenia i wzory całkowe Cauchy'ego

Definicja 7.1
Dwie krzywe K_1, K_2 parametryzowane odpowiednio funkcjami

$$z_1 :< 0,1 >\ni t \mapsto z(t) \in K_1 \quad z_2 :< 0,1 >\ni t \mapsto z(t) \in K_2$$

o wspólnych początkach i końcach $z_1(0) = z_2(0) = A$, $z_2(1) = z_2(1) = B$ nazywamy homotopijnie równoważnymi (homotopijnymi) w obszarze D, jeśli istnieje ciągłe przekształcenie $H(s,t) :< 0,1 > \times < 0,1 >\ni (s,t) \mapsto H(s,t) \in D$

$$\begin{array}{lll} (1) \quad H(0,t) = z_1(t) & H(1,t) = z_2(t), & t \in I, \\ (2) \quad H(s,0) = A & H(s,1) = B, & s \in I. \end{array}$$

Jeżeli krzywe K_1 i K_2 są zamknięte, to warunek (2) w definicji homotopi zastępujęmy warunkiem

$$(2') \quad H(s,0) = A \quad H(s,1) = B, \quad s \in I.$$

Relacja homotopijnej równoważności krzywych jest relacją równoważności. Dzieki temu wszystkie krzywe w obszarze D mające ten sam początek i koniec lub wszystkie krzywe zamknięte można podzielić na klasy krzywych homotopijnych. Wśród nich ważną rolę odgrywa klasa dróg homotopijnych z punktem.

Definicja 7.2
Obszar $D \subset \mathbb{C}$ nazywamy jednospójnym, jeśli każda krzywa zamknięta $K \subset D$ jest homotopijna z punktem. W przeciwnym przypadku mówimy, że obszar jest wielospójny.

Definicja 7.3
*Krzywą kawałkami gładką, zamkniętą i bez samoprzecięć oraz zorientowaną dodatnio względem obszaru, którego jest brzegiem nazywamy **konturem**.*

Twierdzenie 7.1
Jeżeli funkcja $f \in H(D)$ a krzywe kawałkami gładkie $K_1, K_2 \subset D$ o wspólnych końcach są homotopijnie równoważne w D, to

$$\int_{K_1} f(z)dz = \int_{K_2} f(z)dz.$$

Bez dowodu. **Wynika stąd, że wartość całki zależy nie od krzywej ale od klasy homotopii krzywej**.

Wniosek 7.1
Jeżeli funkcja $f \in H(D)$ a kontury $K_1, K_2 \subset D$ są homotopijnie równoważne w D, to

$$\int_{K_1} f(z)dz = \int_{K_2} f(z)dz.$$

Twierdzenie 7.2 (podstawowe twierdzenie Cauchy'ego)
$D \subset \mathbb{C}$, D-obszar jednospójny, $f \in H(D)$. Wtedy dla każdego konturu $K \subset D$

$$\int_K f(z)dz = 0.$$

Twierdzenie to w wynika z założenia, że obszar jest jednospójny oraz z twierdzenia 7.1.

Twiedzenie 7.3
$D \subset \mathbb{C}$, D-obszar, $f \in H(D)$. Wtedy dla każdego konturu $K \subset D$ homotopijnego w tym obszarze z punktem

$$\int_K f(z)dz = 0.$$

Dowód
Ponieważ kontur K jest homotopijnie równoważny punktowi należącemu do D (oznaczmy ten punkt przez z_0), to można zdeformowac homotopijnie K do konturu K_1 leżącego w dysku $D(z_0, r)$ zawartym w D. Ponieważ dysk jest obszarem jednospójnym, zatem z twierdzenia 7.2 wynika, że całka po konturze K_1 zeruje się. Z wniosku 7.1 wynika teza. $\square$

Uwaga 7.1
Twierdzenie 7.3 daje się uogólnić na przypadek gdy $f \in H(D)$ i f ciągła na $\bar{D}$. Reszta założeń i teza pozostają bez zmian.

Twierdzenie 7.4
Każda funkcja f holomorficzna w obszarze jednospójnym D ma funkcję pierwotną w tym obszarze.

Dowód
Wykażemy, że w D całka funkcji f wzdłuż krzywej niezamknkniętej nie zależy od wyboru tej krzywej i jest całkowicie określona przez jej początek i koniec. Istotnie niech K_1 i K_2 będą dwiema krzywymi leżącymi w D o początku w A i końcu B. Niech K_2^- oznacza krzywą zorientowaną przeciwnie do K_2. Wtedy $K_1 \cup K_2^-$ jest krzywą zamkniętą. Z własności całki wynika, że

$$\int_{K_1 \cup K_2^-} f(z)dz = \int_{K_1} f(z)dz - \int_{K_2} f(z)dz,$$

a na mocy twierdzenia 7.3 całka wzdłuż krzywej zamkniętej jest równa zero. Ustalmy teraz punkt $z_0 \in D$, z jest dowolnym punktem z obszaru D. Niech

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,$$

całkujemy po dowolnej krzywej kawałkami gładkiej zawartej w D, łączącej punkty z_0 i z. Dalej postępujemy tak jak w dowodzie twierdzenia 6.2. $\square$

Twierdzenie 7.5 (uogólnienie tw. Cauchy'ego dla obszarów wielospójnych)
Domknięty obszar n-spójny można przedstawić jako

$$D = (D_0 \cup K_0) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} D_i$$

gdzie $\forall i \neq j,\ D_i \cap D_j = \emptyset,\ \ \forall i\ D_i \subset D_0,\ \ \partial D_i = K_i,\ i = 0, \ldots, n-1,$ *K_i-kontury dodatnio zorientowane wzgledem D_i. Jeżeli f jest holomorficzna w D i na jego brzegu, to*

$$\int_{K_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{K_i} f(z)dz.$$

Dowód
Dowód podamy dla obszaru 2-spójnego. Podzielimy obszar D na dwa obszary jednospójne Δ_1, Δ_2 krzywymi L_1, L_2 łączącymi kontury K_0 i K_1. Niech Γ_i, oznacza brzeg obszaru $\Delta_i,\ i = 1, 2$. Jest to krzywa gładka poza skończoną liczbą punktów. Dla takich krzywych przenoszą się wszystkie poznane dotychczas twiedzenia o całkowaniu. Wybieramy na Γ_i, orientację dodatnią względem obszaru $\Delta_i,\ i = 1, 2$. Zatem

$$\Gamma_1^+ = \partial\Delta_1 := K_{01}^+ \cup L_1^- \cup K_{11}^- \cup L_2^-, \quad \Gamma_2^+ = \partial\Delta_2 := K_{02}^+ \cup L_2^+ \cup K_{12}^- \cup L_1^+.$$

Na mocy twierdzenia podstawowego Cauchy'ego $\int_{\Gamma_i} f(z)dz = 0,\ i = 1, 2$. Stąd

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{K_{01}^+} f(z)dz + \int_{L_1^-} f(z)dz + \int_{K_{11}^-} f(z)dz + \int_{L_2^-} f(z)dz +$$
$$\int_{K_{02}^+} f(z)dz + \int_{L_1^+} f(z)dz + \int_{K_{12}^-} f(z)dz + \int_{L_2^+}^{f} (z)dz = \int_{K_0^+} f(z)dz - \int_{K_1^+} f(z)dz$$

i w konsekwencji

$$\int_{K_0^+} f(z)dz = \int_{K_1^+} f(z)dz.$$

□

Twierdzenie 7.6 (o wzorze całkowym Cauchy'ego)
Jeżeli funkcja f jest holomorficzna wewnątrz obszaru jednospójnego D i na jego brzegu ∂D, który jest konturem, to $\forall z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dowód
Niech $z \in D$, $K(z, r) = \{w : |w - z| < r\} \subset D$.

Ponieważ funkcja $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ jest funkcją holomorficzną w obszarze $D_1 : \bar{D} \setminus K(z,r)$, to z uogólnienia twierdzenia Cauchy'ego dla obszarów wielospójnych otrzymamy, że

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

gdzie ∂K jest zorientowany dodatnio. Całkę po prawej stronie można zapisać jako sumę całek

$$\int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\partial K} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\partial K} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{7.1}$$

Z przykładu podstawowego 6.6 wynika, że pierwsza z całek po prawej stronie (7.1) równa się

$$f(z) \int_{\partial K} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(z) 2\pi i.$$

Należy pokazać, że druga z całek po prawej stronie (7.1) zeruje się. Wybierzmy r tak małe aby dla $|\zeta - z| = r$ zachodzilo, że $|f(\zeta) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2\pi}$. Wynika to z faktu, że $f \in C(D)$. Zatem

$$\left| \int_{\partial K} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \int_{\partial K} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{2\pi r}{r} \frac{\epsilon}{2\pi} = \epsilon,$$

gdzie $\int_{\partial K} |d\zeta| = 2\pi r$. Z dowolności ϵ mamy, że $\int_{\partial K} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$. □

Wniosek 7.2

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Wniosek 7.3
Twierdzenie 10.5 mówi, że wartości funkcji holomorficznej w dowolnym punkcie z należącym do obszaru D są wyznaczone przez jej wartości na brzegu obszaru.

Przykład 7.1
Obliczyć

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Obszar D ograniczony okręgiem $\{z : |z| = 2\}$ zawiera dwa punkty $z_1 = i, z_2 = -i$ w których funkcja podcałkowa jest nieholomorficzna. Zdefiniujmy małe dyski

$$D_1 = \{z : |z - i| < \frac{1}{2}\}, D_2 = \{z : |z + i| < \frac{1}{2}\}.$$

Niech $K_i = \partial D_i$, $i = 1, 2$, bedą dodatnio zorientowanymi konturami. Korzystając z uogólnienia twierdzenia Cauchy'ego dla obszarów wielospójnych otrzymamy, że

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{K_1} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{K_2} \frac{dz}{z^2+1}.$$

Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego otrzymamy

$$\int_{K_1} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{K_1} \frac{\frac{1}{z+i}dz}{z-i} \quad oraz \quad \int_{K_2} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{K_2} \frac{\frac{1}{z-i}dz}{z+i}.$$

Należy zauważyć, że funkcja $f_1(z) = \frac{1}{z+i} \in H(D_1)$, $f_2(z) = \frac{1}{z-i} \in H(D_2)$, zatem

$$\int_{K_1} \frac{\frac{1}{z+i}dz}{z-i} + \int_{K_2} \frac{\frac{1}{z-i}dz}{z+i} = 2\pi i(f_1(i) + f_2(-i)) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{-2i} \right) = 0.$$

Twierdzenie 7.7 (o wartości średniej funkcji holomorficznej)
Jeżeli f jest funkcją holomorficzną w obszarze D, $z \in D$, $D(z, r) \subset D$, to

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt.$$

Dowód
Niech $z \in D$, $K = \partial D(z, r) = \{\zeta : |\zeta - z| = r\} = \{\zeta : \zeta = z + re^{it}, t \in [0, 2\pi)\} \subset D$. Z twierdzenia o wzorze całkowym Cauchy'ego wynika, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt,$$

∂K jest zorientowany dodatnio. □

Twierdzenie 7.8 (o rozwijaniu funkcji holomorficznej w szereg Taylora)
$D \subset \mathbb{C}$, D-obszar. Jeżeli funkcja $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, $D(z_0, r) \subset D$, to f można przedstawić w tym kole w postaci sumy szeregu potęgowęgo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad i \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

gdzie $\partial D(z_0, r)$ jest zorientowany dodatnio.

Dowód
Niech $z_0 \in D$, $D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$. Z twierdzenia o wzorze całkowym Cauchy'ego dla $z \in D(z_0, r)$ zachodzi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta. \tag{7.2}$$

Ponieważ $z \in D(z_0, r)$, to istnieje ρ takie, że $|z - z_0| < \rho < r = |\zeta - z_0|$. Wyrażenie $\frac{1}{\zeta - z}$ przedstawimy jako sumę szeregu potęgowego o środku w punkcie z_0, tzn.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0)} \frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n, \tag{7.3}$$

który jest zbieżny jednostajnie na dysku $D(z_0, \rho)$, ponieważ moduły wyrazów tego szeregu są nie większe niż $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{r^{n+1}}$. Podstawmy rozwinięcie (7.3) do (7.2), całkując wyraz po wyrazie (korzystamy z faktu, że szereg jest zbieżny jednostajnie) otrzymamy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta) \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n.$$

Czyli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wniosek 7.4
Z twierdzenia 7.8 i wniosku 4.3 wynika, że A(D)=H(D).

Uwaga 7.2
Ponieważ współczyniki szeregu Taylora są wyznaczone jednoznacznie zatem

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{oraz} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

to

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Wynika stąd następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.9 (o uogólnionym wzorze całkowym Cauchy'ego)
Jeżeli funkcja f jest holomorficzna wewnątrz obszaru jednospójnego D i na jego brzegu ∂D, ∂D jest konturem, to dla $\forall z \in D$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Uwaga 7.3
Funkcja holomorficzna w obszarze D ma w tym obszarze pochodne dowolnie wysokiego rzędu.

Wynika to z faktu, ze f jest sumą szeregu potęgowego, a dla takich funkcji udowodniliśmy we Wniosku 6.2 istnienie pochodnych dowolnego rzędu.

Uwaga 7.4
Jeżeli $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jest holomorficzna w obszarze D, to funkcje u i v **mają pochodne cząstkowe dowolnie wysokiego rzędu**.

Przykład 7.2
Obliczyć

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)^3} dz.$$

Niech $D := \{z : |z| < 3\}$, $\quad K = \partial D$. Funkcja $f(z) = e^{i\pi z}$ jest holomorficzna w D. Skorzystamy z twierdzenia o uogólnionym wzorze całkowym Cauchy'ego dla f i $n = 2$. Zatem

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(e^{i\pi z}\right)''_{|z=1} = i(\pi)^3.$$

Twierdzenie 7.10 (odwrotne do podstawowego tw. całkowego Cauchy'ego)(Morery)
$D \subset \mathbb{C}$, D-obszar jednospójny. Jeżeli funkcja $f \in C(D)$ i dla każdego konturu $K \subset D$

$$\int_K f(z) dz = 0,$$

to $f \in H(D)$.

Dowód
Niech K będzie konturem zawartym w obszarze D takim, że $\int_K f(z)dz = 0$. Z twierdzenia o istnieniu funkcji pierwotnej wynika, że istnieje $F \in H(D)$ taka, że $F'(z) = f(z)$ dla $z \in D$. Ponieważ F jest holomorficzna, to z twierdzenia o uogólnionym wzorze całkowym wynika, że $f = F'$ jest także funkcją holomorficzną w obszarze D. □

Szeregi Taylora funkcji elementarnych
Korzystając z twierdzenia 7.8 możemy znaleźć szeregi Taylora (Maclaurina) znanych funkcji. Są one rozszerzeniem szeregów rzeczywistych do dziedziny zespolonej.

Przykład 7.3

1. $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.
2. $sinz = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
3. $cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$.
4. $chz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$.
5. $shz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
6. Rozwinąć w szereg Taylora o środku w punkcie $z_0 \neq 0$ gałąź logarytmu.

   Wiadomo, że w obszarze jednospójnym, nie zawierającym 0 i ∞, istnieje gałąź logarytmu. Zatem promień r koła o środku w punkcie z_0 w którym szereg będzie zbieżny musi spełniać $r < |z_0|$. Policzymy pochodne $f(z) = Lnz$.

   $$f'(z) = z^{-1}, \quad f''(z) = -z^{-2}, \quad \ldots \quad f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}.$$

   Stąd

   $$Lnz = Ln(z_0) + \frac{z - z_0}{z_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n + \ldots....$$

   Przyjmując $z_0 = 1$ i zastępując z prze $1 + z$ otrzymamy dla wartości głównej logarytmu rozwinięcie

   $$Ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots....$$

   w kole $|z| < 1$.

8 Funkcje holomorficzne w $\mathbb{C}$

Twierdzenie 8.1 (nierówność Cauchy'ego)
Jeżeli $f \in H(D(z_0, R))$ oraz istnieje $M > 0$ takie, że dla każdego $z \in D(z_0, R)$, zachodzi $|f(z)| \leq M$. Wtedy współczynniki szeregu Taylora funkcji o środku w z_0 spełniają nierówność

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dowód
Niech $D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$, gdzie $r < R$. Wtedy

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n},$$

$\partial D(z_0, r)$ jest zorientowany dodatnio. Dla $r \to R$ otrzymamy $|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$. □

Definicja 8.1
Funkcję holomorficzną w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$ nazywamy funkcją całkowitą.

Przykład 8.1
Wielomiany, e^z, $sinz$, $cosz$ są funkcjami całkowitymi.

Twierdzenie 8.2 (Liouville'a)
Funkcja całkowita i ograniczona jest stała.

Dowód
Ponieważ f jest całkowita, to $f \in H(D(0, R))$ dla dowolnego $R > 0$. Zatem f rozwija się w szereg Maclaurina w $H(D(0, R))$. Z nierówności Cauchy'ego wynika, że $|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$ w $D(0, R)$ bo f jest ograniczona. Przechodząc z R do nieskończoności dostaniemy, że $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \ldots = 0$ dla $\forall n \in N$. Stąd $f(z) = c_0$. □

Twierdzenie 8.3 (d'Alamberta-podstawowe tw. algebry)
Każdy wielomian stopnia $n \geq 1$ w dziedzinie zespolonej ma co najmniej 1 pierwiastek.

Dowód (nie wprost)
Niech $n \geq 1$. Wtedy wielomian stopnia n ma postać $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n$. Przypuśmy, że $P(z)$ nie ma miejsc zerowych. Zatem $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$. Wykażemy, że f jest ograniczona. Ponieważ $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$, to $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Zatem w sasiedztwie punktu $z_0 = \infty$ funkcja f jest ograniczona. W innych punktach płaszczyzny funkcja przyjmuje tylko wartości skończone. Stąd f musi być ograniczona. Z twierdzenia

Liouville'a wynika, że f jest stała, co jest sprzeczne z założeniem, że $n \geq 1$. $\square$

Wniosek 8.1 (Twierdzenie Bezout)
Każdy wielomian stopnia $n \geq 1$ ma w dziedzinie zespolonej dokładnie n pierwiastków.

9 Zera funkcji holomorficznej

Definicja 9.1
Punkt a nazywamy zerem funkcji holomorficznej jeśli $f(a) = 0$.

Definicja 9.2
Punkt a nazywamy zerem k-krotnym funkcji holomorficznej jeśli
$f(a) = f'(a), \ldots, f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^k(a) \neq 0$.

Twierdzenie 9.1 (o zerach funkcji holomorficznej)
$D \subset \mathbb{C}$, D-obszar, $f \in H(D)$, $f \neq \mathbb{C}onst$, $a \in D$. Jeśli a jest zerem funkcji f, to $\exists k \in \mathbb{N}$ i otoczenie U punktu a takie, że $f(z) = (z-a)^k \phi(z)$, gdzie $\phi \in H(D)$, $\phi(z) \neq 0$ w pewnym otoczeniu U punktu a.

Dowód
Ponieważ f jest funkcją holomorficzną w obszarze D , to istnieje otoczenie U punktu a takie, że f rozwinie się w szereg Taylora o środku w pukcie a tzn. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ dla $z \in U$. Punkt a jest zerem funkcji, stąd $f(a) = c_0 = 0$. Z założenia, ze $f \neq const$ wynika, że nie wszyskie współczynniki c_n mogą być zerami. Zatem istnieje $c_k \neq 0$. Rozpatrzmy $c_k \neq 0$ z najmniejszym indeksem k. Wtedy

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots = (z-a)^k(c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots).$$

Ponieważ wyrażenie w nawiasie jest zbieżnym szeregiem potęgowym, zatem istnieje jego suma, którą oznaczymy symbolem ϕ. Jako suma szeregu potęgowego ϕ jest funkcją holomorficzną w U. Ponieważ $\phi(a) = c_k \neq 0$, to jako funkcja ciągła omija zero w pewnym otoczeniu $U' \subset U$. $\square$

Wniosek 9.1
Pukty zerowe funkcji holomorficznej są izolowane.

Wniosek 9.2
Funkcja całkowita ma przeliczalnie wiele zer w $\mathbb{C}$.

Uwaga 9.1
Niech $f \in H(D)$, D-obszar. Punkty w których funkcja holomorficzna f przyjmuje z góry zadaną wartość A są izolowane, bo są to miejsca zerowe funkcji $f(z) - A$.

Twierdzenie 9.2 (o jednoznaczności funkcji holomorficznej)
$D \subset \mathbb{C}$, D-obszar, $f_1, f_2 \in H(D)$. Niech F będzie podzbiorem D mającym pukt skupienia $a \in D$ oraz $\forall z \in F$ zachodzi $f_1(z) = f_2(z)$. Wtedy $\forall z \in D$ zachodzi $f_1(z) = f_2(z)$.

Dowód
Przypuśćmy, że $f_1 \neq f_2$ na D. Wtedy możemy zdefiniować funkcję $f := f_1 - f_2$ na D. Jest oczywiste, że $f \in H(D)$ oraz $\forall z \in F$ zachodzi $f(z) = 0$. W zbiorze F istnieje ciąg z_n mający punkt skupienia $a \in D$. Ponieważ f jest ciągła, to $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Czyli a jest także zerem funkcji holomorficznej. Poniważ a nie jest punktem odsobnionym, to f musi być stała. Skoro $f(a) = 0$, to $f \equiv const = 0$ czyli $f_1 = f_2$. $\square$

Wniosek 9.3
Jeśli $f_1, f_2 \in H(D)$ i przyjmują jednakowe wartości na pewnym łuku K lub w pewnym obszarze $D_0 \subset D$, to są równe w całym obszarze D.

10 Szeregi Laurenta

Dane są dwa szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}. \tag{10.1}$$

Pierwszy z tych szeregów jest zbieżny w kole $K(z_0, R)$, gdzie $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, drugi zaś jest zbieżny na zewnątrz koła $\overline{K(z_0, r)} = \{z \in C : |z - z_0| > r\}$, gdzie $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$.

Definicja 10.1
Sumę szeregów zdefiniowanych w (10.1) zapisujemy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{10.2}$$

i nazywamy szeregiem Laurenta o środku w z_0.

Definicja 10.2
Powiemy, że szereg Laurenta (10.2) jest zbieżny, jeśli każdy z szeregów zdefiniowanych w (10.1) jest zbieżny.

Uwaga 10.1
Jeżeli $r < R$*, to szereg Laurenta (10.2) jest zbieżny wewnątrz pierścienia*

$$P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\} \tag{10.3}$$

i przedstawia w nim funkcję holomorficzną $f(z)$*. Sumę szeregu* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *nazywamy częścią regularną funkcji f(z), zaś sumę szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ *nazywamy częścią główną funkcji f(z).*

Twierdzenie 10.1. (Laurenta)
Jeżeli f *jest funkcją holomorficzną w pierścieniu (10.3) to daje się w nim przedstawić szeregiem Laurenta postaci (10.2), przy czym współczynniki wyrażają się wzorami*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{10.4}$$

gdzie K *jest dowolnym okręgiem o środku w* z_0 *zorientowanym dodatnio i zawartym w pierścieniu* $P(z_0, r, R)$*.*

Dowód
Niech z będzie dowolnym punktem pierścienia $P(z_0, r, R)$, K_1, K_2 dwoma okręgami o środku w z_0 położonymi wewnątrz pierścienia tak aby punkt z leżał między nimi, K_1, K_2 są zorientowane dodatnio. Pierścień dzielimy promieniami na dwa obszary D i D'. Załóżmy, że $z \in D$.

Oznaczając brzegi obszarów D i D' zorientowane dodatnio przez C i C' otrzymamy, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{10.5}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{10.6}$$

gdzie (10.5) wynika z twierdzenia o wzorze całkowym Cauchy'ego, zaś (10.6) wynika z podstawowego twierdzenia Cauchy'ego. Dodajemy stronami całki z (10.5) i (10.6). Ponieważ całki wzdłuż promieni znoszą się, zatem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{10.7}$$

Jeśli $\zeta \in K_2$, to $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$, wobec czego nastepującą funkcję można przedstawić jako sumę szeregu potęgowego o środku w z_0

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{10.8}$$

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ jest zbieżny dla $|z - z_0| < |\zeta - z_0| < R$. Analogicznie, gdy $\zeta \in K_1$, to $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$ wobec czego nastepującą funkcję można przedstawić jako sumę szeregu potęgowego o środku w z_0

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}. \tag{10.9}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$ jest zbieżny dla $|z - z_0| > |\zeta - z_0| > r$.

Oba te szeregi są jednostajnie zbieżne względem ζ, wiec szeregi (10.8) i (10.9) można wstawić do (10.6) i (10.7) a następnie całkować te szeregi wyraz po wyrazie, skąd otrzymamy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}d\zeta(z - z_0)^{-n}.$$

W powyższych całkach okręgi K_1 i K_2 można zastąpić dowolnym okręgiem K o środku w z_0, zorientowanym dodatnio i zawartym w pierścieniu $P(z_0, r, R)$. Zatem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z - z_0)^{-n},$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

□

Uwaga 10.2
Jeżeli funkcja f jest rozwijalna w pierścieniu $P(z_0, r, R)$ w szereg postaci

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z - z_0)^n,$$

to $\forall n \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość $a_n = c_n$, gdzie c_n są współczynnikami zdefiniowanymi w twierdzeniu Laurenta.

Dowód

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k-1}.$$

Całkując prawą stronę wyraz po wyrazie otrzymamy

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\Gamma_\rho} (z-z_0)^{n-k-1} dz = a_k 2\pi i,$$

$\Gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = \rho\} \subset P(z_0, r, R)$. Korzystamy z faktu, że

$$\int_{\Gamma_\rho} (z-z_0)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 0 & n \neq k, \\ 2\pi i & n = k. \end{cases}$$

Zatem

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = c_k.$$

□

Uwaga 10.3 (nierówność Cauchy'ego)
Niech $f \in H(P(z_0, 0, r))$. Jeżeli $\exists M > 0$ takie, że $\forall z, |z - z_0| = \rho < r$ zachodzi, że $|f(z)| \leq M$, to

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n = 0, \pm -1, \pm 2, \ldots.$$

Przykład 10.1

1. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}$ w szereg Laurenta o środku w $z_0 = 0$,

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad dla \quad |z| < 1,$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{[1-(-\frac{z}{2})]} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} \quad dla \quad |\frac{z}{2}| < 1.$$

Zatem dla $|z| < 1$ mamy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n$$

2. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}$ w szereg Laurenta o środku w $z_0 = i$. Rozpatrujemy pierścień o środku w $z_0 = i$ i promieniach będących odległością środka do punktów w których funkcja jest nieholomorficzna tzn. $z_1 = 1$ i $z_2 = -2$ czyli $P(z_0 = 1, \sqrt{2}, \sqrt{5}) = \{z : \sqrt{2} < |z - i| < \sqrt{5}\}$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{[1-(\frac{1-i}{z-i})]} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+1}} \quad dla \left|\frac{1-i}{z-i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| > \sqrt{2},$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2+i}\frac{1}{[1+(\frac{z-i}{2+i})]} = \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2+i)^n} \quad dla \left|\frac{z-i}{2+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < \sqrt{5}.$$

Zatem w $P(z_0 = 1, \sqrt{2}, \sqrt{5}) = \{z : \sqrt{2} < |z - i| < \sqrt{5}\}$ mamy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2+i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^{n-1}}{(z-i)^n}.$$

11 Punkty osobliwe

Definicja 11.1
Punkt w którym f jest holomorficzna nazywamy punktem regularnym.
Definicja 11.2
Jeżeli funkcja f nie jest holomorficzna w $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ale jest holomorficzna w pewnym jego sąsiedztwie $U(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$, gdy $z_0 \neq \infty$ lub $\{z : |z| > R\}$ dla $z_0 = \infty$, to z_0 nazywamy punktem osobliwym izolowanym (odosobnionym) funkcji f.

11.1 Punkty osobliwe izolowane

Definicja 11.3
Punkt osobliwy izolowany $z = z_0$ nazywamy:

1. punktem *pozornie osobliwym*, jeżeli $\lim_{z\to z_0} f(z)$ istnieje i jest skończona,
2. *biegunem*, jeżeli: $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$,
3. punktem *istotnie osobliwym*, jeżeli nie istnieje $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

Przykład 11.1

1. Dla f danej wzorem

$$f(z) = \frac{1 - cosz}{z^2}$$

$z_0 = 0$ jest punktem osobliwym.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1-cosz}{z^2} = \lim_{z\to z_0} \frac{2sin^2(\frac{z}{2})}{z^2} = \lim_{z\to z_0} \left(\frac{sin(\frac{z}{2})}{\frac{z}{2}}\right)^2 \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Wynika stąd, że $z_0 = 0$ jest punktem pozornie osobliwym.

2. Dla f danej wzorem
$$f(z) = sin(\frac{\pi}{z})$$
$z_0 = 0$ jest punktem osobliwym. Rozpatrzmy ciągi postaci $z_n := \frac{1}{2n+\frac{\alpha}{\pi}} \to 0$ dla $n \to \infty$. Zauważmy, że $f(z_n) = sin(\alpha)$, stąd $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = sin(\alpha)$. Zmieniając wartości α dostaniemy, że nie istnieje granica f w $z_0 = 0$, czyli z_0 jest punktem istotnie osobliwym.

3. Dla f danej wzorem
$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$
punktami osobliwymi sa $z_n = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{N}$. Są to bieguny ponieważ $\lim_{z\to 2n\pi i} \frac{1}{e^z-1} = \infty$.

4. Niech
$$f(z) = \frac{1}{sin(\frac{\pi}{z})}.$$
Wtedy punkty $z_n = \frac{1}{n}$ są biegunami. Zaś punkt $z_0 = 0$ jest punktem osobliwym ale nie jest *izolowany*.

Twiedzenie 11.1 (Riemanna)
Niech $f \in H(P(z_0, 0, R))$. Punkt osobliwy izolowany $z_0 \in \mathbb{C}$ jest punktem pozornie osobliwym funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy rozwinięcie f w szereg Laurenta w $P(z_0, 0, R)$ nie zawiera części głównej tzn.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Dowód
$\Rightarrow$ Niech z_0 będzie punktem pozornie osobliwym, wówczas istnieje skończona granica $A = \lim_{z\to z_0} f(z)$. Zatem istnieje otoczenie $U(z_0, \epsilon)$ i stała $M > 0$ takie, że $|f(z)| \le M$ dla $z \in U(z_0, \epsilon)$. Niech $\rho < \epsilon$, korzystając z nierówności Cauchy'ego otrzymamy, że $|c_n| \le \frac{M}{\rho^n}$ dla $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Jeśli $n < 0$ to prawa strona $\frac{M}{\rho^n} \to 0$ dla $\rho \to 0$. Stąd $c_n = 0$ dla $n < 0$ tzn. część główna szeregu Laurenta znika.

$\Leftarrow$ Ponieważ w $P(z_0, r, R)$ funkcja f ma rozwinięcie w szereg Laurenta, które nie zawiera części głównej tzn. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, to jest ono szeregiem Taylora w tym pierścieniu. Więc istnieje granica $\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0$. Dlatego punkt z_0 jest pozornie osobliwy. $\square$

Uwaga 11.1
Jeżeli z_0 jest punktem pozornie osobliwym f, to funkcja $\tilde{f}(z) := f(z)$ dla $z \neq z_0$ oraz $\tilde{f}(z) := \lim_{z \to z_0} f(z)$ jest holomorficzna w otoczeniu z_0.

Twiedzenie 11.2
Niech $f \in H(P(z_0, 0, R))$. Punkt osobliwy izolowany z_0 jest biegunem funkcji f wtedy i tylko wtedy gdy rozwinięcie f w szereg Laurenta w $H(P(z_0, 0, R))$ ma część główną o skończonej liczbie wyrazów tzn.

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

gdzie $c_{-k} \neq 0$.

Dowód
$\Rightarrow$ Niech z_0 będzie biegunem funkcji f. Stąd $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Zatem istnieje otoczenie $U(z_0, \epsilon)$ takie, że $f(z) \neq 0$ dla $z \in U(z_0, \epsilon)$. Zdefiniujemy funkcję $\phi(z) = \frac{1}{f(z)}$ w $U(z_0, \epsilon)$, przy czym istnieje $\lim_{z \to z_0} \phi(z) = 0$. Zatem z_0 jest punktem pozornie osobliwym (zerem) funkcji ϕ. Wtedy istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\phi(z) = (z - z_0)^k \psi(z)$, gdzie $\psi(z) \neq 0$ dla $z \in U(z_0, \epsilon)$.

$$f(z) = \frac{1}{\phi(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{\psi(z)} \tag{11.1}$$

Funkcja $\psi(z) \neq 0$, stąd jej odwrotność $\frac{1}{\psi(z)}$ jest funkcją holomorficzną w $U(z_0, \epsilon)$, czyli daję się zapisać jako suma szeregu Taylora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$. Wstawiając go do (11.1) otrzymamy

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \frac{b_0}{(z - z_0)^k} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \frac{b_{k-1}}{z - z_0} + b_k + \ldots.$$

Tak otrzymaliśmy szereg Laurenta funkcji f, którego część główna składa się ze skończonej liczby wyrazów.

$\Leftarrow$ Niech f w $H(P(z_0, 0, R))$ rozwija się w szereg Laurenta postaci

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Niech $\phi(z) := (z-z_0)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \ldots$ w tym otoczeniu. Stąd $\lim_{z\to z_0}\phi(z) = c_{-k} \neq 0$, a następnie $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^k} = \infty$, czyli z_0 jest biegunem. $\square$

Uwaga 11.2
Punkt z_0 jest biegunem funkcji f wtedy i tylko wtedy gdy $\phi = \frac{1}{f(z)}$ jest holomorficzna w pewnym otoczeniu z_0 i $\phi(z_0) = 0$.

Uwaga 11.3
Rzędem bieguna z_0 funkcji f nazywamy krotność tego punktu jako zera funkcji $\phi = \frac{1}{f(z)}$.

Uwaga 11.4
Punkt z_0 jest biegunem k-krotnym funkcji f wtedy i tylko wtedy gdy
$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k-1}f(z) = \infty$ oraz $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) \neq \infty$.

Przykład 11.2

1. $f(z) = \frac{sinz}{z^4}$. Punkt $z_0 = 0$ jest biegunem trzykrotnym. Zauważmy, że
$$\lim_{z\to 0} z^2 \frac{sinz}{z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\frac{sinz}{z} = \infty \times 1 = \infty.$$
Natomiast
$$\lim_{z\to 0} z^3 \frac{sinz}{z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{z^3}{z^3}\frac{sinz}{z} = 1.$$

2. $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$
$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$- są to punkty osobliwe. Dla $k \neq 0$
$$\lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z}{e^z-1} = \infty,$$
czyli są to bieguny.
$$\lim_{z\to 2k\pi i}(z-2k\pi i)\frac{z}{e^z-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{2z-2k\pi i}{e^z} \neq \infty.$$
Zatem dla $k \neq 0$ punkty $z_k = 2k\pi i$ są biegunami jednokrotnymi. Dla $k = 0$ mamy, że $\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{1}{e^z} = 1 \neq 0$ punkt pozornie osobliwy.

Twierdzenie 11.3
Niech $f \in H(P(z_0,0,R))$. Punkt osobliwy izolowany z_0 jest punktem istotnie osobliwym wtedy i tylko wtedy, gdy część główna rozwinięcia f szereg Laurenta w $H(P(z_0,r,R))$ składa się z nieskończenie wielu wyrazów.

Dowód
Twierdzenie to jest wnioskiem z dwóch poprzednich twierdzeń. Jeśli część główna składa się z nieskończenie wielu wyrazów, to z_0 nie może być ani punktem pozornie osobliwym, ani biegunem. Jeśli z_0 jest punktem istotnie osobliwym, to część główna nie może znikać ani też nie może składać się ze skończenie wielu wyrazów różnych od zera. □

Przykład 11.3
Niech
$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$
Wiemy że dla $0 < |w| < \infty$ funkcja wykładnicza rozwija się w szereg Taylora o środku w $z_0 = 0$.
$$e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}.$$
Podstawmy za $w = \frac{1}{z}$. Otrzymamy
$$e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k k!} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$
Cześć główna składa się z nieskończenie wielu wyrazów, zatem $z_0 = 0$ jest punktem istotnie osobliwym.

Niech $z = re^{i\phi}$, r-małe. Wtedy
$$f(z) = e^{\frac{1}{re^{i\phi}}} = e^{\frac{1}{r}(cos\phi - isin\phi)} \quad |f(z)| = |e^{\frac{1}{r}cos\phi}||e^{\frac{1}{r}isin\phi)}| = e^{\frac{1}{r}cos\phi}.$$
Zauważmy, że dla ϕ takich, że $cos\phi > 0$
$$\lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}cos\phi} = +\infty,$$
zaś dla ϕ takich, że $cos\phi < 0$
$$\lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}cos\phi} = 0,$$
czyli nie istnieje granica modułu funkcji $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ gdy $z \to z_0$.

Twierdzenie 11.4 (Casoratiego-Weierstrassa)
Jeżeli z_0 jest punktem istotnie osobliwym funkcji, to zbiór wartości funkcji f w dowolnie małym nakłutym otoczeniu tego punktu jest rozmieszczony gęsto w całej płaszczyźnie.

Dowód Niech $U(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ będzie nakłutym otoczeniem z_0. Gdyby zbiór wartości funkcji $f(U(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\})$ nie był gęsty w $\mathbb{C}$, to wówczas istniałoby koło $D(a, r)$ nie zawierające żadnej wartości $f(z)$, więc $|f(z)-a|>r$ dla $z\in U(z_0,\epsilon)\setminus\{z_0\}$. Wtedy funkcja $\phi(z)=\frac{1}{f(z)-a}$ jest ograniczona dla $z\in U(z_0,\epsilon)\setminus\{z_0\}$. W myśl twierdzenia Riemanna punkt z_0 byłby punktem pozornie osobliwym dla $\phi(z)$. Zatem isniałaby granica $\lim_{z\to z_0}\phi(z)$. Zatem ϕ byłaby analityczna w otoczeniu z_0. Stąd $f(z)=a+\frac{1}{\phi(z)}$ byłaby analityczna lub miałaby biegun w z_0 wbrew założeniu. □

Twierdzenie 11.5 (wielkie twierdzenie Picarda)
Funkcja analityczna przyjmuje w dowolnie małym nakłutym otoczeniu punktu istotnie osobliwego każdą wartość z wyjątkiem co najwyżej jednej w nieskończenie wielu punktach.

Twierdzenie 11.6 (małe twierdzenie Picarda)
Funkcja całkowita różna od stałej przyjmuje każdą wartość z wyjątkiem co najwyżej jednej.

Przykład 11.4

1. $f(z)=e^z$ omija wartość $a=0$. Zauważmy, że jako funkcja całkowita omija też ∞. Zatem e^z omija dwie wartości $\{0,\infty\}$.

2. $f(z)=tg(z)$ nie jest funkcją całkowitą, bo ma bieguny w punktach $z_k=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, natomiast omija dwie wartości $\pm i$.

3. $f(z)=\frac{1}{cosz}$ omija tylko jedną wartosć 0.

4. funkcja $\mathcal{P}(z)$ Weierstrassa zdefiniowana za pomocą szeregu

$$\mathcal{P}(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-w_k)^2}-\frac{1}{w_k^2}\right]\quad w_k=n\omega+m\omega',\quad m,n\in\mathbb{Z},\quad \omega,\omega'\in\mathbb{C},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)\neq 0,$$

   przyjmuje każdą wartość z płaszczyzny domkniętej $\overline{\mathbb{C}}$ nieskończenie wiele razy. Funkcja $\mathcal{P}(z)$ Weierstrassa jest przykładem funkcji **meromorficznej dwuokresowej** o okresach: ω,ω'.

11.2 Zachowanie się funkcji holomorficznej w punkcie ∞

Niech $f(z)$ będzie funkcją holomorficzną w pierścieniu $P(0,r,\infty)=\{z:r<|z|<\infty\}$ (będącym nakłutym otoczeniem nieskończoności zwanym także pierścieniem o środku w ∞ czyli $P(\infty,0,r)$), gdzie $r>0$. Wówczas funkcja $f(\frac{1}{z})$ jest holomorficzna w otoczeniu nakłutym zera tzn. $P(0,0,\frac{1}{r})=\{z:0<|z|<\frac{1}{r}\}$.

Definicja 11.4
Powiemy, że $f(z)$ ma w nieskończoności:

1. *punkt regularny,*

2. *biegun rzędu m,*

3. *punkt istotnie osobliwy,*

zależnie od tego czy funkcja $f(\frac{1}{z})$ *ma w punkcie 0 osobliwośc usuwalną, biegun rzędu m lub lub punkt istotnie osobliwy.*

W $P(0, r, \infty) = \{z : r < |z| < \infty\}$ funkcja $f(z)$ jest sumą dwóch szeregów

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n},$$

z których pierwszy jest zbieżny dla $|z| < \infty$ a drugi dla $|z| > r$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ przedstawia część regularną funkcji zaś szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ przedstawia część główną funkcji f.

Funkcja $f(z)$ jest *ma osobliwość pozorną* w ∞, jeśli w $P(0, r, \infty) = \{z : r < |z| < \infty\}$ daje się przedstawić szeregiem postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$

zbieżnym w tym pierścieniu. Wówczas f ma granicę w $\lim_{z\to\infty} f(z) = a_0$. Granicę tę nazywamy wartością funkcji w ∞. Zapisujemy $f(\infty) = a_0$.
Punkt ∞ nazywamy *zerem* k-krotnym danej funkcji, gdy $a_0 = a_{-1} = \ldots = a_{-k+1} = 0$, lecz $a_{-k} \neq 0$.

Przykład 11.5

1. $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, ma w nieskończoności biegum rzędu n.

2. funkcja $f(z) = e^z$ ma w nieskończoności punkt istotnie osobliwy, bo cześć główna rozwinięcia $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów.

3. Niech $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Podstawmy do wzoru na e^w wyrażenie $w = \frac{1}{z}$. Otrzymamy

$$e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{}{z^k k!} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots$$

Zatem $z_0 = 0$ jest punktem istotnie osobliwym bo cześć główna składa się z nieskończenie wielu wyrazów. Natomiast punkt w nieskończoności jest punktem regularnym.

11.3 Klasyfikacja funkcji holomorficznych ze względu na ich punkty osobliwe

Klasyfikacja

1. Funkcje holomorficzne w $\mathbb{C}$ (czyli mające tylko osobliwość w nieskończoności) nazywamy funkcjami całkowitymi. Klasyfikacja funkcji całkowitych:

   a) jeśli $z = \infty$ jest biegunem, to f jest wielomianem.

   b) jeśli $z = \infty$ jest punktem istotnie osobliwym, to f nazywamy funkcją *całkowitą przestępną* np. e^z, $sinz$, $cosz$.

2. Funkcję holomorficzną w $\mathbb{C}$ poza punktami w których nie ma innych osobliwości niż bieguny nazywamy funkcją *meromorficzną* np. tgz, $ctgz$. Funkcję meromorficzną nazywamy *przestępną*, jeśli f nie przedłuża się na nieskończoność (tzn. f nie ma w nieskończoności ani osobliwości pozornej, ani ∞ nie jest biegunem.) Jeśli funkcja meromorficzna przestępna ma skończenie wiele biegunów, to ∞ jest punktem istotnie osobliwym, zaś gdy f ma nieskończenie wiele biegunów, to ∞ nazywamy punktem skupienia biegunów (∞ nie może być istotną osobliwością bo w $P(\infty, 0, r)$ funkcja f nie jest holomorficzna w biegunach należących do tego pierścienia.)

Twierdzenie 11.7
Jeżeli funkcja meromorficzna f ma w ∞ punkt pozornie osobliwy lub biegun (czyli f nie ma w $\bar{\mathbb{C}}$ innych osobliwości niż bieguny) to f jest funkcją wymierną.

Dowód
Ponieważ f ma w $\bar{\mathbb{C}}$ ma bieguny, to może ich mieć tylko skończenie wiele (w przeciwnym przypadku ze względu na zwartość $\bar{\mathbb{C}}$ bieguny musiałyby mieć punkt skupienia (a punkt skupienia biegunów nie może być ani punktem regularnym ani biegunem, bo w nakłutym otoczeniu tych punktów f jest holomorficzna a w biegunach f nie jest holomorficzna)). Niech punkty $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą biegunami f, niech

$$g_i(z) = \frac{a_{-n_i}}{(z - a_i)^{n_i}} + \dots \frac{a_{-1}}{(z - a_i)} \quad i = 1, \dots, n, \quad a_{-n_i} \neq 0$$

oznacza część główną rozwinięcia f w szereg Laurenta w $P(a_i, 0, \delta_i) = \{z : 0 < |z - a_i| < \delta_i\}$. Rozpatrujemy funkcję $g(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{n} g_i(z)$. Jest to funkcja holomorficzna w $\mathbb{C}$ bo usunęliśmy wszystkie części główne. Rozwinięcie funkcji holomorficznej $g(z)$ w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ w $P(0, 0, \infty)$ musi zawierać tylko skończenie wiele wyrazów, gdyż w przeciwnym przypadku nieskończoność byłaby punktem istotnie osobliwym. Stąd

$$(*) \quad g(z) = c_1 z + c_2 z^2 \dots c_k z^k, \quad c_k \neq 0.$$

Zatem

$$f(z) = g(z) + \sum_{i=1}^{n} g_i(z) \tag{11.2}$$

jest funkcją wymierną. Zauważmy, że (*) jest częscią główną bieguna funkcji f w $z_0 = \infty$. $\square$

Wniosek 11.1
Wzór (11.2) przedstawia rozkład funkcji wymiernej na część całkowitą $(c_0 + g(z))$ oraz ułamki proste $(\sum_{i=1}^{n} g_i(z))$.

12 Obliczanie całek za pomocą residuów

Definicja 12.1
Jeżeli $f \in H(P(z_0, 0, \delta))$,$K$ jest dowolnym konturem zawartym w pierścieniu i zawierającym w swym wnętrzu z_0, to liczbę

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K f(z)dz \tag{12.1}$$

nazywamy residuum funkcji w punkcie z_0 i oznaczamy $res_{z_0} f(z)$.

Wniosek 12.1
Jeżeli punkt z_0 jest punktem regularnym lub punktem pozornie osobliwym funkcji f, to $res_{z_0} f(z) = 0$

Wniosek 12.2

$$res_{z_0} f(z) = c_{-1},$$

gdzie c_{-1} jest współczynnikiem rozwnięcia f w szereg Laurenta w $P(z_0, 0, \delta)$.

Dowód
Ponieważ $f \in H(P(z_0, 0, \delta))$, to z twierdzenia Laurenta wynika, że f rozwinie się w szereg postaci $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Całkujemy następujące wyrażenie

$$\int_K f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_K (z - z_0)^n dz.$$

Ponieważ

$$\int_K (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1, \end{cases}$$

to

$$\int_K f(z)dz = c_{-1} 2\pi i.$$

Zatem $res_{z_0} f(z) = c_{-1}$. $\square$

Jeżeli punkt z_0 jest biegunem k-krotnym to

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

gdzie $c_{-k} \neq 0$. Wtedy residuum funkcji w punkcie z_0 liczymy ze wzoru

$$res_{z_0} f(z) = lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z) \right].$$

W szczególności dla $k = 1$

$$res_{z_0} f(z) = lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$

Przykład 12.1

1. Obliczyć $res_0 \frac{sinz}{z^3}$, $z_0 = 0$ biegun dwukrotny.

$$res_0 \frac{sinz}{z^3} = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \left(z^2 \frac{sinz}{z^3} \right)' = \lim_{z \to 0} \left(\frac{sinz}{z} \right)' = \lim_{z \to 0} \frac{(zcosz - sinz)'}{(z^2)'}$$
$$(H) = \lim_{z \to 0} \frac{-zsinz + cosz - cosz}{2z} = 0.$$

2. $res_0 \frac{sinz}{z^3}$ można policzyć także w inny sposób:

$$\frac{sinz}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \ldots, \quad |z| < \infty$$

   Ponieważ residuum jest równe współczynnikowi c_{-1}, stąd $res_0 \frac{sinz}{z^3} = 0$.

Uwaga 12.1
Residuum funkcji w punkcie istotnie osobliwym obliczamy rozwijając funkcję f w szereg Laurenta w otoczeniu nakłutym tego punktu.

Przykład 12.2
Dla funkcji $f(z) = cos\left(\frac{1}{z}\right)$ punkt $z_0 = 0$ jest punktem istotnie osobliwym. Rozwijamy funkcję w otoczeniu z_0 w szereg Laurenta.

$$cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \ldots.$$

Zatem $c_{-1} = 0 = res_0 f(z)$.

Twierdzenie 12.1 (Cauchy'ego o residuach (1825))
Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem jednospójnym, ∂D jest konturem. Jeżeli f jest holomorficzna w $\bar{D}$ poza wyjątkiem skończenie wielu punktów osobliwych izolowanych $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$, to

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z).$$

Dowód
Skorzystamy z twierdzenia całkowego Cauchy'ego dla obszarów wielospójnych.

W tym celu zdefinujmy dyski $D_k = \{z : |z - a_k| < r\}, k = 1, \dots, n$ gdzie r jest tak małe, aby ich domknięcia były parami rozłączne i zawarte w D. Zarówno brzeg ∂D jak i brzegi ∂D_k orientujemy dodatnio względem obszarów które one ograniczają. Niech $D_0 = D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} D_k$, wtedy $f \in H(D_0)$ i z twierdzenia całkowego Cauchy'ego dla obszarów wielospójnych dostaniemy

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D_k} f(z)dz.$$

Ponieważ $\int_{K_k} f(z)dz = 2\pi i res_{a_k} f(z)$ to zachodzi teza twierdzenia. □

Definicja 12.2
Niech funkcja f holomorficzna w $P(0, R, \infty) = \{z : R < |z| < \infty\}$ ma w nieskończoności punkt izolowany. Wtedy residuum $res_\infty f(z)$ definiujemy jako

$$res_\infty f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z)dz,$$

gdzie $K = \{z : |z| = R\}$ jest zorientowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara (czyli dodatnio wobec nieogranoczonej składowej $\bar{\mathbb{C}} \setminus K$).

Ponieważ f rozwija się w szereg Laurenta $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ w $P(0, R, \infty) = \{z : R < |z| < \infty\}$, to całkując ten szereg wyraz po wyrazie wzdłuż konturu K otrzymamy, że

$$res_\infty f(z) = -c_1.$$

Minus przed wyrazem c_1 bierze się stąd, że kontur K jest skierowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Twierdzenie 12.2 (o pełnej sumie residuów)
Jeżeli f jest holomorficzna w $\mathbb{C}$ z wyjątkiem punktów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to

$$\sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z) + res_{\infty} f(z) = 0.$$

Dowód
Niech $R > 0$ będzie tak duże, że kontur $K = \{z : |z| = R\}$ zawiera w swym wnętrzu punkty $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Z twierdzenia Cauchy'ego o residuach mamy, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z).$$

Przy dalszym zwiększaniu R lewa calka w powyższym wzorze nie zmieni się. Stąd dla dużych R będzie ona równa residuum f ze znakiem minus bo do liczenia resuduum w nieskończoności kontur K musi być zorientowany przeciwnie. I tak udowodniliśmy, że $\sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z) + res_{\infty} f(z) = 0$. □

Przykład 12.3 Obliczyć

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2}.$$

Funkcja podcałkowa ma 8 biegunów 2-krotnych. Skorzystamy z powyższego twierdzenia. Zatem

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2} = 2\pi i \sum_{k=1}^{8} res_{a_k} f(z) = -2\pi i res_{\infty} f(z).$$

Aby obliczyć residuum $f(z)$ w nieskończoności rozpatrujemy funkcję

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(\frac{1}{z^8}+1)^2} = \frac{z^{16}}{(z^8+1)^2}.$$

Wtedy punkt $z_0 = 0$ jest zerem 16-krotnym funkcji f (przez co rozumiemy zero funkcji $f(\frac{1}{z})$), stąd $f(\frac{1}{z}) = z^{16}\psi(z)$, $\psi(z)$ jest holomorficzna. Wynika stąd, że rozwinięcie $f(\frac{1}{z})$ w szereg Taylora w punkcie $z_0 = 0$ ma postać $f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+16}$. Zatem nie ma części głównej, więc $a_{-1} = 0$ i w konsekwencji

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2} = 0.$$

12.1 Zastowanie do obliczanie całek rzeczywistych

Wpropadzamy oznaczenia: Niech $R \in \mathbb{R}^+$, odcinek $[-R, R]$ będzie podzbiorem osi OX, $\Gamma_R = \{z : |z| = R,\ \mathrm{Im} z \geq 0\}$- półokrąg,

$$\Gamma := \Gamma_R \cup [-R, R].$$

Lemat 12.1 (Jordana)
Niech f będzie funkcją holomorficzną w $\{z : \mathrm{Im} z \geq 0\}$ z wyjątkiem skończonej ilości punktów, nieleżących na osi OX oraz $M(R) = \max_{\Gamma_R} |f(z)| \to 0$ dla $R \to \infty$. Wówczas dla dowolnego $\lambda > 0$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \to 0$$

dla $R \to \infty$.

Dowód Niech

$$\Gamma'_R = \{z : \ z = Re^{it},\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}.$$

$$\left| \int_{\Gamma'_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(Re^{it}) e^{i\lambda R(cost + isint)} iRe^{it} dt \right|. \tag{12.2}$$

Ponieważ $|e^{i\lambda iRcost}| = 1,\ |e^{it}| = 1$ oraz $|f(z)| \leq M(R)$, to wstawiając te oszacowania do (12.2) otrzymamy

$$\left| \int_{\Gamma'_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(R) R e^{-\lambda R sint} dt \leq M(R) R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R sint} dt \leq M(R) R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \frac{2}{\pi}} dt.$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że dla $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zachodzi nierówność $sint \geq \frac{2}{\pi} t$. Zatem

$$M(R) R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \frac{2}{\pi} t} dt = M(R) R \left(\frac{\pi}{2\lambda R} \right) \left[-e^{-\ R \frac{2}{\pi} t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = M(R) \frac{\pi}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda R}) \to 0$$

bo $M(R) \to 0$. Dowód w pozostałej ćwiartce jest analogiczny. □

Uwaga 12.2
M(R) może dążyć do zera tak wolno, że $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$ może nie dążyć do zera. Pomnożenie funkcji podcałkowej f przez $e^{i\lambda z}$ przyspiesza zbieżność całki.

Lemat 12.2
Niech f będzie funkcją holomorficzną w $\{z : \mathrm{Im} z \geq 0\}$ z wyjątkiem skończonej ilości punktów a_k, $k = 1, \dots, n$, nieleżących na osi OX. Ponadto zakładamy, że f jest rzeczywista na osi $0X$

oraz dla $|z| \geq r$ *spełnia warunek* $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}$, *gdzie* $\alpha > 1$, $M > 0$. *Wówczas całka z funkcji* $f(x)$ *istnieje i wyraża się wzorem*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z).$$

Niech $K := \Gamma_R \cup [-R, R]$ będzie tak duży, aby wszystkie punkty a_k, $k = 1, \ldots, n$ leżały wewnątrz K. Z twierdzenia Cauchy'ego o residuach wynika, że

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{a_k} f(z).$$

Stąd wynika teza twierdzenia , bo

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| \leq \frac{M}{R^\alpha}\pi R = \frac{\pi M}{R^{\alpha-1}},$$

gdzie $\alpha > 1$. □

Uwaga 12.3
Lematy 12.1 i 12.2 są także prawdziwe dla dolnej półpłaszczyzny.

Przykład 12.4

1. Obliczyć

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{coskx}{x^2 + a^2} dx, \quad k > 0, a > 0.$$

Jako funkcję zespoloną bierzemy $f(z) = \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}$, która ma bieguny w punktach $\pm ai$. Ponieważ do obszaru ograniczonego Γ należy tylko jeden biegun ai to z twierdzenia Cauchy'ego o liczeniu całek za pomocą residuów otrzymamy,

$$\int_\Gamma \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i res_{ai} \left(\frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} \right).$$

Policzymy residuum f w biegunie ai.

$$res_{ai} f(z) = \lim_{z \to ai} (z - ai) \frac{e^{ikz}}{(z - ai)(z + ai)} = \lim_{z \to ai} \frac{e^{ikz}}{(z + ai)} = \frac{e^{-ak}}{2ai},$$

czyli $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \frac{e^{-ak}}{2ai} = \frac{\pi}{ae^{ak}}$.

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx.$$

Dla $R \to \infty$ zachodzi, że $\left|\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}\right| \to 0$ (korzystamy z lematu Jordana) oraz

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{coskx}{x^2+a^2}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinkx}{x^2+a^2}dx.$$

Tak więc dostaniemy, że

$$\frac{\pi}{ae^{ak}} = \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{coskx}{x^2+a^2}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinkx}{x^2+a^2}dx.$$

Zatem

$$\frac{\pi}{ae^{ak}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{coskx}{x^2+a^2}dx.$$

2. Zastosowanie twierdzenia Cauchy'ego o liczeniu całek za pomocą residuów do całek postaci

$$\int_0^{2\pi} f(cos\phi, sin\phi)d\phi.$$

Wprowadzamy zmienną $z = e^{i\phi}, \phi \in [0, 2\pi]$. Wtedy

$$cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i},$$

$$\int_0^{2\pi} f(cos\phi, sin\phi)d\phi = \int_{|z|=1} f(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})\frac{dz}{iz}.$$

Zastosujemy to do obliczenia całki

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{5+4sin(\phi)} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{5+4\frac{z-z^{-1}}{2i}} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{5iz+2z(z-z^{-1})} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2+5iz-2}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{2(z+2i)(z+\frac{1}{2}i)} = 2\pi i res_{-\frac{1}{2}i}\frac{1}{2z^2+5iz-2} = 2\pi i \lim_{z\to -\frac{1}{2}i} \frac{dz}{2(z+2i)(z+\frac{1}{2}i)} = \frac{2\pi}{3}.$$

3. Wykazać, że

$$\int_0^{\infty} \frac{sinx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Niech $r < R$, $\gamma_r = \{z : \ z = re^{it}, \ t \in [0, \pi]\}$, $[-R, -r], [r, R]$ odcinki zawarte w osi OX. Tworzymy zamkniętą krzywą $\Gamma := \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \gamma_r \cup [r, R]$, którą orientujemy dodatnio względem obszaru D, który ona ogranicza.

Niech $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, wtedy $f \in H(D)$. Zatem z podstawowego tw. Cauchy'ego

$$0 = \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz. \qquad (12.3)$$

Dla $z \in \Gamma_R$ mamy
$$\left|\frac{e^{iz}}{z}\right| = \frac{|e^{i(x+iy)}|}{R} = \frac{|e^{ix}|e^{-y}}{R} = \frac{e^{-y}}{R} \to 0$$
dla $R \to \infty$, bo $y > 0$. Stąd
$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \to 0.$$
Dla $z \in \gamma_R$ mamy
$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} = \dots}{z} = \frac{1}{z} + i + \frac{-z}{2!} + \frac{- - iz^2}{3!} + \dots = \frac{1}{z} + g(z)$$
Stąd
$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_R} g(z) dz.$$
Policzymy kolejno całki. Dla $z \in \gamma_r$, $z = re^{it}, t \in [0, \pi]$
$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = -\int_0^{\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = -i\pi.$$
Na γ_r $|g(z)| \leq M$, zatem $\left|\int_{\gamma_r} g(z)dz\right| \leq M\pi r \to 0$ dla $r \to 0$. Stąd
$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i\pi + 0 = -i\pi. \tag{12.4}$$
Dla $R \to \infty$ i $r \to 0$
$$\left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx\right) \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$
Jeśli w całce $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx$ dokonamy podstawienia $x = -t$, to otrzymamy całkę $-\int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx$. Tak więc z (12.3) i (12.4) wynika, że dla $R \to \infty$ i $r \to 0$
$$0 = 0 + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi.$$
Zatem
$$i\pi = \int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{(e^{ix} - e^{-ix})2i}{x2i} dx = 2i \int_0^{\infty} \frac{sinx}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \frac{sinx}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

13 Geometryczna teoria funkcji zmiennej zespolonej

Definicja 13.1
Niech $z_0 \in \mathbb{C}$, Γ jest gładką krzywą, która nie przechodzi przez punkt z_0. Wartośc całki

$$I_\Gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}dz \tag{13.1}$$

nazywamy indeksem punktu z_0 względem krzywej Γ.

Lemat 13.1
Indeks punktu względem krzywej jest liczbą całkowitą.

Dowód Niech $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, będzie gładką funkcją opisującą krzywą Γ. Definiujemy funkcję

$$h(t) = \int_\alpha^t \frac{z'(t)dt}{z(t)-z_0} \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Jej pochodna wynosi $h'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)-z_0}$ dla $t \in [\alpha, \beta]$. Zatem pochodna funkcji $e^{-h(t)}[z(t)-z_0]$ jest równa

$$e^{-h(t)}\left(-h'(t)(z(t)-z_0)+z'(t)\right) =$$
$$e^{-h(t)}\left(-\frac{z'(t)}{z(t)-z_0}(z(t)-z_0)+z'(t)\right) = 0.$$

Stąd funkcja $e^{-h(t)}[z(t)-z_0]$ jest stała na przedziale $[\alpha, \beta]$ i i jej wartość jest równa wartości w punkcie $t = \alpha$. Uwzględniając $h(\alpha) = 0$ otrzymamy $e^{-h(t)}(z(t)-z_0) = e^{-h(\alpha)}(z(\alpha)-z_0) = z(\alpha)-z_0$. Wtedy $e^{h(t)} = \frac{z(t)-z_0}{z(\alpha)-z_0}$ oraz $e^{h(\beta)} = 1$ bo $z(\beta) = z(\alpha)$. Zatem $h(\beta)$ jest wielokrotnościa $2\pi i$ z czego wynika wzór (13.1). □

Definicja 13.2
Pochodną logarytmiczną funkcji meromorficznej f nazywamy funkcję postaci

$$\frac{dln(f(z)}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Definicja 13.3
Residuum logarytmicznym funkcji meromorficznej f w punkcie z_0 nazywamy residuum pochodnej logarytmicznej $\frac{dln(f(z))}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}$ w punkcie z_0.

Lemat 13.2
Jeżeli z_0 jest n-krotnym zerem funkcji f, to

$$res_{z_0}\frac{f'(z)}{f(z)} = n.$$

Dowód
Ponieważ z_0 jest n-krotnym zerem f to $f(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$, gdzie $\phi \in H(U(z_0, \epsilon))$ oraz $\phi(z_0) \neq 0$ dla $z \in U(z_0, \epsilon)$. Policzymy pochodną logarytmiczną funkcji f tzn.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z - z_0)^{n-1}\phi(z) + (z - z_0)^n \phi'(z)}{(z - z_0)^n \phi(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}.$$

Residuum funkcji $\frac{f'(z)}{f(z)}$ wynosi

$$res_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{n}{z - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = n.$$

Zauważmy, że $\int_{|z-z_0|=r} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = 0$ ponieważ $\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \in H(U(z_0, \epsilon))$. □

Lemat 13.3
Jeżeli z_0 jest n-krotnym biegunem funkcji f, to

$$res_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n.$$

Dowód
Jeśli z_0 jest n-krotnym biegunem funkcji f to z_0 jest n-krotnym zerem funkcji $\frac{1}{f}$. Ponieważ

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{d(-ln(f(z)))}{dz} = -\frac{dln(\frac{1}{f(z)})}{dz}.$$

Stąd

$$res_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n.$$

Twierdzenie 13.1
Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, zaś ∂D- konturem. Jeżeli funkcja f jest funkcją meromorficzną w $\overline{D}$ i f nie ma ani zer ani biegunów na ∂D, to

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

gdzie N oznacza sumę krotności wszystkich zer f w D, P-sumę krotności wszystkich biegunów f w D.

Dowód
Niech $a_k, k = 1, \ldots, l$, będą zerami funkcji f zaś $b_n, n = 1, \ldots, m$, biegunami f. Wtedy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{l} res_{a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{n=1}^{m} res_{b_n} \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P.$$

$\square$

Twierdzenie 13.2 (Zasada argumentu)
Niech $D \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, zaś ∂D- konturem. Jeżeli funkcja f jest funkcją meromorficzną w $\overline{D}$ i f nie ma ani zer ani biegunów na ∂D, to przyrost argumentu f podzielony przez 2π równa się róznicy między ilością zer a ilością biegunów funkcji w obszarze D czyli

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} arg f(z) = N - P.$$

Dowód
Niech $z(t)$, $t \in< \alpha, \beta >$ będzie gładką parametryzacją brzegu ∂D.

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(z(t))}{f(z(t))}z'(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dln(f(z))}{dt}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[ln(f(z(t)))\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2\pi i}\left(ln(f(z(\beta)) - ln(f(z(\alpha)))\right).$$

Ponieważ krzywa $z(t)$ parametryzująca ∂D jest zamknięta, to $f(z(\beta)) = f(z(\alpha))$. Stąd

$$ln(f(z(\beta)) - ln(f(z(\alpha)) = ln|f(z(\beta))| + iargf(z(\beta)) - ln|f(z(\alpha))| - iargf(z(\alpha))$$

$$i\Delta_{\partial D} arg f(z) := i(argf(z(\beta)) - argf(z(\alpha))$$

Stąd

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i} i\Delta_{\partial D} arg f(z).$$

$\square$

Uwaga 13.1
Wielkość $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} arg f(z)$ oznacza indeks zera względem krzywej $\Gamma(t) = f(z(t))$, gdzie $z(t) \in \partial D$.

Twierdzenie 13.3 (Rouché)
Jeżeli dwie funkcje f i g są analityczne w domknięciu obszaru $\bar{D}$ i spełniają na brzegu ∂D nierówność $|g(z)| < |f(z)|$, to funkcje f i $f + g$ mają w obszarze D taką samą ilość zer.

Dowód
Niech N_{f+g} oznacza ilość zer z uwzględnieniem krotności funkcji$f + g$. Ponieważ obie funkcje są holomorficzne, to nie mają biegunów. Z zasady argumentu wynika, że

$$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} arg(f(z) + g(z)) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} arg\left[f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} arg f(z) + \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Ponieważ $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ oraz wektor wodzący funkcji $1+\frac{g(z)}{f(z)}$ nie obiega zera, to $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$. Stąd i z faktu, że $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} arg f(z) = N_f$ dostaniemy

$$N_{f+g} = N_f.$$

□

Twierdzenie 13.4 (Bezout)
Każdy wielomian stopnia n ma w dziedzinie zespolonej dokładnie n zer.

Dowód
Niech

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0 = a_n z^n + g(z).$$

Niech $f(z) := a_n z^n$. Funkcja f ma dokładnie n zer (liczymy z krotnościami). Dla dostatecznie dużego R na okręgu $\{z : |z| = R\}$ zachodzi $|f(z)| > |g(z)|$ (bo stopień g jest nie większy niż $n-1$). Zatem z tw. Rouché $N_{f+g} = N_f$, stąd $N_{f+g} = n$. □

Przykład 13.1
Pokazać, że zera wielomianu $P(z) = z^8 - 4z^3 + 10$ leżą w pierścieniu $P(0,1,2) = \{z : 1 \le |z| < 2\}$. Wykażemy, że w kole $K(0,1)$ wielomian $P(z)$ nie ma pierwiastków. Niech $f(z) = 10$, $g(z) = z^8 - 4z^3$. Wtedy $|g(z)| \le 1 + 4 = 5 < 10 = |f(z)|$ na brzegu $K(0,1)$. Zatem z twierdzenia Rouché $N_P = N_{f+g} = N_f = 0$ czyli w $K(0,1)$ nie ma zer. Wykażemy, że w kole $K(0,2)$ wielomian $P(z)$ ma 8 pierwiastków. Niech $f(z) = z^8$, $g(z) = 10 - 4z^3$. Wtedy na brzegu $K(0,2)$ mamy $|g(z)| \le 10 + 4 \times 2^3 = 42 < 256 = 2^8 = |f(z)|$. Zatem z twierdzenia Rouché $N_{f+g} = N_f = 8$ czyli w $K(0,2)$ mamy 8 pierwiastków. Ostatecznie dostajemy, że wszystkie zera wielomianu $P(z)$ leżą w $K(0,2) \setminus K(0,1)$.

Twierdzenie 13.5 (zasada zachowania obszaru)
Jeżeli $D \subset \mathbb{C}$ jest obszarem oraz $f \in H(D)$, $f \neq const$, to obraz $f(D)$ też jest obszarem.

Dowód
Należy udowodnić, że $f(D)$ jest spójny i otwarty. Ze stwierdzenia 1.1 wynika, że dla zbiorów otwartych w $\mathbb{C}$ spójność i łukowa spójność są pojęciami równoważnymi. Najpierw udowodnimy, że $f(D)$ jest spójny. Niech w_1, w_2 oznaczają dwa dowolne punkty ze zbioru $f(D)$. Niech z_1, z_2 oznaczają ich przeciwobrazy należące do D. Ponieważ D jest łukowo spójny, to istnieje droga γ łącząca punkty z_1, z_2 zawarta w D. Jej obraz jest drogą zawartą w $f(D)$ łączącą punkty w_1, w_2. Zatem $f(D)$ jest zbiorem łukowo spójnym, zatem spójnym. Udowodnimy, że $f(D)$ jest otwarty. Niech $w_0 \in D$, zaś z_0 niech będzie jego przeciwobrazem w

D. Ponieważ D jest otwarty to istnieje $D(z_0, r) \subset D$. Zmniejszając ewentualnie r można założyć, że $\overline{D(z_0, r)}$ nie zawiera innych przeciwobrazów w_0. Niech γ_r oznacza brzeg $D(z_0, r)$ tzn. $\gamma_r = \{z : |z - z_0| = r\}$, $\mu := \min_{z \in \gamma_r} |f(z) - w_0|$. Zauważmy, że $\mu > 0$ bo w przeciwnym przypadku istniałby na γ_r punkt będący przeciwobrazem w_0, wbrew naszemu założeniu. Pokażemy, że $D(w_0, \mu) = \{w : |w - w_0| < \mu\} \subset f(D)$. Niech $w_1 \in D(w_0, \mu)$. Definiujemy funkcje $\tilde{f}(z) := f(z) - w_0$ oraz $\tilde{g}(z) := w_0 - w_1$ dla $z \in D(z_0, r)$. Ponieważ $|\tilde{g}(z)| = |w_0 - w_1| < \mu$ na γ_r oraz $|\tilde{f}(z)| = |f(z) - w_0| > \mu$ na γ_r. Zatem z twiedzenia Rouché wynika, że funkcja $f(z) - w_1 := f(z) - w_0 + (w_0 - w_1) = \tilde{g}(z) + \tilde{f}(z)$ ma w $D(z_0, r)$ tyle samo zer ile ma ich funkcja $\tilde{f}(z) = f(z) - w_0$, tzn. ma co najmniej jedno zero. Zatem funkcja f w $D(z_0, r)$ przyjmuje wartość w_1. Lecz w_1 był dowolnym punktem z $D(w_0, \mu)$, stąd cały dysk zawiera się w $f(D)$. Zatem $f(D)$ jest otwarty. □

Twierdzenie 13.6 (zasada maksimum)
Moduł funkcji analitycznej $f(z)$, różnej od stałej w obszarze D, nie osiąga maksimum w żadnym punkcie wewnętrznym tego obszaru.

Dowód
1. Najpierw pokażemy, jeżeli moduł funkcji analitycznej jest stały w pewnym obszarze, to funkcja jest stała. Niech $|f(z)| = |u + iv| = c$, gdzie c jest stałą, to $|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = c^2$. Skąd po zróżniczkowaniu otrzymamy.

$$2uu'_x + 2vv'_x = 0, \quad 2uu'_y + 2vv'_y = 0.$$

Na mocy równań Cauchy'ego-Riemanna

$$uu'_x - vu'_y = 0, \quad uu'_y + vu'_x = 0.$$

Rugując u'_y otrzymamy $(u^2 + v^2)u'_x = c^2 u'_x = 0$, więc $u'_x = 0$ jeżeli $c \neq 0$. Podobnie można pokazać, że pochodne u'_y, v'_x, u'_y są równe zeru w całym obszarze. Stąd funkcje u, v są stałe i dlatego f też jest stała. Jeżeli $c = 0$, to oczywiście $f(z)$ jest funkcją tożsamościowo równą zeru.

2. Jeżeli $f \neq const$, to na mocy twierdzenia o zachowaniu obszaru każdy obszar jest przekształcany na obszar. Przypuśmy, że $|f|$ ma lokalne maksimum w punkcie$z_0 \in D$ tzn. istnieje $U(z_0, \epsilon) \subset D$ takie, że dla każdego $z \in U(z_0, \epsilon)$, $|f(z)| \leq |f(z_0)|$. Ponieważ $f(U(z_0, \epsilon))$ jest obszarem, więc znajdziemy punkt $z_1 \in f(U(z_0, \epsilon))$ taki, że $|z_1| > |f(z_0)|$. Ale $z_1 \in f(U(z_0, \epsilon))$ to istnieje $z_2 \in U(z_0, \epsilon)$ taki, że $z_1 = f(z_2)$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. □

Wniosek 13.1
Jeżeli $f \in H(D)$, $f \in C(\bar{D})$, to $|f|$ osiąga maksimum na brzegu D.

Uwaga 13.2
Dla $\min|f|$ powyźszy wniosek nie jest prawdziwy. Np. dla $f(z) = z$ moduł $|z|$ ma minimum w $z_0 = 0 \in D(0,1)$.

Twierdzenie 13.7 (zasada minimum)
Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze D i nie zeruje się w nim, to $|f|$ może osiągać minimum lokalne wewnątrz D tylko w przypadku, gdy $f = const$.

Dowód
Wystarczy w tym celu zastosować zasadę maksimum do funkcji $\frac{1}{f}$, która jest holomorficzna w D, bo $f(z) \neq 0$ dla $z \in D$. □

Twierdzenie 13.8 (Lemat Schwarza)
Jeżeli funkcja $f \in H(D(0,1))$, $f \in C(\overline{D(0,1)})$ $f : D(0,1) \to D(0,1)$ oraz $f(0) = 0$, to

$$\forall z \in D(0,1) \quad |f(z)| \leq |z|.$$

Jeżeli równość jest osiągana choćby w jednym punkcie $z \neq 0$, to $f(z) = e^{i\phi}z$, $\phi \in [0, 2\pi)$.

Dowód Rozpatrzmy funkcję $\psi(z) := \frac{f(z)}{z}$. Z założenia, że $f(0) = 0$ wynika, że jest ona holomorficzna w $D(0,1)$. Z zasady maksimum wynika, że funkcja $|\psi(z)|$ osiąga maksimum na brzegu $D(0,r), r < 1$. Lecz na brzegu $\partial D(0,r)$ mamy

$$|\psi(z)| \leq \frac{1}{r}. \tag{13.2}$$

Dla z dążących do brzegu $\partial D(0,1)$ mamy, że $r \to 1$, zatem z (13.2) wynika, że $|f(z)| \leq |z|$ dla $z \in \partial D(0,r)$. Ponieważ dowolny punkt z $D(0,1)$ należy do pewnego $D(0,r), r < 1$, zatem nierówność $|f(z)| \leq |z|$ została udowodniona. Jeśli w dowolnym punkcie $z_0 \in D(0,1)$ mamy znak równości, to $|\psi|$ osiąga w tym punkcie maksymalną wartość równą 1. Wówczas ψ jest funkcją stalą, której moduł jest oczywiście równy 1. Stąd $\psi(z) = e^{i\phi}$ i w konsekwencji $f(z) = ze^{i\phi}$. □

14 Przedłużenia analityczne

Definicja 14.1
Niech $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ będa obszarami, $f_1 \in H(D_1), f_2 \in H(D_2)$. Załóżmy, $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Niech $\Delta = D_1 \cap D_2$. Jeśli dla każdego $z \in \Delta, f_1(z) = f_2(z)$, wówczas każda z funkcji jest przedłużeniem analitycznym drugiej.

Przykład 14.1
Dane są trzy szeregi potęgowe

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n, \quad f_2(z) = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(1+iz)^n, \quad f_3(z) = \frac{1}{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z+1-i}{i-1}\right)^n$$

zbieżne odpowiednio w dyskach $D(0,1), D(i,1), D(-1+i,\sqrt{2})$. Dyski te mają części wspólne. Ponadto $f_1(z) = \frac{1}{z}$ dla $z \in D(1,1)$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$ dla $z \in D(i,1)$, $f_3(z) = \frac{1}{z}$ dla $z \in D(-1+i,\sqrt{2})$.

$$f_1(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{i+(z-i)} = \frac{1}{i\left(1+\left(\frac{z-i}{i}\right)\right)} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{i}\right)^n = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i-z}{i}\right)^n = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(1+iz)^n$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z-(-1+i)+(i-1)} = \frac{1}{(i-1)\left(1+\left(\frac{z+1-i}{i-1}\right)\right)} = \frac{1}{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z+1-i}{i-1}\right)^n,$$

czyli f_1 jest analitycznym przedłużeniem f_2, f_3 jest analitycznym przedłużeniem f_2.

Przedłużenie analityczne daję się w naturalny sposób uogólnić na skończony ciąg funkcji.

Definicja 14.2
$D_i \subset \mathbb{C}$, D_i-obszar, $i = 1,\ldots,n$, $\Delta_i := D_i \cap D_{i+1}$. Niech $f_i \in H(D_i)$ oraz f_{i+1} jest analitycznym przedłużeniem f_i. Wtedy f_n nazywamy analitycznym przedłużeniem pośrednim funkcji f_1.

Możliwe są dwa przypadki:

1. W części wspólnej każdych dwóch obszarów D_i, D_k funkcje f_i i f_k są identyczne. Wówczas ciąg funkcji $f_1,\ldots,f_n$ określa w obszarze $D_1\cup\ldots\cup D_n$ jedną funkcję analityczną f, która w obszarze D_k jest identyczna z funkcja f_k.

2. W części wspólnej obszarów D_i, D_k funkcje f_i i f_k nie są identyczne. Wtedy ciąg funkcji $f_1,\ldots,f_n$ nie określa funkcji w obszarze $D_1\cup\ldots\cup D_n$ w dotychczasowym znaczeniu. Mówimy wtedy, że funkcje $f_1,\ldots,f_n$ są gałęziami jednej funkcji analitycznej wieloznacznej, która w obszarze D_k jest identyczna z f_k.

Przykład 14.2
Niech $f(z) = ln|z| + i\phi, \quad \phi = arg(z)$. Zdefiniujemy obszary

$$R_1 = \{z : 0 \le \phi \le \pi\}, \quad R_2 = \{z : \frac{3}{4}\pi \le \phi \le \frac{7}{4}\pi\}, \quad R_3 = \{z : \frac{3}{2}\pi \le \phi \le \frac{5}{2}\pi\}.$$

Wtedy $f_1 \neq f_3$ w części wspólnej $R_1 \cap R_3$.

Definicja 14.3
Niech $D \subset \mathbb{C}$, D-obszar, $f \in H(D)$. Funkcja f przedłuża się przez punkt brzegowy z_0 obszaru D jeśli istnieje funkcja holomorficzna $g \in H(D(z_0, r))$, która jest równa f w pewnym obszarze $\Delta = D \cap D(z_0, r)$.

Jeśli w z_0 nie jest punktem przedłużalności, to nazywamy go punktem osobliwym f, a jeśli jest punktem przedłużalności, to nazywamy go punktem regularnym

Twierdzenie 14.1
Każdy szereg potęgowy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, różny od stałej ma na okręgu swego koła zbieżności $K = \{z : |z - z_0| = r\}$ przynajmniej jeden punkt osobliwy.

Dowód
Gdyby każdy punkt okręgu K był regularny, to dla każdego $z \in K$ istniałby szereg potęgowy zbieżny w dysku $D(z, \epsilon(z))$ równy w części wspólnej funkcji $f(z)$. Częśc wspólna koła zbieżności i dysków $D(z, \epsilon(z))$ daje większe koło zbieżności K' o promieniu $r' > r$, gdzie f jest analityczna. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Przykład 14.3
Podamy przykład szeregu potegowego, dla którego każdy punkt z brzegu koła zbieżności jest osobliwy.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

jest zbieżny w kole $|z| < 1$. Niech $z = re^{\frac{k\pi i}{2^p}}$, gdzie $r < 1, k, p = 1, 2, \dots$,

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} e^{2^{n-p}k\pi i} \right| \geq \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} r^{2^n} e^{2^{n-p}k\pi i} \right| - \left| \sum_{n=0}^{p} r^{2^n} e^{2^{n-p}k\pi i} \right| \geq \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} - (p+1)$$

Dla $r \to 1$ mamy $|f(z)| \to \infty$ bo $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} \to \infty$. Wynika stąd , że wszystkie punkty postaci $z = e^{\frac{k\pi i}{2^p}}$ są osobliwe, bo w punkcie regularnym istnieje granica funkcji $f(z)$. Ponieważ takie punkty są gęste w okręgu jednostkowym, stąd wszystkie punkty z okregu są osobliwe, bo dostatecznie małe otoczenie punktu regularnego składa się wyłącznie z punktów regularnych.

Pytanie
Jak zbadać czy funkcja analityczna $f(z)$ jest przedłużalna poprzez brzeg swego obszaru istnienia?

Służy do tego następująca metoda. Niech $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, gdzie $z_0 \in D$ będzie szeregiem Taylora naszej funkcji. Jest on zbieżny w kole $D(z_0, r)$. Niech A będzie najbliższym punktem brzegowym obszaru D. Obierzmy wewnątrz odcinka $\overline{z_0 A}$ dowolny punkt z_1. Szereg Taylora w otoczeniu punktu z_1 ma postać $P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_1)^n$, który jest zbieżny w kole $D(z_1, r_1)$. Promień r_1 jest mniejszy niż odległość punktu A od z_0, czyli $r_1 = |A - z_1| = r - |z_0 - z_1|$. W części wspólnej oba szeregi pokrywają się.

Definicja 14.4
Przejście od szeregu $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ do szeregu $P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_1)^n$ nazywamy przeprowadzeniem szeregu $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ do punktu z_1.

Funkcja $f(z)$ jest przedłużalna przez punkt A wtedy i tylko wtedy gdy $r_1 > |\overline{z_1 A}|$, bo na okręgu $\{z : |z - z_1| = r_1\}$ leży tylko jeden punkt brzegowy A zbioru D.

Definicja 14.5
Mówimy, że szereg P jest przedłużalny wzdłuż krzywej Γ opisanej funkcja $z(t), t \in <\alpha, \beta>$, jeżeli każdy punkt $z(t) \in \Gamma$ jest środkiem pewnego szeregu potęgowego $P_t, t \in <\alpha, \beta>$, o dodatnim promieniu zbieżności. Przy czym szeregi tej rodziny spełniają warunki:

1. *$P_\alpha = P(z)$,*
2. *każde dwa szeregi P_{t_1}, P_{t_2} sa identyczne w części wspólnej swych kół zbieżności jeśli t_1, t_2 są dostatecznie blisko.*

Rodzinę szeregów postaci $P_t, t \in <\alpha, \beta>$ nazywamy łańcuchem szregów potęgowych łączących elementy P_α i P_β. Szereg P_β nazywamy przedłużeniem szeregu P_α wzdłuż Γ.

Stwierdzenie 14.1
Każdy szereg potęgowy wzdłuż krzywej wychodzącej z jego środka ma co najwyżej jedno przedłużenie.

Dowód
Gdyby szereg $P_t, t \in <\alpha, \beta>$ miał wzdłuż krzywej Γ dwa przedłużenia, to obok łańcucha $P_t, t \in <\alpha, \beta>$ istniałby drugi łańcuch $Q_t, t \in <\alpha, \beta>$ o tym samym początku $P_\alpha = P(z) = Q_\alpha$ i o różnych końcacha $P_\beta \neq Q_\beta$. Niech t_0 będzie kresem górnym takich liczb, że $P_t = Q_t$ dla $\alpha \leq t \leq t_0$. Wtedy w dowolnie małym otoczeniu $z(t_0)$ istniałyby dwie takie wartośći t i t' takie, że $P_t = Q_t$ oraz $P'_t \neq Q_{t'}$, co nie jest możliwe na mocy własności drugiej łańcucha. $\square$

Uwaga 14.1
Funkcję $f(z)$ można w obszarze D wytworzyć z jednego jej elementu przez przedłużenie w obszarze D.

Definicja 14.6
Funkcję $f \in H(D)$ nazywamy dowolnie przedłużalną w D jeżeli każdy jej element daje się przedłużyć analitycznie po każedej krzywej zawartej w D.

Twierdzenie 14.2 (zasada monodromii)
Funkcja analityczna dowolnie przedłużalna w obszarze jednospójnym D jest w tym obszarze jednoznaczna.

Powyższe twierdzenie można uogólnić.

Twierdzenie 14.3
Każdy element $P(z)$ funkcji analitycznej dowolnie przedłużalnej w obszarze D ma to samo przedłużenie wzdłuż dowolnych dwóch krzywych homotopijnych względem D.

Uwaga 14.2
Z zasady monodromii wynika, że gdy pewien element $P(z)$ funkcji analitycznej $f(z)$ jest przedłużalny wzdłuż zamkniętej Γ i po przedłużeniu element końcowy jest różny od $P(z)$, to wewnątrz Γ funkcja $f(z)$ musi mieć przynajmniej jeden punkt osobliwy. Jeśli istnieje taki punkt to nazywamy go punktem rozgałęzienia danej funkcji (f).

15 Rodziny normalne funkcji

Twierdzenia 15.1 (Weierstrassa)
$D \subset \mathbb{C}$ obszar, $f_n \in H(D), n \in \mathbb{N}$. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny niemal jednostajnie w D to:

1. *suma $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest funkcją holomorficzną w D,*
2. *dla $\forall k \in \mathbb{N}$ szereg k-tych pochodnych jest też niemal jednostajnie zbieżny w D, przy czym*
$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Dowód
1. Niech K będzie zwartym podzbiorem D. Mozemy założyć, że $K = \overline{D(z_0, r)}$. Wtedy brzeg ∂K jest krzywą zamkniętą, którą oznaczymy przez Γ. Ponieważ funkcje $f_n, n = 1, 2, \dots$ są ciągłe na K a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na K, to suma szeregu f jest funkcją ciągła na K. Ponadto zachodzi następująca własność:

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ funkcji ciągłych na Γ jest zbieżny jednostajnie, to

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz. \tag{15.1}$$

Niech $r_n = \int_\Gamma f dz - \sum_{k=1}^{n} \int_\Gamma f_k = \int_\Gamma \left(f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right) dz$. Ponieważ szereg jest zbieżny niemal jednostajnie, to $|f - \sum_{n=1}^{\infty} f_n| < \epsilon$, gdy n jest dostatecznie duże. Wtedy

$$\left| \int_\Gamma f dz - \int_\Gamma \sum_{k=1}^{n} f_k dz \right| < \int_\Gamma |\epsilon dz| = \epsilon|\Gamma|.$$

Gdy $n \to \infty$, to $\epsilon \to 0$, skąd wynika (15.1).

2. Z twierdzenia podstawowego Cauchy'ego wynika, że dla każdego n, $\int_\Gamma f_n dz = 0$ (spełnione są założenia, bo $f_n \in H(D(z_0, r))$ oraz $\overline{D(z_0, r)}$ jest jednospójny). Zatem całka po lewej stronie (15.1) wynosi zero. Z twiedzenia Morery zaś wynika, że f jest holomorficzna na $D(z_0, r)$. Ponieważ zbiór D możemy pokryć takimi dyskami, to $f \in H(D)$ czyli zachodzi własność (1) z tezy tw. Weierstrassa.

3. Zorientujemy Γ dodatnio względem D. Pomnóżmy obie strony równości

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta)$$

przez $\frac{k!}{2\pi i(\zeta - z_0)^{k+1}}$ i scałkujemy po ζ po okregu Γ. Wtedy otrzymamy równość

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta. \tag{15.2}$$

Z twierdzenia o uogólnionym wzorze całkowym Cauchy'ego wynika, że $\frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = f^{(k)}(z_0)$ oraz $\frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = f_n^{(k)}(z_0)$. Zatem (15.2) oznacza, że zachodzi równośc z punktu (2) z tezy tw. Weierstrassa.

4. Teraz wykażemy, że szereg pochodnych $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ jest zbieżny niemal jednostajnie. Niech K_1 oznacza koło o środku w z_0 i promieniu $r' = \frac{r}{2}$. Wtedy dla $\zeta \in \Gamma$ i $z \in K_1$ mamy, że $|\zeta - z| \geq r'$. Z założenia szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na K zatem

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} f_n(z) \right| < \epsilon \tag{15.3}$$

dla $p = 1, 2, \ldots$ i $n > N(\epsilon)$. Zastosujemy (15.3) do oszacowania szeregu pochodnych tzn.

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} f_n^{(k)}(z)\right| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta\right| \leq \frac{k!}{2\pi}\frac{\epsilon}{(r')^{k+1}} 4\pi r'.$$

Stąd moduły $|\sum_{n=m+1}^{m+p} f_n^{(k)}(z)|$ są dowolnie małe, gdy n jest dostatecznie duże. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ jest jednostajnie zbieżny w kole K_1. Ponieważ dowolny zwarty podzbiór K zawarty w D można pokryć skończoną ilością dysków, to otrzymamy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny niemal jednostajnie w D. □

Twierdzenie 15.2 (Hurwitza)
$D \subset \mathbb{C}$ obszar, $K \subset D$ zwarty, $f_n \in H(D), n \in \mathbb{N}$. Jeżeli ciąg $f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na K do funkcji $f \neq const.$ Wówczas jeśli $f(z_0) = 0$, to w dowolnym kole $D(z_0, r) \subset D$ wszystkie funkcje f_n poczynając od pewnego n także zerują się.

Dowód
Z twierdzenia 15.1 (Weiestrassa) wynika, że funkcja f jest holomorficzna w D. Ponieważ zera funkcji holomorficznej są izolowane, zatem istnieje koło $\overline{D(z_0, r)} \subset D$, na którym $f(z) \neq 0$. Niech $K = \partial D(z_0, r)$ oraz $\mu := \min_{z\in K} |f(z)|$. Wtedy $\mu > 0$. Ponieważ ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostjnie na K, więc istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|f_n(z) - f(z)| < \mu$$

dla wszystkich $z \in K$ i dla $n > N$. Z twierdzenia Rouché wynika, że dla takich n funkcja $f_n = f + (f - f_n)$ ma wewnątrz K tyle zer, ile ma f, tzn. co najmniej jedno. □

Wniosek 15.1
$D \subset \mathbb{C}$ obszar, $f_n \in H(D), n \in \mathbb{N}$ oraz różnowartościowe. Jeżeli ciąg $f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na dowolnym zbiorze zwartym $K \subset D$, to funkcja graniczna jest różnowartościowa lub stała.

Twierdzenie 15.3 (Rungego)
$D \subset \mathbb{C}$ obszar jednospójny, $f \in H(D)$, $K \subset D$ zwarty. Wówczas dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian P taki, że

$$\sup_{z\in K} |f(z) - P(z)| < \varepsilon.$$

Definicja 15.1
Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji ciągłych w obszarze D o wartościach w $\mathbb{C}$ (rodzina może być nieprzeliczalna). Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest rodziną normalną w D, jeżeli z każdego ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z

tej rodziny można wybrać podciąg niemal jednostajnie zbieżny w D do funkcji skończonej lub nieskończoności.

Definicja rodzin normalnych pochodzi od P. Montela.

Definicja 15.2
Mówimy, że funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ są wspólnie ograniczone w obszarze D $\iff$

$$\forall K \subset D,\ K - zwarty \quad \exists M(K) > 0 \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \forall z \in K \quad |f(z)| \leq M(K).$$

Twierdzenie 15.4
Jeżeli rodzina $\mathcal{F} \subset H(D)$ jest wspólnie ograniczona w obszarze D, to rodzina pochodnych tych funkcji jest także wspólnie ograniczona.

Dowód
Niech $U = \{z : |z - z_0| < r\} \subset V = \{z : |z - z_0| < r'\} \subset D$. Z twierdzenia o wzorze całkowym wynika, że dla

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall z \in V \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

gdzie ∂V jest zorientowany dodatnio. Dla $z \in U$ i $\zeta \in \partial V$ mamy, że $|\zeta - z| > r' - r$ oraz

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{(r' - r)^2} 2\pi r' = \frac{Mr'}{(r' - r)^2} = M(U).$$

Z twierdzenia Borela wynika, że dowolny zbiór zwarty można pokryć skończoną ilością kół zawartych w D. Niech $\{U_i : i = 1, \ldots, k\}$ będzie skończonym pokryciem K oraz $M(K) = \sup_{1 \leq i \leq k} M(U_i)$. Wtedy

$$\forall K \subset D,\ K - zwarty \quad \forall z \in K \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad |f'(z)| \leq M(K)$$

czyli pochodne tej rodziny są wspólnie ograniczone. □

Definicja 15.3
Rodzina funkcji $\mathcal{F}$, określonych w D jest jednakowo ciągła, jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall K \subset D,\ K - zwarty \quad \exists \delta(\epsilon, K) > 0 \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \forall z, z' \in D \quad |z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \epsilon.$$

Twierdzenie 15.5
Jeżeli rodzina $\mathcal{F} \subset H(D)$ jest wspólnie ograniczona, to jest ona rodziną funkcji jednakowo ciągłych.

Dowód
Niech K będzie zwartym podzbiorem D, $2\rho := \inf_{z\in\partial D, \zeta\in\partial K} |z-\zeta|$. Przez K_ρ oznaczmy ρ-otoczenie K tzn.

$$K_\rho = \bigcup_{z\in K} \{z : |z-z_0| < \rho\}.$$

Wtedy $\overline{K_\rho} \subset D$ oraz z założenia, że $\mathcal{F}$ ograniczona wynika z poprzedniego twierdzenia, że

$$\forall z \in K_\rho \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad |f'(z)| \leq M.$$

Niech $z, z' \in K_\rho$ będą dowolnymi punktami takimi, że $|z-z'| < \rho$. Wtedy odcinek $< z, z' >$ łączący z i z' jest zawarty w K_ρ. Stąd

$$|f(z) - f(z')| = \left| \int_{<z,z'>} f'(z)dz \right| \leq M(K)|z-z'| \leq M(K)\rho.$$

Zatem

$$\forall \epsilon \quad \forall K \subset D, \qquad \exists \delta = \min\left\{\rho, \frac{\epsilon}{M(K)}\right\} \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \forall z, z' \in D \quad |z-z'| < \delta \quad \Rightarrow |f(z)-f(z')| < \epsilon$$

co dowodzi jednakowej ciągłości funkcji $f \in \mathcal{F}$. □

Twierdzenie 15.6 (Montela)
Rodzina $\mathcal{F} \subset H(D)$ funkcji wspólnie ograniczonych w D jest rodziną normalną.

Dowód
1 Wykażemy najpierw, że jeśli ciąg funkcji $(f_n) \subset \mathcal{F}$ jest zbieżny w każdym punkcie pewnego zbioru zbioru $E \subset$ gęstego w D, to jest on jednostajnie zbieżny na każdym zwartym podzbiorze $K \subset D$. Ustalmy ϵ i zbiór zwarty $K \subset D$. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że rodzina $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła. Korzystając z niej wybierzmy podział obszaru D na kwadraty z bokami równoległymi do osi współrzędnych tak drobny, aby dla dowolnych punktów $z', z'' \in K$ należących do jednego kwadratu i dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}$ zachodziła nierówność

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{15.4}$$

Zbiór K pokryty jest skończoną liczbą takich kwadratów $\{O_p : p = 1, \ldots, P\}$. Ponieważ zbiór E jest gęsty w D, więc w każdym Q_p można znaleźć $z_p \in E$. Z założenia, że ciąg (f_n) jest zbieżny na E wynika, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dla $m, n > N$ i wszystkich z_p, $p = 1, \ldots, P$,

$$|f_m(z_p) - f_n(z_p)| < \frac{1}{3}\epsilon. \tag{15.5}$$

Niech teraz z będzie dowolnym punktem zbioru K. Istnieje $p \in \{1, \ldots, P\}$, istnieje kwadrat Q_p taki, że $z \in Q_p$ oraz istnieje punkt $z_p \in Q_p$ taki, że dla wszystkich $m, n > N$ korzystając z (15.4) i (15.5) otrzymamy, że

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f_m(z_p)| + |f_m(z_p) - f_n(z_p)| + |f_n(z_p) - f_n(z)| < \epsilon. \tag{15.6}$$

A to oznacza, że (f_n) jest zbieżny jednostajnie na K.

2. Wykażemy teraz, że z dowolnego ciągu (f_n) można wyjąć podciąg zbieżny w każdym punkcie pewnego zbioru $E \subset D$ gęstego w D. Niech E będzie zbiorem tych punktów $z = x+iy \in D$, których obie współrzędne są wymierne. Oczywiście E będzie przeliczalnym i gęstym podzbiorem w D. Ponieważ zbiór E jest przeliczalny, to można ustawić jego elementy w ciąg $a_n, n \in \mathbb{N}$. Rozważmy ciąg liczbowy $(f_n(a_1))$- jest on ograniczony, więc można z niego wybrać podciąg zbieżny (f_{n_1}). Niech (f_{1n}) ozncza podciąg zbieżny w punkcie a_1. Następnie rozpatrujemy ciag $(f_{1n}))_{n\in\mathbb{N}}$ brany w punkcie a_2. Ponieważ jest ograniczony, więc można z niego wybrać podciąg zbieżny, który oznaczymy (f_{2n}). Ciąg (f_{n2}) jest zbieżny w co najmniej w dwóch punktach a_1, a_2. Analogiczną konstrukcję można przedłużac nieograniczenie. Analogicznie postępując dostaniemy podciągi:

$$\begin{array}{ll} f_{11} f_{12} & f_{13} \cdots \\ f_{21} f_{22} & f_{23} \cdots \\ f_{31} f_{32} & f_{33} \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Metodą przekątniową wybieramy podciąg $(f_{11}, f_{22}, f_{33}, \ldots)$. Ciąg ten jest zbieżny w dowolnym $a_p \in E$, ponieważ jego wyrazy począwszy od p-tego są wybrane z ciągu f_{n_p} zbieżnego w a_p. Zatem ciąg (f_{nn}) jest zbieżny na zbiorze E. Korzystając z I kroku dostajemy tezę. $\square$

Twierdzenie Montela nazywane jest w literaturze **zasadą zwartości**.

Przykład 15.1
Niech $f(z) = z^p, p \geq 2$. Przez f^n oznaczymy n-krotne złożenie funkcji f tzn. $f^n(z) := f(f(......f(z)\ldots) = z^{p^n}$. Tworzymy przeliczalną rodzinę $\mathcal{F} = \{f_n(z) : n \in \mathbb{N}, z \in D(0,1)\}$. Każda funkcja $f_n \in H(D(0,1))$. Rodzina $\mathcal{F}$ jest ograniczona, ponieważ

$$\forall K \quad K = \{z : |z| \leq r < 1\} \quad |f_n(z)| \leq r^{p^n} < 1.$$

Zatem ta rodzina jest normalna na mocy Twierdzenia Montela. Fatycznie cały ciąg (f_n) jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $f(z) \equiv 0$ dla $z \in D(0,1)$. Ale funkcja graniczna nie należy do $\mathcal{F}$. $\square$

Niech dana będzie funkcja meromorficzna $f : \mathbb{C} \to \bar{\mathbb{C}}$. Wtedy n-tą iteracją funkcji f oznaczamy symbolem f^n i definiujemy jako n- krotne złożenie funkcji tzn. $f^n := f \circ f \circ \ldots \circ f$.

Definicja 15.4
Niech $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ będzie funkcją meromorficzną przestępna lub wymierną stopnia $deg(f) \geq 2$. Zbiorem Fatou funkcji f nazywamy zbiór

$$F(f) := \{z \in \bar{\mathbb{C}} : \exists U - \textit{otoczenie punktu } z \textit{ t.że rodzina iteracji } \quad \{f^n_{|U}\} \quad \textit{jest normalna}\}.$$

Zbiorem Julii funkcji f nazywamy zbiór

$$J(f) := \bar{\mathbb{C}} \setminus F(f).$$

Nazwy tych zbiorów pochodzą od twórców teorii zw. dynamiką holomorficzną P. Fatou i G. Julia (matematyków francuskich żyjących w XX wieku.)
Przykład 15.2

1. Jeśli $f(z) = z^d, d \geq 2$, to $J(f) = \{z \in S^1 : |z| = 1\}$.
2. Jeśli $f(z) = z^2 + c, |c| > 5$, to $J(f)$ jest zbiorem Cantora.
3. Dla $f(z) = e^z$ zbiór Julii $J(f) = \overline{\mathbb{C}}$, natomiast dla $f_\lambda(z) = \lambda e^z, \lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < \frac{1}{e}$ zbiór Julii jest tzw. bukietem Cantora tzn. ma lokalnie strukturę produktu zbioru Cantora i krzywej.
4. Jeśli $f_\lambda(z) = \lambda tg(z), \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1$ to dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, $J(f) \cap \{z \in \mathbb{C} : k < \mathrm{Re} z \leq k + 1\}$ jest zbiorem Cantora, natomiast dla $f(z) = tg(z)$ zbiór Julii jest prostą (oś rzeczywista).

Twierdzenie 15.7 (Fatou-Julia)
Jeżeli $f : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ jest funkcją wymierną stopnia $deg(f) \geq 2$, to zbiór Julii jest niepusty.

Twierdzenie 15.8 (Fatou)
Jeżeli $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją całkowitą przestępną, to zbiór Julii jest niepusty.

Twierdzenie 15.9 (Baker)
Jeżeli $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją meromorficzną przestępną to zbiór Julii jest niepusty.

Uwaga 15.1 W klasie funkcji meromorficznych na $\mathbb{C}$ zbiór Julii jest obiektem częściej występującym niż np. biegun, ponieważ funkcje całkowite przestępne nie mają biegunów, a wszystkie funkcje meromoficzne przestępne (w tym całkowite) i wymierne, z wyjatkiem homografii i funkcji stałych, posiadają zbiór Julii.