Hipoteza Kellera i okolice

Podziałem przestrzeni $\mathbb{R}^d$ *na kostki jednostkowe* nazywamy rodzinę parami rozłącznych kostek $[0,1)^d + T = \{[0,1)^d + t\colon t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}^d$, taką że $\bigcup_{t\in T}([0,1)^d + t) = \mathbb{R}^d$. Dwie kostki $[0,1)^d + t$, $[0,1)^d + s$ nazywamy *parą bliźniaczą*, jeżeli $|t_j - s_j| = 1$ dla pewnego $j \in [d] = \{1,\ldots,d\}$ oraz $t_i = s_i$ dla wszystkich $i \in [d] \setminus \{j\}$.

W 1930 roku O. H. Keller postawił hipotezę, że każdy podział przestrzeni $\mathbb{R}^d$ na kostki jednostkowe zawiera parę bliźniaczą. W 1930 roku O. Perron udowodnił, że hipoteza Kellera jest prawdziwa dla $d \leq 6$. W 1994 roku J. Lagarias i P. Shor pokazali, że hipoteza Kellera jest fałszywa dla wszystkich $d \geq 10$, a w 2001 roku J. Mackey podał przykład podziału bez par bliźniaczych dla $d = 8$. Do pełnego rozstrzygnięcia hipotezy Kellera pozostał pzypadek $d = 7$. Zagadnienie podziału przestrzeni $\mathbb{R}^d$ na kostki jednostkowe bez par bliźnaczych można zredukowa do badania 2-okresowych podziałów $\mathscr{F}_m$ przestrzeni $\mathbb{R}^d$ na kostki jednostkowe zależnych od $m \in [2^{d-1}]$ parametrów. W 2011 roku J. Debroni, J.D Eblen, M.A. Langston, W. Myrvold, P. Shor oraz D. Weerapurage wykazali, że w każdym podziale $\mathscr{F}_2$ przestzeni $\mathbb{R}^7$ istnieje para bli zniacza. W latach 2014-2017 A.P. Kisielewicz i M. Łysakowaska wykazali, że w każdym podziale $\mathscr{F}_m$ przestzeni $\mathbb{R}^7$, gdzie $m \in \{4,...,64\}$, istnieje para bliźniacza. Pod koniec 2019 roku J. Brakensiek, M. Heule, J. Mackey oraz D. Narváez rozstrzygnęli ostatni przypadek $m = 3$. W pierwszej części wykładu omówione zostaną główne idee leżące u podstaw wyżej wymienionych dowodów hipotezy Kellera dla $d = 7$.

Hipoteza Kellera zainicjowała szereg badań nad własnościami podziałów przestrzeni $\mathbb{R}^d$ na kostki jednostkowe (J. Grytczuk, A.P. Kisielewicz, J. Lagarias, M. Łysakowska, P. Östergård, K. Przesławski, P. Shor, S. Szabo). W drugiej części wykładu omówione zostaną najciekawsze rezultaty dotyczące struktury podziałów przestrzeni $\mathbb{R}^d$ na kostki jednostkowe.

Andrzej P. Kisielewicz