Teoria Automatów i Języków Formalnych

Ćwiczenia 3: Języki regularne

dr inż. Marcin Luckner
mluckner@mini.pw.edu.pl

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Wersja 1.3
5 marca 2021

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Politechnika Warszawska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Projekt „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca" współfinansowany jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 10 pn. „Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych", realizowane w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca", współfinansowanego jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Politechnika Warszawska

Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Język Regularny

- Język regularny to język generowany przez wyrażenie regularne.
- W celu wykazania, że dany język jest regularny możemy:
  - stworzyć wyrażenie regularne,
  - wykorzystać Lemat Myhill-Nerode.
- W celu wykazania, że dany język nie jest regularny możemy:
  - użyć kontrapozycji lematu o pompowaniu,
  - wykorzystać Lemat Myhill-Nerode.

Lemat Myhill-Nerode

Lemat Myhill-Nerode

Język L jest regularny wtedy i tylko wtedy, gry relacja R_L indukowana przez język L ma skończoną liczbę klas abstrakcji.

Lemat Myhill-Nerode przykład I

- Korzystając z lematu Mynhilla–Nerode'a wykaż, że następujący język jest regularny
  - Język L nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$ nie zawierający słów z trzema jednakowymi sąsiadującymi znakami.
    $aabbaa \in L$, $aaab \notin L$

Lemat Myhill-Nerode przykład II

- Wyznaczamy klasy abstrakcji:

A_a słowa należące do języka zakończone jednym a
A_{aa} słowa należące do języka zakończone dwoma a
A_b słowa należące do języka zakończone jednym b
A_{bb} słowa należące do języka zakończone dwoma b
A_ϵ $\{\epsilon\}$
A_R słowa nie należące do języka

- Klasy abstrakcji pokrywają Σ^* gdyż:
  - Słowo z języka może kończyć się tylko jednym z ciągów a, aa, b, bb lub być słowem pustym.
  - Pozostałe słowa zawierają się w A_R.

Lemat Myhill-Nerode przykład III

- Elementy wewnątrz klas są w relacji:

A_a $\forall w \in A_a wz \in L \iff z \in L \wedge$ z zaczyna się od co najwyżej jednego a

A_{aa} $\forall w \in A_{aa} wz \in L \iff$ $z \in L \wedge z$ nie zaczyna się od a

A_b $\forall w \in A_b wz \in L \iff z \in L \wedge$ z zaczyna się od co najwyżej jednego b

A_{bb} $\forall w \in A_{bb} wz \in L \iff$ $z \in L \wedge z$ nie zaczyna się od b

A_ϵ $\forall w \in A_\epsilon wz \in L \iff z \in L$

A_R $\forall w \in A_R wz \in L \iff z \emptyset$

Lemat Myhill-Nerode przykład IV

- Elementy z różnych klas nie są w relacji.
- Należy wskazać z dla którego konkatenacja elementu z jednej klasy należy do języka, a elementu z drugiej klasy nie.

- A_a,A_{aa}: $z = a$
- A_a,A_b: $z = aa$
- A_a,A_{bb}: $z = aa$
- A_a,A_ϵ: $z = aa$
- A_a,A_R: $z = a$

- A_{aa},A_b: $z = a$
- A_{aa},A_{bb}:$z = a$
- A_{aa},A_ϵ:$z = a$
- A_{aa},A_R: $z = \epsilon$

- A_b,A_{bb}: $z = b$
- A_b,A_ϵ: $z = bb$
- A_b,A_R: $z = b$
- A_{bb},A_ϵ:$z = b$
- A_{bb},A_R: $z = \epsilon$
- A_ϵ,A_R: $z = \epsilon$

Lemat Myhill-Nerode przykład V

A_a słowa należące do języka zakończone jednym a

A_{aa} słowa należące do języka zakończone dwoma a

A_b słowa należące do języka zakończone jednym b

A_{bb} słowa należące do języka zakończone dwoma b

A_ϵ $\{\epsilon\}$

A_R słowa nie należące do języka

- Liczba klas abstrakcji jest skończona i wynosi 6.
- Zatem język L jest językiem regularnym.

Kontrapozycja lematu o pompowaniu

Kontrapozycja lematu o pompowaniu

Jeżeli dla jakiejkolwiek stałej n_L istnieje słowo $z \in L$ takie, że

$$(|z| \geqslant n_L) \wedge [(\forall_{u,v,w} z = uvw \wedge |uv| \leqslant n_L \wedge |v| \geqslant 1) \exists_{i=0,1,2\ldots} z_i = uv^i w \notin L]$$

wtedy język L nie jest regularny.

Kontrapozycja lematu o pompowaniu - przykład I

- Korzystając z kontrapozycji lematu o pompowaniu wykaż, że następujący język nie jest regularny
  - Język $L = \{a^i b^j : i \geqslant j \geqslant 1\}$ nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$

Kontrapozycja lematu o pompowaniu - przykład II

- Korzystając z kontrapozycji lematu o pompowaniu wykażemy, że istnieje takie $z = uvw$ należące do języka, że pompując człon v wyprowadzimy słowo z języka.
  1. Dla każdego $n \in N$ słowo
  $$z = a^n b^n$$
  należy do języka L.
  2. Ponieważ $|uv| \leqslant n$, to $v = a^k$ gdzie $k \leqslant n$.
  3. Obierzmy indeks $i = 0$. Wtedy słowo
  $$z_0 = a^{n-k} b^n \notin L$$
  Zatem język nie jest językiem regularnym.

Kontrapozycja lematu o pompowaniu - uwagi

- Kluczowy, przy stosowaniu kontrapozycji, jest dobór słowa $z = uvw$.
- Powinniśmy dążyć do tego, aby część uv była jednorodna, gdyż wtedy łatwiej opisać możliwe warianty v.
- Kontrapozycja pozwala nam na zwielokrotnienie ($i > 1$) lub usunięcie ($i = 0$) części v.
- Słowo powinno być *na krawędzi* języka, aby jego modyfikacja powodowała opuszczenie języka.

Zadania I

1. Wykaż, czy następujące języki są regularne
    1.1 Język $L = \{a^i b^j a^k : i, j, k \in N \wedge i + k \leqslant j \leqslant 100\}$ nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$
    1.2 Język $L = \{a^i b^j c^k : i, j, k \in N \wedge i + k \leqslant j\}$ nad alfabetem $\Sigma = \{a, b, c\}$
    1.3 Język L nad alfabetem $\Sigma = \{a, b, c\}$, taki że, każda sekwencja identycznych liter w słowie jest krótsza niż poprzednia $aaabbc \in L$, $aabbaac \notin L$

Zadania II

2. Korzystając z lematu Mynhilla–Nerode'a wykaż, że następujące języki są regularne
   2.1 Język L nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$ zawierający słowa w których po wystąpieniu dwóch sąsiadujących zer muszą wystąpić co najmniej dwie jedynki przed następną parą zer lub końcem słowa. Sekwencję trzech zer traktujemy jako jedną parę. $10100101 \in L$, $10100100 \notin L$
   2.2 Język L nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$ zawierający słowa będące binarną reprezentacją liczb nieparzystych, niezawierającymi nieznaczących zer.

Zadania III

3. Korzystając z kontrapozycji lematu o pompowaniu wykaż, że następujące języki nie są regularne
   - 3.1 Język L nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$, taki że, dla każdej jedynki występującej w słowie suma poprzedzających ją jedynek (wliczając rozpatrywaną) jest większa od poprzedzającej ją liczby wystąpień par zer
     $100100101 \in L$, $0010000100 \notin L$
   - 3.2 Język L nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$, taki że, liczba występujących we słowie jedynek ma wspólny podzielnik z liczbą zer (różny od 1)
     $011000 \in L$, $00101 \notin L$