Teoria Automatów i Języków Formalnych

Wykład 1: Relacje

dr inż. Marcin Luckner
mluckner@mini.pw.edu.pl

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Wersja 1.3
3 marca 2021

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Politechnika Warszawska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Projekt „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca” współfinansowany jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 10 pn. „Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych”, realizowane w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”, współfinansowanego jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Politechnika Warszawska

Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Główne zasady - punkty

1. Przedmiot "Teoria Automatów i Języków Formalnych" składa się z wykładów (30h) oraz ćwiczeń (30h). Obecność na wykładach nie jest obowiązkowa.
2. W trakcie ćwiczeń odbędą się dwa pisemne testy, które sprawdzą wiedzę studenta z zakresu teorii oraz umiejętność rozwiązywania ćwiczeń praktycznych. Każdy test pozwala na uzyskanie od 0 do 50 punktów.
   - Terminy testów zostaną podane w przyszłości.
3. Podczas ćwiczeń będzie możliwość zdobycia dodatkowych punktów za rozwiązywanie zadań. Możliwe jest uzyskanie do 10 dodatkowych punktów z Języków Formalnych oraz do 10 dodatkowych punktów z Teorii Automatu.
4. Zadania będą prezentowane na tydzień przed zajęciami. Na zajęciach student może publicznie zaprezentować swoje rozwiązanie.

Główne zasady - egzamin

5. Po zakończeniu ćwiczeń odbędzie się obowiązkowy egzamin składający się z dwóch części: teoretycznej i praktycznej.
6. Około 40 % studentów, którzy w ciągu semestru uzyskają najlepszy łączny wynik, zostanie jednorazowo zwolnionych z części praktycznej egzaminu.
7. Zwolnienie nie jest obowiązkowe: student, który nie jest zadowolony ze swojego wyniku, nie musi przyjmować zwolnienia.

Relacja

Relacja n-argumentowa $R \subseteq A_1 \times \times A_n$ jest zbiorem n-tych krotek, gdzie j-ty składnik każdej n-krotki jest brany z j-tej dziedziny A_j relacji.

Relacja binarna

Relacja binarna jest szczególnym przypadkiem $n = 2$ relacji n-arnej.
Relacja binarna nad dwoma zbiorami A i B to zbiór uporządkowanych par (a, b) składających się z elementów a z A i elementów b z B.
W szczególnym przypadku, $A = B$.
Jeśli R jest relacją, a (a, b) jest parą w R, to zapisujemy aRb.

Rypy relacji

Relacja zwrotna $(\forall a \in S)\, aRa$

Relacja symetryczna $(\forall a, b \in S)\, aRb \Rightarrow bRa$

Relacja przechodnia $(\forall a, b, c \in S)\, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Domknięcie relacji

Załóżmy, że P jest zbiorem własności relacji. Wtedy P-zamknięcie relacji R to najmniejsza relacja R', która zawiera wszystkie pary z R i posiada własności w P.

Relacja równoważności

Relacja równoważności jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykład relacji równoważności I

- Słowo u jest w relacji R z v wtedy i tylko wtedy gdy $|u| - |v| = 3$.
    - Czy to jest relacja równoważności?
    - Jeśli nie, znajdź domlnięcie równoważności relacji.

Przykład relacji równoważności II

- R nie jest zwrotna ponieważ $|u| - |u| = 0$.
- R nie jest symetryczna ponieważ $|u| - |v| = 3 \wedge |v| - |u| = -3$.
- R nie jest przechodna ponieważ $|u| - |v| = 3 \wedge |v| - |z| = 3 \wedge |u| - |z| = 6$.

Przykład relacji równoważności III

- Relacja R' $|u| - |v| = 3k, k \in \mathbb{Z}$ jest domknięciem równoważnościowym relacji R.
    - R' jest zwrotna dla $k = 0$
    - R' jest symetryczna ponieważ $|u| - |v| = 3k \wedge |v| - |u| = -3k$.
    - R' jest przechodna ponieważ $|u| - |v| = 3m \wedge |v| - |z| = 3n \wedge |u| - |z| = 3(m + n)$.

Przykład relacji równoważności IV

- Jest to najmniejsza relacja spełniająca warunki (dowód nie wprost)
  - Załóżmy istnienie mniejszej relacji R'' wtedy istnieje para (a, b) taka, że $aR'b \wedge \neg aR''b$.
  - Ponieważ $aR'b$ to $|a| - |b| = 3n$ zatem istnieje a_1 takie, że $|a| - |a_1| = 3 \wedge |a_1| - |b| = 3(n-1)$.
  - Istnieje także a_2 takie, że $|a_1| - |a_2| = 3 \wedge |a_2| - |b| = 3(n-2)$.
  - Wreszcie istnieje a_{n-1} takie, że $|a_{n-2}| - |a_{n-1}| = 3 \wedge |a_{n-1}| - |b| = 3$.
  - To implikuje istnienie sekwencji $aRa_1, a_1Ra_2, \ldots, a_{n-2}Ra_{n-1}, a_{n-1}Rb$.
  - Jeżeli relacja R'' jest przechodnia to $aR''b$ co przeczy założeniu.

Klasy równoważności

Zbiór A jest klasą równoważności relacji R określonej na zbiorze S wtedy i tylko wtedy gdy

$$(\forall x, y \in A) xRy \wedge (\forall x \in A)(\forall y \notin A) \neg xRy$$

Przykład klas równoważności

- Wymień i policz klasy równoważności relacji R'
  $|u| - |v| = 3k, k \in \mathbb{Z}$
  - $A_0 = \{u : |u| = 3k \land k \in \mathbb{N}\}$
  - $A_1 = \{u : |u| = 3k + 1 \land k \in \mathbb{N}\}$
  - $A_2 = \{u : |u| = 3k + 2 \land k \in \mathbb{N}\}$
- Relacja ma trzy klasy równoważności.
- Każda z klas ma nieskończoną liczbę elementów..

Indukcja

Załóżmy, że mamy do udowodnienia twierdzenie $S(n)$ dla liczby całkowitej n. Jednym z popularnych podejść jest udowodnienie dwóch rzeczy:

1. Podstawa indukcyjna, gdzie wykazujemy $S(i)$ dla danej liczby całkowitej. Zazwyczaj $i = 0$ lub $i = 1$, ale zdarzają się przykłady, gdy chcemy zacząć od jakiegoś wyższego poziomu i, być może dlatego, że twierdzenie S jest fałszywe dla kilku małych liczb całkowitych.
2. Krok indukcyjny, w którym zakładamy, że $n \geqslant i$, gdzie i jest bazową liczbą całkowitą, i pokazujemy, że jeśli $S(n)$ to $S(n+1)$.

Uogólniona indukcja

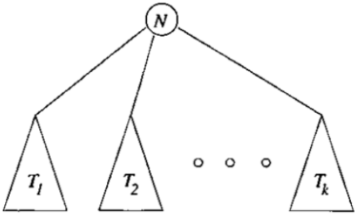
Intnieje uogólniona definicja indukcji.

1. Podstawa indukcyjna, gdzie wykazujemy
    - $S(i), S(i+1), \ldots, S(j)$
2. Krok indukcyjny, zdefiniowany następująco
    - Jeżeli $S(i), S(i+1), \ldots, S(n)$ to $S(n+1)$

Drzewo

Rekursywna definicja drzewa

1. Pojedynczy węzeł jest drzewem i ten węzeł jest korzeniem drzewa.
2. Jeśli T_1, T_2, T_k są drzewami, to możemy utworzyć nowe drzewo w następujący sposób:
   2.1 Rozpocznij od nowego węzła N, który jest korzeniem drzewa.
   2.2 Dodaj kopie wszystkich drzew $T_1, T_2, \ldots, T_k$.
   2.3 Dodaj krawędzie od węzła N do korzeni każdego z drzew $T_1, T_2, \ldots, T_k$.



Liczba liści

Teza: Drzewo regularne stopnia d i wysokości n ma $S(n) = d^{(n-1)}$ liści.

Dowód:

1. Podstawa: $n = 0$, pojedynczy węzeł, jeden liść $S(n) = 1$.
2. Krok indukcyjny:
   2.1 $S(n-1) = d^{(n-2)}$, mamy $d^{(n-2)}$ liści.
   2.2 Do każdego starego liścia dodajemy d liści.
   2.3 Stąd $S(n) = d^{(n-2)} * d = d^{(n-1)}$.

Alfabet i język

- Alfabet Σ jest skończonym zbiorem liter.
  - Alfabet binarny $\Sigma = \{0, 1\}$
- Słowo jest skończoną sekwencją liter z alfabetu..
  - $0, 101, 11111$
  - Słowo ϵ jest specjalnym słowem długości zero (brak liter).
- Zbiór Σ^* zawiera wszystkie słowa, które można utworzyć z alfabetu Σ.
  - $\{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, \dots\}$
- Język L jest podzbiorem Σ^*
  - $\{1, 10, 11, 100, \dots\}$
  - $\{00, 01, 10, 11\}$

Relacja prawostronnie niezmiennicza

Relacja $R \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ jest nazywana relacją prawostronnie niezmienniczą wtedy i tylko wtedy gdy

$$(\forall u, v \in \Sigma^*) uRv \Rightarrow (\forall z \in \Sigma^*) uzRvz$$

Relacja indukowana przez język

Relacja indukowana przez język L nad alfabetem Σ jest binarną relacją R_L taką że:

$$(\forall u, v \in \Sigma^*) u R_L v \equiv (\forall z \in \Sigma^*) uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$$

R_L jako relacja prawostronnie niezmiennicza

Relacja indukowana przez język jest relacją prawostronnie niezmienniczą.

$$(\forall u, v \in \Sigma^*)(\forall z \in \Sigma^*) uR_Lv \Rightarrow uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$$

$$u' = uz, v' = vz(\forall z' \in \Sigma^*) uR_Lv \Rightarrow u'z' \in L \Leftrightarrow v'z' \in L$$

$$(\forall u, v \in \Sigma^*) uR_Lv \Rightarrow (\forall z \in \Sigma^*) uzR_Lvz$$

R_L jako relacja równoważności

Relacja indukowana przez język jest relacją równoważności.

- Relacja R_L jest zwrotna $uz \in L \Leftrightarrow uz \in L$
- RelacjaR_L jest symetryczna, $uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$ implikuje $vz \in L \Leftrightarrow uz \in L$
- Relacja R_L jest przechodnia $uz \in L \Leftrightarrow vz \in L \wedge vz \in L \Leftrightarrow wz \in L$ implikuje $uz \in L \Leftrightarrow wz \in L$

Przykład relacji indukowanej przez język I

Język L nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$ jest dany jako

$$L = \{a^m b^n : 100 \geqslant m \geqslant n \geqslant 1\}.$$

Znajdź klasy równoważności dla relacji R_L.

Przykład relacji indukowanej przez język II

Klasy równoważności:

$$A_{a^i}\colon\ \{a^i\} \wedge i = 0 \ldots 100$$
$$A_k\colon\ \{a^j b^i \wedge k = j - i \wedge 100 \geqslant j \wedge i \geqslant 0\} \wedge k = 0 \ldots 99$$
$$A_R\colon\ \{u \in \Sigma^* : (\forall z \in \Sigma^*) uz \notin L\}$$

Suma klas pokrywa Σ^*.

Przykład relacji indukowanej przez język III

Wszystkie słowa z tej samej klasy są w relacji R_L::

A_{a^i}: jest singletonem, a R_L jest zwrotna.

A_k: $\forall u \in A_k uz \in L \Leftrightarrow z = b^l \wedge l \leqslant k$

A_R: $(\forall u \in A_R)(\forall z \in \Sigma^*) uz \notin L$

Przykład relacji indukowanej przez język IV

Słowa z różnych klas nie mogą być w relacji R_L:

A_{a^i}, A_{a^j}: $(\forall i < j) z = b^j \Rightarrow a^i b^j \notin L \wedge a^i b^i \in L$

A_{a^i}, A_k: Jeśli $i < 100$ to $z = ab \Rightarrow a^{i+1} b \in L \wedge a^{i+k} b^i ab \notin L$
Jeśli $i = 100$ to $z = b^{100}$

A_{a^i}, A_R: Jeśli $i = 0$ to $z = ab$
Jeśli $i > 0$ to $z = b$

A_k, A_l: $(\forall k < l) z = b^l \Rightarrow a^{i+k} b^{i+l} \notin L \wedge a^{i+l} b^{i+l} \in L$

A_k, A_R: $z = \epsilon$

Przykład relacji indukowanej przez język V

Klasy równoważności:

A_{a^i}: $\{a^i\} \wedge i = 0 \dots 100$

A_k: $\{a^j b^i \wedge k = j - i \wedge 100 \geqslant j \wedge i \geqslant 0\} \wedge k = 0 \dots 99$

A_R: $\{u \in \Sigma^* : (\forall z \in \Sigma^*) uz \notin L\}$

Ile mamy klas?Są 101+100+1 = 202 klasy.

Zadania I

1. Pokaż, czy poniższe przykłady są relacjami równoważności. Dwa wyrazy są w relacji, gdy są to:
    1.1 Słowa o tej samej długości.
    1.2 Słowa, które składają się z tych samych liter.
    1.3 Słowa, które składają się z tych samych liter w tej samej liczbie.
    1.4 Słowa binarne, w których różnica między liczbą zer a liczbą jedynek jest taka sama.
    1.5 Słowa binarne, w których reszta z dzielenia przez 3 różnicy między liczbą wystąpień 0 i 1 jest taka sama.
    1.6 Słowa binarne, w których liczba sekwencji 111 jest taka sama.
2. Nazwij i policz klasy równoważności dla relacji równoważności z Zadania 1.

Zadania II

3. Nazwij i policz klasy równoważności dla relacji indukowanej przez język dla następujących języków:
   3.1 Słowa binarne, w których reszta z dzielenia przez 3 z różnicy między liczbą wystąpień 0 i 1 jest taka sama.
   3.2 Słowa binarne z dokładnie jedną sekwencją 111.
   3.3 Słowa binarne, które kończą się sekwencją 111.
   3.4 Słowa, które składają się ze wszystkich liter alfabetu.