Teoria Automatów i Języków Formalnych

Ćwiczenia 7: Maszyny Turinga

dr inż. Marcin Luckner
mluckner@mini.pw.edu.pl

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Wersja 1.3
3 marca 2021

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Politechnika Warszawska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Projekt „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca” współfinansowany jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 10 pn. „Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych”, realizowane w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”, współfinansowanego jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój

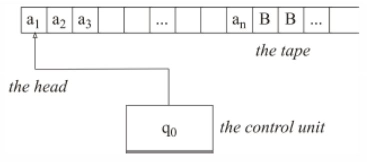
Rzeczpospolita Polska

Politechnika Warszawska

Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Model podstawowy Maszyny Turinga

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$



Rysunek 1: Model podstawowy Maszyny Turinga

- Q skończony zbiór stanów
- Σ alfabet wejściowy, podzbiór Γ bez B
- Γ alfabet taśmy
- δ funkcja przejścia mapująca $Q \times \Gamma$ na $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
- q_0 stan początkowy
- B symbol pusty $B \in \Gamma$
- F skończony zbiór stanów końcowych $F \subseteq Q$

MT z funkcją stopu

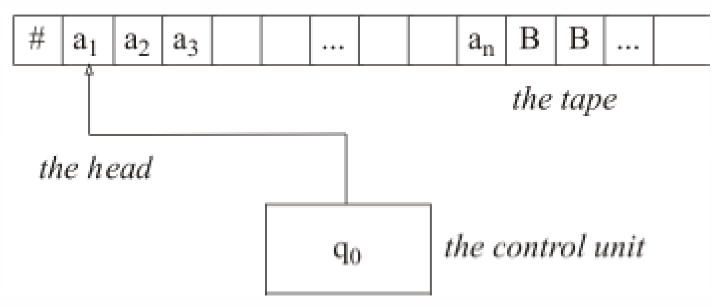
$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F, R)$$

F zawiera jeden stan akceptujący q_A

R zawiera jeden stan odrzucający q_R

MT ze strażnikiem

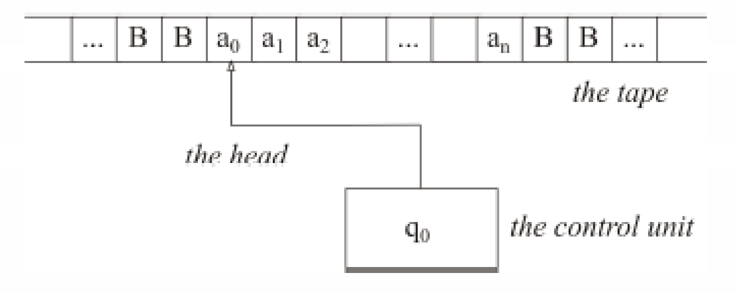
$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \#, F)$$



Rysunek 2: MT ze strażnikiem

$\#$ symbol strażnika $\# \in \Gamma \land \# \notin \Sigma$

MT z dwustronnie nieograniczoną taśmą



Rysunek 3: MT z dwustronnie nieograniczoną taśmą

Tablica przejścia

- Tablica przejścia przedstawia szczegóły obliczeń.
- Każdy wiersz odpowiada unikalnemu stanowi
- Każda kolumna odpowiada symbolowi taśmy.
- W komórkach tabeli zapisujemy wynik przejścia: mowy stan, nowy symbol, ruch.
- Kończymy obliczenia, gdy osiągamy stan końcowy.

δ	B	0	1
q_0	$(q_1, 0, L)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_0, 0, R)$
q_1	(q_A, B, R)	$(q_1, 0, L)$	$(q_1, 1, L)$

Zadanie

- Zaprojektuj MT obliczającą $f(n) = 2^n$.
- Kroki:
  1. Wybór modelu
  2. Analiza problemu
  3. Szkic algorytmu
  4. Wybór kodowania
  5. Zaprojektowanie obliczeń
- Używamy MT z dwustronnie nieograniczoną taśmą.

Analiza problemu

- Dla pierwszych wartości otrzymujemy:

n	$f(n)$
0	1
1	2
2	4
3	8

- Widać, że $f(n+1) = 2 * f(n)$, możemy więc przeprowadzić obliczenia rekurencyjnie.

Szkic algorytmu

1. Wejście określa liczbę powtórzeń $c = n$.
2. Domyślne wejście ustawiamy na $o = 1$.
3. W każdej iteracji $1 \ldots n$:
   3.1 $c = c - 1$
   3.2 $o = 2o$
4. Usuwamy symbole tymczasowe
5. Ustalamy o jako wynik obliczeń

Kodowanie binarne kontra unarne

- Kodujemy wejście i wyjście używając binarnego lub unarnego kodowania.
- O ile funkcja nie jest translatorem, wejście i wyjście powinny mieć takie same kodowanie.
- W omawianym przypadku jedno kodowanie jest lepsze do zapisywania wyników, drugie, aby kontrolować przebieg działania algorytmu

n	$f(n)$	u(n)	u(f(n))	b(n)	b(f(n))
0	1	B	1	0	1
1	2	1	11	1	10
2	4	11	1111	10	100
3	8	111	11111111	11	1000

- Zastosujmy kodowanie unarne.

Tabela przejścia I

δ	B	1	X
q_0	$(q_?, 1, L)$	$(q_1, 1, R)$	—
q_1	(q_2, X, R)	$(q_1, 1, R)$	—
q_2	$(q_3, 1, L)$	—	—
q_3	(q_4, B, R)	$(q_3, 1, L)$	(q_3, X, L)
q_4	—	(q_5, B, R)	$(q_?, B, R)$
q_5	—	$(q_5, 1, R)$	(q_6, X, R)
q_6	—	(q_7, D, R)	—

Tabela przejścia II

δ	B	1	X	D
q_0	$(q_?, 1, L)$	$(q_1, 1, R)$	—	—
q_1	(q_2, X, R)	$(q_1, 1, R)$	—	—
q_2	$(q_3, 1, L)$	—	—	—
q_3	(q_4, B, R)	$(q_3, 1, L)$	(q_3, X, L)	—
q_4	—	(q_5, B, R)	$(q_?, B, R)$	—
q_5	—	$(q_5, 1, R)$	(q_6, X, R)	—
q_6	$(q_?, B, L)$	(q_7, D, R)	—	(q_6, D, R)
q_7	(q_8, D, L)	$(q_7, 1, R)$	—	(q_7, D, R)
q_8	—	$(q_8, 1, L)$	(q_6, X, R)	(q_8, D, L)

Tabela przejścia III

δ	B	1	X	D
q_0	$(q_?, 1, L)$	$(q_1, 1, R)$	—	—
q_1	(q_2, X, R)	$(q_1, 1, R)$	—	—
q_2	$(q_3, 1, L)$	—	—	—
q_3	(q_4, B, R)	$(q_3, 1, L)$	(q_3, X, L)	—
q_4	—	(q_5, B, R)	$(q_?, B, R)$	—
q_5	—	$(q_5, 1, R)$	(q_6, X, R)	—
q_6	$(\mathbf{q_9}, B, L)$	(q_7, D, R)	—	(q_6, D, R)
q_7	(q_8, D, L)	$(q_7, 1, R)$	—	(q_7, D, R)
q_8	—	$(q_8, 1, L)$	(q_6, X, R)	(q_8, D, L)
q_9	—	—	(q_{10}, X, L)	$(q_9, 1, L)$
q_{10}	(q_4, B, R)	$(q_{10}, 1, L)$	—	—

Tabela przejścia IV

δ	B	1	X	D
q_0	$(\mathbf{q_4}, 1, L)$	$(q_1, 1, R)$	–	–
q_1	(q_2, X, R)	$(q_1, 1, R)$	–	–
q_2	$(q_3, 1, L)$	–	–	–
q_3	(q_4, B, R)	$(q_3, 1, L)$	(q_3, X, L)	–
q_4	$(\mathbf{q_A}, \mathbf{B}, \mathbf{R})$	(q_5, B, R)	$(\mathbf{q_A}, B, R)$	–
q_5	–	$(q_5, 1, R)$	(q_6, X, R)	–
q_6	$(\mathbf{q_9}, B, L)$	(q_7, D, R)	–	(q_6, D, R)
q_7	(q_8, D, L)	$(q_7, 1, R)$	–	(q_7, D, R)
q_8	–	$(q_8, 1, L)$	(q_6, X, R)	(q_8, D, L)
q_9	–	–	(q_{10}, X, L)	$(q_9, 1, L)$
q_{10}	(q_4, B, R)	$(q_{10}, 1, L)$	–	–

Ostateczny model

$$
\begin{aligned}
M = (Q = & \quad \{q_0, \ldots, q_{10}, q_A\}, \\
\Sigma = & \quad \{1\}, \\
\Gamma = & \quad \{1, B, X, D\}, \\
& \quad \delta, \\
& \quad q_0, \\
& \quad B, \\
F = & \quad \{q_A\})
\end{aligned}
$$

Task

Zaprojektuj maszynę Turinga modelującą język
$L = \{a^i b^j c^k : i = j = k\}$ nad alfabetem $\Sigma = \{a, b, c\}$

Tabela przejścia I

δ	a	b	c	B	X
q_0	(q_1, B, R)	q_R	q_R	q_A	—
q_1	(q_1, a, R)	(q_2, X, R)	q_R	q_R	(q_1, X, R)
q_2	q_R	(q_2, b, R)	(q_3, c, R)	q_R	(q_2, X, R)
q_3	q_R	q_R	(q_3, c, R)	(q_4, B, L)	—
q_4	q_R	q_R	(q_5, B, L)	q_R	q_R
q_5	(q_5, a, L)	(q_5, b, L)	(q_5, c, L)	(q_0, B, R)	(q_5, X, L)

Tabela przejścia II

δ	a	b	c	B	X
q_0	(q_1, B, R)	q_R	q_R	q_A	$(\mathbf{q_6}, \mathbf{B}, \mathbf{R})$
q_1	(q_1, a, R)	(q_2, X, R)	q_R	q_R	(q_1, X, R)
q_2	q_R	(q_2, b, R)	(q_3, c, R)	q_R	(q_2, X, R)
q_3	q_R	q_R	(q_3, c, R)	(q_4, B, L)	$-$
q_4	q_R	q_R	(q_5, B, L)	q_R	q_R
q_5	(q_5, a, L)	(q_5, b, L)	(q_5, c, L)	(q_0, B, R)	(q_5, X, L)
q_6	q_R	q_R	q_R	q_A	(q_6, B, R)

Końcowy model

$$
\begin{aligned}
M = (Q = &\quad \{q_0, \ldots, q_6, q_A, q_R\}, \\
\Sigma = &\quad \{a, b, c\}, \\
\Gamma = &\quad \{a, b, c, B, X\}, \\
&\quad \delta, \\
&\quad q_0, \\
&\quad B, \\
F = &\quad \{q_A\}, \\
R = &\quad \{q_R\})
\end{aligned}
$$

Zadania I

1. Zaprojektuj MT (model podstawowy) obliczające funkcje
   1.1 $f(n) = n!$
   1.2 $f(n, m) = n * m$
   1.3 $f(n, m) = n - m$, funkcja zwraca 0 dla $m > n$
2. Przeprojektuj MT z Zadania 1 na modele
   2.1 ze strażnikiem
   2.2 z dwustronnie nieograniczoną taśmą.

Zadania II

3. Zaprojektuj maszynę Turinga modelującą następujące języki
   3.1 Język L nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$ słów o tej samej liczbie zer i jedynek
   3.2 $L = \{a^i b^j c^k : k = \max(i, j)\}$ nad alfabetem $\Sigma = \{a, b, c\}$