Teoria Automatów i Języków Formalnych

Ćwiczenia 8: Wielotaśmowe maszyny Turinga

dr inż. Marcin Luckner
mluckner@mini.pw.edu.pl

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Wersja 1.3
3 marca 2021

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Politechnika Warszawska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Projekt „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca” współfinansowany jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 10 pn. „Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych”, realizowane w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”, współfinansowanego jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

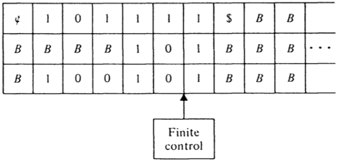
Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Politechnika Warszawska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Wielościeżkowa Maszyna Turinga



Rysunek 1: Wielościeżkowa Maszyna Turinga

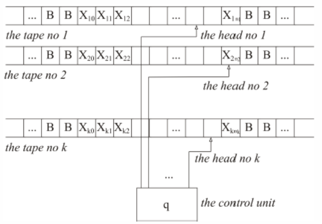
- Wielościeżkowa Maszyna Turinga jest modyfikacją MT, w której głowica odczytuje k symboli z k ścieżek na raz.
- Od MT odróżnia ją funkcja przejścia

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}$$

- Łatwo wykazać równoważność maszyny wielościeżkowej z MT zauważając, że do symulacji jej działania wystarczy zdefiniować symbole odzwierciedlające alfabet Γ^k.

Wielotaśmowa Maszyna Turinga

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$



Rysunek 2: Wielotaśmowa Maszyna Turinga

$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ są alfabetami taśm

δ funkcja przejścia

$$Q \times (\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_k) \rightarrow Q \times (\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_k) \times \{L, R, S\}^k$$

Równoważność maszyn

1. Maszyna Turinga z jedną taśmą jest specjalnym przypadkiem maszyny wielotaśmowej ($k = 1$).
2. Maszynę wielotaśmową symulujemy przy pomocy maszyny wielościeżkowej.

Budowa symulatora

Head 1		X				
Tape 1	A_1	A_2	$\cdots$		$\cdots$	A_m
Head 2				X		
Tape 2	B_1	B_2	$\cdots$		$\cdots$	B_m
Head 3	X					
Tape 3	C_1	C_2	$\cdots$		$\cdots$	C_m

Rysunek 3: Symulacja

- Każdą z k taśm symulowanej maszyny M symulujemy przy pomocy dwóch ścieżek.
  1. Dolna ścieżka zawiera zawartość i-tej taśmy maszyny M.
  2. Górna taśma zawiera tylko jeden symbol X oznaczający położenie głowicy na taśmie i.
- W ten sposób tworzymy maszynę N o $2 * k$ taśmach.

Symulacja obliczeń

- W celu symulacji ruchu maszyny M maszyna N musi odwiedzić k znaczników głowic.
- Dla każdego znacznika po kolei, w zależności od stanu M i symbolu przy znaczniku, zmieniamy symbol wskazywany przez znacznik.
- W razie potrzeby przesuwamy znacznik głowicy o jedną pozycję w lewo lub w prawo.
- Po dokonaniu wszystkich zmian na ścieżkach zmieniamy stan symulatora na stan odpowiadający stanowi wynikającemu z ruchu M. Jeżeli jest to stan akceptujący, akceptujemy obliczenia.

Czas obliczeń

Czas symulacji

Czas którego potrzebuje wielościeżkowa MT N na symulację n ruchów k taśmowej maszyny M wynosi $O(n^2)$.

- Po n ruchach symulacji znaczniki głowic nie mogły oddalić się o więcej niż $2n$ komórek.
- Zaczynając ruch na pierwszym znaczniku głowicy maszyna N potrzebuje co najwyżej $2n$ ruchów, by osiągnąć ostatni.
- Następnie, potrzebuje co najwyżej $2n$ ruchów, aby wrócić do pierwszego znacznika, symulując po drodze zmiany stanu taśmy, i nie więcej niż $2k$ ruchów, aby zmodyfikować położenie znaczników.
- Daje to razem $4n + 2k \sim O(n)$ ruchów dla symulacji pojedynczego ruchu i $O(n^2)$ dla symulacji n ruchów.

Zadanie

- Zaprojektuj wielotaśmową MT obliczającą $f(n) = 2^n$.

Architektura MT

- Używamy MT z dwustronnie nieograniczonymi taśmami.
- Używamy trzech taśm:
  1. Taśma wejściowa, licznik iteracji.
  2. Wynik ostatniej iteracji.
  3. Taśma do podwajania wyniku.

Szkic algorytmu

1. Pierwsza taśma określa liczbę powtórzeń $c = n$.
2. Na drugiej taśmie zapisujemy $o = 1$.
3. W każdej iteracji $1 \dots n$:
   - 3.1 Na pierwszej taśmie $c = c - 1$
   - 3.2 Na trzeciej taśmie $o = 2o$
   - 3.3 Przepisujemy trzecią taśmę na drugą
4. Ustalamy o jako wynik obliczeń na pierwszej taśmie.

Tabela przejścia

δ	$\begin{pmatrix}1\\B\\B\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}B\\B\\B\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\B\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}*\\B\\1\end{pmatrix}$
q_0	$\left(q_1, \begin{pmatrix}1\\1\\B\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}S\\S\\S\end{pmatrix}\right)$	$\left(q_A, \begin{pmatrix}1\\B\\B\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}S\\S\\S\end{pmatrix}\right)$	—	—
q_1	$\left(q_3, \begin{pmatrix}B\\B\\B\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}R\\S\\L\end{pmatrix}\right)$	—	$\left(q_2, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}S\\S\\R\end{pmatrix}\right)$	—
q_2	—	—	$\left(q_1, \begin{pmatrix}1\\B\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}S\\R\\R\end{pmatrix}\right)$	—
q_3	$\left(q_1, \begin{pmatrix}1\\B\\B\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}S\\R\\S\end{pmatrix}\right)$	$\left(q_4, \begin{pmatrix}B\\B\\B\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}S\\L\\S\end{pmatrix}\right)$	—	$\left(q_3, \begin{pmatrix}*\\1\\B\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}S\\R\\L\end{pmatrix}\right)$

δ	$\begin{pmatrix}B\\1\\B\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}B\\B\\B\end{pmatrix}$
q_4	$\left(q_4, \begin{pmatrix}1\\B\\B\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}L\\L\\S\end{pmatrix}\right)$	$\left(q_A, \begin{pmatrix}B\\B\\B\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}R\\S\\S\end{pmatrix}\right)$

Ostateczny model

$$\begin{aligned} M = (Q = & \quad \{q_0, \ldots, q_4, q_A\}, \\ \Sigma = & \quad \{1\}, \\ \Gamma_x = & \quad \{1, B\}, \\ & \quad \delta, \\ & \quad q_0, \\ & \quad B, \\ F = & \quad \{q_A\}) \end{aligned}$$

Task

Zaprojektuj wielotaśmową maszynę Turinga modelującą język $L = \{a^i b^j c^k : i = j = k\}$ nad alfabetem $\Sigma = \{a, b, c\}$

Architektura MT

- Używamy MT z dwustronnie nieograniczonymi taśmami.
- Używamy trzech taśm:
    1. Taśma wejściowa, sekwencja c.
    2. Sekwencja a.
    3. Sekwencja b.

Tabela przejścia

δ	$\begin{pmatrix} a \\ B \\ B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b \\ B \\ B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ B \\ B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} B \\ B \\ B \end{pmatrix}$
q_0	$\left(q_0, \begin{pmatrix} B \\ a \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ R \\ S \end{pmatrix}\right)$	$\left(q_1, \begin{pmatrix} B \\ B \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ S \\ R \end{pmatrix}\right)$	q_R	q_A
q_1	q_R	$\left(q_1, \begin{pmatrix} B \\ B \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ S \\ R \end{pmatrix}\right)$	$\left(q_2, \begin{pmatrix} c \\ B \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ S \\ S \end{pmatrix}\right)$	q_R
q_2	q_R	q_R	$\left(q_2, \begin{pmatrix} c \\ B \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ S \\ S \end{pmatrix}\right)$	$\left(q_3, \begin{pmatrix} B \\ B \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \\ L \end{pmatrix}\right)$

δ	$\begin{pmatrix} c \\ B \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ a \\ B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ B \\ B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} B \\ a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} B \\ a \\ B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} B \\ B \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} B \\ B \\ B \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$
q_3	q_R	q_R	q_R	q_R	q_R	q_R	q_A	$\left(q_3, \begin{pmatrix} B \\ B \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ L \\ L \end{pmatrix}\right)$

Końcowy model

$$
\begin{aligned}
M = (Q = &\quad \{q_0, \ldots, q_3, q_A, q_R\},\\
\Sigma = &\quad \{a, b, c\},\\
\Gamma = &\quad \{a, b, c, B\},\\
&\quad \delta,\\
&\quad q_0,\\
&\quad B,\\
F = &\quad \{q_A\},\\
R = &\quad \{q_R\})
\end{aligned}
$$

Zadania I

1. Zaprojektuj wielotaśmową MT obliczającą funkcje
   1.1 $f(n, m) = n * m$
   1.2 $f(n_1, \ldots, n_m) = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$

Zadania II

2. Zaprojektuj wielotaśmową maszynę Turinga modelującą następujące języki
    2.1 Język L nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$ słów o tej samej liczbie zer i jedynek
    2.2 $L = \{a^i b^j c^k : k = \max(i, j)\}$ nad alfabetem $\Sigma = \{a, b, c\}$