

Teoria Automatów i Języków Formalnych

Ćwiczenia 4: Gramatyki bezkontekstowe

dr inż. Marcin Luckner
mluckner@mini.pw.edu.pl

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych

Wersja 1.3
3 marca 2021

Projekt „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca” współfinansowany jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 10 pn. „Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych”, realizowane w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”, współfinansowanego jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Gramatyka bezkontekstowa

Gramatyka bezkontekstowa jest określona przez cztery komponenty

$$G = (V, T, P, S)$$

Nieterminale każdy nieterminal generuje zbiór słów,

Terminale są literami,

Produkcje są regułami opisującymi jak język jest generowany,

Produkcje są określane przez parę $A \rightarrow \alpha$ gdzie
 $A \in V$ a $\alpha \in (V \cup T)^*$

Symbol początkowy jest nieterminalem, który generuje język
określany przez gramatykę.

Eliminacja symboli niegenerujących

1. Wszystkie terminale są generujące, terminal generuje sam siebie.
2. Wszystkie nieterminale, które mają produkcje w ciąg terminali są generujące.
3. Wszystkie nieterminale, które mają produkcje w ciąg symboli generujących są generujące.
4. Kiedy zbiór symboli generujących jest stabilny wtedy zawiera on wszystkie symbole generujące.
5. Wszystkie produkcje z symbolami poza zbioru muszą zostać usunięte.

Eliminacja symboli nieosiągalnych

1. Symbol początkowy jest osiągalny.
2. Wszystkie symbole osiągalne z symbolu początkowego są osiągalne.
3. Wszystkie symbole generowane przez symbole osiągalne są osiągalne.
4. Kiedy zbiór symboli osiągalnych jest stabilny wtedy zawiera on wszystkie symbole osiągalne.
5. Wszystkie produkcje z symbolami poza zbioru muszą zostać usunięte.

Eliminacja symboli bezużytecznych - przykład

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a\}, P, S\}$$

$$P: \quad S \rightarrow AB|a$$

$$A \rightarrow a$$

1. Usunięcie symboli nieosiągalnych

- 1.1 $R = \{S\}$

- 1.2 $R = \{S, A, B, a\}, \bar{R} = \emptyset$

$$S \rightarrow AB|a$$

$$A \rightarrow a$$

2. Usunięcie symboli niegenerujących

- 2.1 $G = \{a\}$

- 2.2 $G = \{a, A, S\}, \bar{G} = \{B\}$

$$S \rightarrow a$$

$$A \rightarrow a$$

1. Usunięcie symboli niegenerujących

- 1.1 $G = \{a\}$

- 1.2 $G = \{a, A, S\}, \bar{G} = \{B\}$

$$S \rightarrow a$$

$$A \rightarrow a$$

2. Usunięcie symboli nieosiągalnych

- 2.1 $R = \{S\}$

- 2.2 $R = \{S, a\}, \bar{R} = \{A\}$

$$S \rightarrow a$$

Eliminacja ϵ -produkcji

1. Znajdź symbole wycieralne.
 - 1.1 Wszystkie symbole produkujące ϵ są wycieralne.
 - 1.2 Wszystkie symbole produkujące ciąg symboli wycieralnych są wycieralne.
 - 1.3 Kiedy zbiór symboli wycieralnych jest stabilny wtedy zawiera on wszystkie symbole wycieralne.
2. Za każdy symbol wycieralny w ciele produkcji dodaj produkcję bez tego symbolu.
3. Usuń produkcje w ϵ .

Eliminacja produkcji jednostkowych

1. Wszystkie produkcje postaci $A \rightarrow A$ mogą być usunięte.
2. Wszystkie produkcje postaci $A \rightarrow B$ mogą być zastąpione produkcjami $A \rightarrow \beta_1 | \dots | \beta_n$ gdzie $\beta_1 | \dots | \beta_n$ są ciałami produkcji z B .

Czyszczenie gramatyki - przykład I

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow ASB|C|\epsilon$$

$$A \rightarrow aAS|a$$

$$B \rightarrow SbS|A|bb$$

$$C \rightarrow CC|C$$

Czyszczenie gramatyki - przykład II

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow ASB|C|\epsilon$$

$$A \rightarrow aAS|a$$

$$B \rightarrow SbS|A|bb$$

$$C \rightarrow CC|C$$

Usunięcie ϵ produkcji:

$$P: S \rightarrow ASB|C|AB$$

$$A \rightarrow aAS|a|aA$$

$$B \rightarrow SbS|bS|Sb|b|A|bb$$

$$C \rightarrow CC|C$$

Czyszczenie gramatyki - przykład III

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow ASB|C|AB$$

$$A \rightarrow aAS|a|aA$$

$$B \rightarrow SbS|bS|Sb|b|A|bb$$

$$C \rightarrow CC|C$$

Usunięcie produkcji jednostkowych:

$$P: S \rightarrow ASB|CC|AB$$

$$A \rightarrow aAS|a|aA$$

$$B \rightarrow SbS|bS|Sb|b|aAS|a|bb$$

$$C \rightarrow CC$$

Czyszczenie gramatyki - przykład IV

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow ASB|CC|AB$$

$$A \rightarrow aAS|a|aA$$

$$B \rightarrow SbS|bS|Sb|b|aAS|a|bb$$

$$C \rightarrow CC$$

Usunięcie symboli niegenerujących: $G = \{a, b, B, A, S\}$,

$$\Omega \setminus G = \{C\}$$

$$P: S \rightarrow ASB|AB$$

$$A \rightarrow aAS|a|aA$$

$$B \rightarrow SbS|bS|Sb|b|aAS|a|bb$$

Czyszczenie gramatyki - przykład V

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow ASB|AB$$

$$A \rightarrow aAS|a|aA$$

$$B \rightarrow SbS|bS|Sb|b|aAS|a|bb$$

Usunięcie symboli nieosiągalnych: $R = \{S, AB, A, b\}$, $\Omega \setminus G = \emptyset$

$$P: S \rightarrow ASB|AB$$

$$A \rightarrow aAS|a|aA$$

$$B \rightarrow SbS|bS|Sb|b|aAS|a|bb$$

Postać normalna Chomskiego

Gramatyka bezkontekstowa $G = (V, T, P, S)$ przyjmuje Postać normalną Chomskiego wtedy i tylko wtedy gdy produkcje przyjmują formę $A \rightarrow BC$ lub $A \rightarrow a$, gdzie $A, B, C \in V$, $a \in T$.

Postać normalna Chomskiego

Każda gramatyka bezkontekstowa bez ϵ -produkcji może zostać przekształcona do postaci normalnej Chomskiego.

- Każda produkcja postaci $A \rightarrow \alpha_1 a \alpha_2$ jest zastępowana przez dwie produkcje $A_a \rightarrow a$ i $A \rightarrow \alpha_1 A_a \alpha_2$ gdzie $A \in V$, $a \in T$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (V \cup T)^+$ a A_a jest nowym nieterminalem.
- Każda produkcja postaci $A \rightarrow A_1 A_2 \dots A_n \wedge n > 2$ jest zastępowana przez dwie produkcje $A \rightarrow A_1 B$ i $B \rightarrow A_2 \dots A_n$ gdzie $A, A_1, A_2, \dots, A_n \in V$ a B jest nowym nieterminalem.

Postać normalna Greibach

Gramatyka bezkontekstowa $G = (V, T, P, S)$ przyjmuje postać normalną Greibach wtedy i tylko wtedy gdy produkcje przyjmują formę $A \rightarrow a\alpha$, gdzie $A \in V$, $a \in T$ and $\alpha \in V^*$.

Lematy

Każda gramatyka bezkontekstowa bez ϵ -produkcji może zostać przekształcona do postaci normalnej Greibach.

1. Każda produkcja postaci $A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2$ jeżeli B ma produkcje $B \rightarrow \beta_1 | \beta_2 | \dots | \beta_r$ może być zastąpiona przez produkcje $A \rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \dots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2$
2. Każda produkcja postaci $A \rightarrow A \alpha_1 | A \alpha_2 | \dots | A \alpha_r$, jeżeli $A \rightarrow \beta_1 | \beta_2 | \dots | \beta_s$ są pozostałymi produkcjami z A , może być zastąpiona przez produkcje

$$A \rightarrow \beta_i | \beta_i B \wedge 1 \leq i \leq s$$

$$B \rightarrow \alpha_i | \alpha_i B \wedge 1 \leq i \leq r$$

Postać normalna Greibach - przykład I

Przekształć do postaci normalnej Greibach gramatykę

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow AB|BA$$

$$A \rightarrow ABb|BBa$$

$$B \rightarrow b$$

Postać normalna Greibach - przykład II

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow AB|BA$$

$$A \rightarrow ABb|BBa$$

$$B \rightarrow b$$

Z lematu 1:

$$P: S \rightarrow AB|bA$$

$$A \rightarrow ABb|bBa$$

$$B \rightarrow b$$

Postać normalna Greibach - przykład III

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow AB|bA$$

$$A \rightarrow ABb|bBa$$

$$B \rightarrow b$$

Z lematu 2:

$$P: S \rightarrow AB|bA$$

$$A \rightarrow bBaC|bBa$$

$$C \rightarrow Bb|BbC$$

$$B \rightarrow b$$

Postać normalna Greibach - przykład IV

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow AB|bA$$

$$A \rightarrow bBaC|bBa$$

$$C \rightarrow Bb|BbC$$

$$B \rightarrow b$$

Z lematu 1:

$$P: S \rightarrow bBaCB|bBaB|bA$$

$$A \rightarrow bBaC|bBa$$

$$C \rightarrow bb|bbC$$

$$B \rightarrow b$$

Postać normalna Greibach - przykład V

$$G = \{V = \{A, B, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow bBaCB | bBaB | bA$$

$$A \rightarrow bBaC | bBa$$

$$C \rightarrow bb | bbC$$

$$B \rightarrow b$$

Usunięcie kolejnych nieterminali:

$$P: S \rightarrow bBDCB | bBDB | bA$$

$$A \rightarrow bBDC | bBD$$

$$C \rightarrow bB | bBC$$

$$B \rightarrow b$$

$$D \rightarrow a$$

Zadania I

1. Zaprojektuj gramatyki bezkontekstowe dla następujących języków
 - 1.1 $\{a^m b^n : m \geq n \geq 1\}$
 - 1.2 Język wyrazów nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$, których suma jedynek jest większa od liczby poprzedzających je par zer
 - 1.3 $\{0^n 1^n : n \geq 1\}$
 - 1.4 $\{a^i b^j c^k : i \neq j \vee j \neq k\}$
 - 1.5 Język wyrazów nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$, które nie mają postaci ww
 - 1.6 Język wyrazów nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$ z dwukrotnie większą liczbą zer niż jedynek

Zadania II

2. Usuń produkcje puste, jednostkowe i symbole bezużyteczne z następujących gramatyk:

$$2.1 \quad G = \{V = \{A, B, C, S\}, T = \{0, 1\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow 0A0|1B1$$

$$A \rightarrow C$$

$$B \rightarrow S|A$$

$$C \rightarrow S|\epsilon$$

$$2.2 \quad G = \{V = \{A, B, C, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow AAA|B$$

$$A \rightarrow aA|B$$

$$B \rightarrow \epsilon$$

$$C \rightarrow b$$

$$2.3 \quad G = \{V = \{A, B, C, D, E, S\}, T = \{a, b\}, P, S\}$$

$$P: S \rightarrow aAa|bBb|\epsilon$$

$$A \rightarrow C|a$$

$$B \rightarrow C|b$$

$$C \rightarrow CDE|\epsilon$$

$$D \rightarrow A|B|ab$$

Zadania III

3. Przekształć wyniki zadania 2 do postaci normalnej Chomskiego
4. Przekształć o postaci normalnej Greibach
 - 4.1 Wyniki zadania 2
 - 4.2 Wyniki zadania 3