Teoria Automatów i Języków Formalnych

Ćwiczenia 12: Automat skończony

dr inż. Marcin Luckner
mluckner@mini.pw.edu.pl

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Wersja 1.3
3 marca 2021

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Politechnika Warszawska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Projekt „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca" współfinansowany jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 10 pn. „Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych", realizowane w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca", współfinansowanego jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Politechnika Warszawska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Deterministyczny automat skończony

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Deterministyczny automat skończony składa się z następujących elementów

- Q skończony zbiór stanów
- Σ skończony alfabet wejściowy
- q_0 stan początkowy $q_0 \in Q$
- F zbiór stanów końcowych $F \subset Q$
- δ funkcja przejścia $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

Niedeterministyczny automat skończony

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Niedeterministyczny automat skończony ma identyczne składniki jak DAS z wyjątkiem funkcji przejścia

δ funkcja przejścia $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

Automat skończony z ϵ-ruchami

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

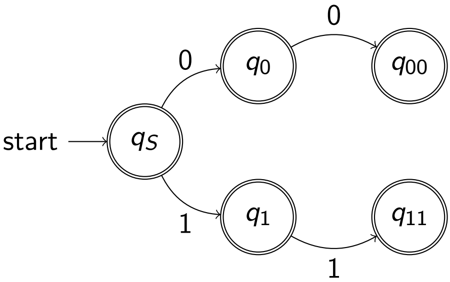
Automat skończony z ϵ-ruchami ma identyczne składniki jak DAS z wyjątkiem funkcji przejścia

δ funkcja przejścia $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to 2^Q$

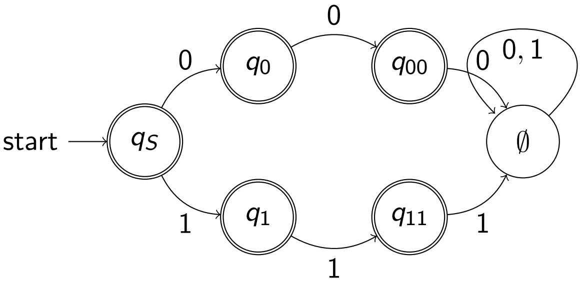
Zadanie

Zaprojektuj deterministyczny automat skończony rozpoznający język nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$ słów bez sekwencji trzech identycznych liter.

Tworzenie DAS I



Tworzenie DAS II



Tworzenie DAS III

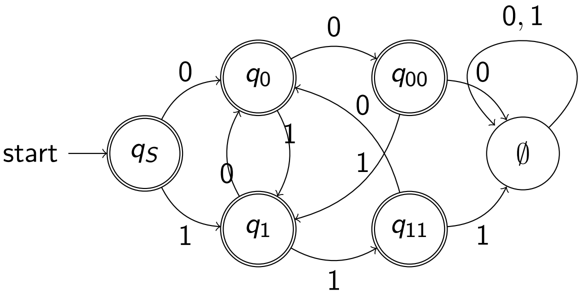
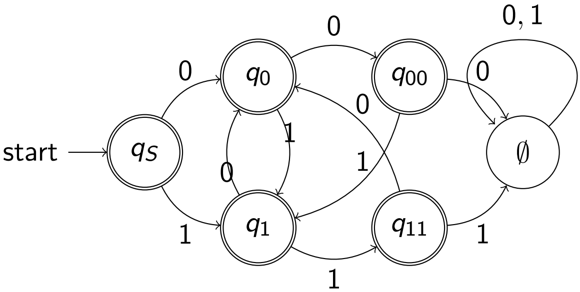


Tabela przejścia

	0	1
$\rightarrow q_S \rightarrow$	q_0	q_1
$q_0 \rightarrow$	q_{00}	q_1
$q_1 \rightarrow$	q_0	q_{11}
$q_{00} \rightarrow$	$\emptyset$	q_1
$q_{11} \rightarrow$	q_0	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



Równoważność AS i wyrażeń regularnych

1. Jeżeli $L = L(r)$ dla wyrażenia regularnego r wtedy istnieje automat skończony A taki, że $L = L(A)$.
2. Jeżeli $L = L(A)$ dla automatu skończonego A wtedy istnieje wyrażenie regularne r takie, że $L = L(r)$.

Konstrukcja wyrażenia regularnego z AS I

- Ponumerujmy stany AS A jako $1, 2, \ldots, n$.
- Określmy $R_{ij}^{(k)}$ jako ścieżkę ze stanu i do stanu j bez odwiedzania stanów większych niż k.
- Możemy skonstruować wyrażenie regularne równoważne automatowi A używając następującej indukcji.

Konstrukcja wyrażenia regularnego z AS II

- Podstawa (k=0):
  - Ścieżka nie może odwiedzać innych stanów niż i i j.
  - Jeżeli $i \neq j$
    - Jeżeli nie ma połączenia między stanami i i j $R_{ij}^{(0)} = \emptyset$
    - Jeżeli jest połączenie między stanami i i j oznaczone przez a $R_{ij}^{(0)} = a$
    - Jeżeli jest połączenie między stanami i i j znaczone przez $a_1, a_2, \dots a_k$ $R_{ij}^{(0)} = a_1 + a_2 + \dots + a_k$
  - Jeżeli $i = j$ wyrażenia są rozszerzane przez ϵ ponieważ ścieżka może być przebyta bez użycia oznaczonych połączeń.
    - Jeżeli nie ma połączenia między stanami i i j $R_{ij}^{(0)} = \epsilon$
    - Jeżeli jest połączenie między stanami i i j oznaczone przez a $R_{ij}^{(0)} = \epsilon + a$
    - Jeżeli jest połączenie między stanami i i j znaczone przez $a_1, a_2, \dots a_k$ $R_{ij}^{(0)} = \epsilon + a_1 + a_2 + \dots + a_k$

Konstrukcja wyrażenia regularnego z AS III

- Indukcja dla $R_{ij}^{(k)}$:
  - Ścieżka może nie odwiedzać stanu k. W takim wypadku jest przedstawiana jako $R_{ij}^{(k-1)}$.
  - Ścieżka może odwiedzać stan k kilka razy. times. W takim wypadku jest przedstawiana jako konkatenacja trzech ścieżek $R_{ik}^{(k-1)} \left(R_{kk}^{(k-1)}\right)^* R_{kj}^{(k-1)}$.
  - Oba przypadki podsumowujemy jako:

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} \left(R_{kk}^{(k-1)}\right)^* R_{kj}^{(k-1)}$$

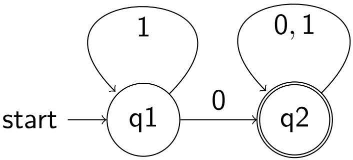
Konstrukcja wyrażenia regularnego z AS IV

- Załóżmy, ze DAS A z n stanami ma stan początkowy 1 i stany finalne $f_1, f_2, \ldots, f_m$.
- Odpowiadające mu wyrażenie regularne ma następującą postać:

$$R = R_{1f_1}^{(n)} + R_{1f_2}^{(n)} + \cdots + R_{1f_m}^{(n)}$$

Konstrukcja wyrażenia regularnego przyklad

Język nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$ zawierający słowa z przynajmniej jednym zerem.

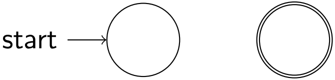


$R_{11}^{(0)}$	$\epsilon + 1$
$R_{12}^{(0)}$	0
$R_{21}^{(0)}$	$\emptyset$
$R_{22}^{(0)}$	$\epsilon + 0 + 1$
$R_{11}^{(1)}$	$\epsilon + 1 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) = 1^*$
$R_{12}^{(1)}$	$0 + (\epsilon + 1)(\epsilon + 1)^*0 = 1^*0$
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset + \emptyset(\epsilon + 1)^*(\epsilon + 1) = \emptyset$
$R_{22}^{(1)}$	$\epsilon + 0 + 1 + \emptyset(\epsilon + 1)^*00 = \epsilon + 0 + 1$
$R_{12}^{(2)}$	$1^*0 + 1^*0(\epsilon + 0 + 1)^*(\epsilon + 0 + 1)$ $= 1^*0(0 + 1)^*$

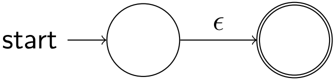
Konstrukcja AS z wyrażenia regularnego I

Wyrażenie regularne nad alfabetem Σ jest konstruowane w następujący sposób

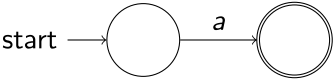
- $\emptyset$ jest wyrażeniem regularnym,



- ϵ jest wyrażeniem regularnym,



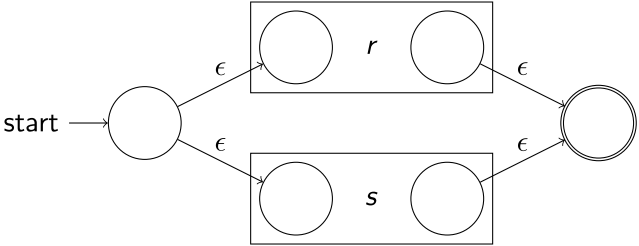
- każde $a \in \Sigma$ jest wyrażeniem regularnym



Konstrukcja AS z wyrażenia regularnego II

Jeżeli r i s są wyrażeniami regularnymi wtedy następujące struktury też są wyrażeniami regularnymi

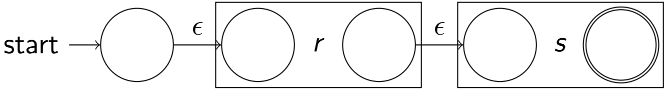
- $(r + s)$ suma wyrażeń regularnych



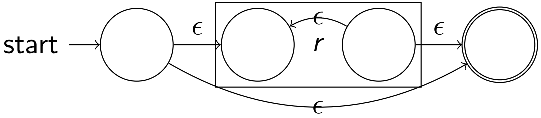
Konstrukcja AS z wyrażenia regularnego III

Jeżeli r i s są wyrażeniami regularnymi wtedy następujące struktury też są wyrażeniami regularnymi

- (rs) konkatenacja wyrażeń regularnych



- $(r)^*$ domknięcie Kleene wyrażenia regularnego



Iloraz języków

- Prawy iloraz języka L_1 z językiem L_2 tworzy język L_1/L_2 zawierający słowa nad alfabetem Σ, które w konkatenacji ze słowami z dzielnika dają słowa z dzielnej:

$$L_1/L_2 = \{y \in \Sigma^* : (\exists x \in L_2) yx \in L_1\}$$

- Lewy iloraz języka L_1 z językiem L_2 tworzy język L_1/L_2 zawierający słowa nad alfabetem Σ, które w konkatenacji ze słowami z dzielnej dają słowa z dzielnika:

$$L_1 \backslash L_2 = \{y \in \Sigma^* : (\exists x \in L_2) xy \in L_1\}$$

- Lewy iloraz może być użyty do stworzenia automatu minimalnego (w sensie liczby stanów).

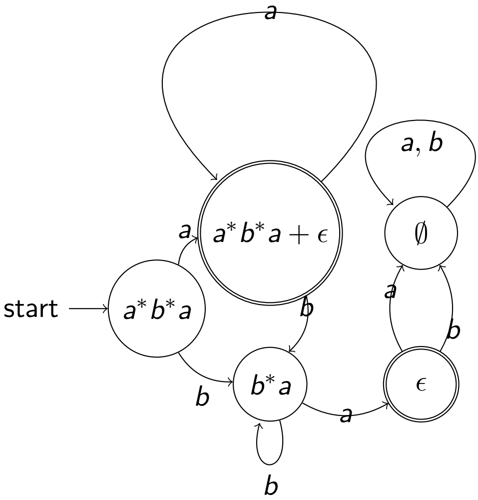
Przykład

$$a^*b^*a$$

$$\begin{aligned}
r_0 &= a^*b^*a \\
r_0\backslash a &= a^*b^*a + \epsilon = r_1 \\
r_0\backslash b &= b^*a = r_2 \\
r_1\backslash a &= a^*b^*a + \epsilon = r_1 \\
r_1\backslash b &= b^*a = r_2 \\
r_2\backslash a &= \epsilon = r_3 \\
r_2\backslash b &= b^*a = r_2 \\
r_3\backslash a &= \emptyset \\
r_3\backslash b &= \emptyset \\
\emptyset\backslash a &= \emptyset \\
\emptyset\backslash b &= \emptyset
\end{aligned}$$

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2
$q_1^{\rightarrow}$	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
$q_3^{\rightarrow}$	$\emptyset$	*emptyset*
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Stworzony DAS



- Liczba stanów w stworzonym automacie odpowiada liczbie klas z twierdzenia Mynhil-Nerode.
  - Każdy stan zawiera wszystkie słowa nad Σ^* wygenerowane zaczynając od stanu początkowego i kończąc w danym stanie.
  - Każdy stan reprezentuje wyrażenie regularne, które generuje sufix przekształcający słowa w słowa z języka.
- Dlatego żaden stan nie może być usunięty.

Zadania I

1. Zaprojektuj DAS generujący język odpowiadający następującym wyrażeniom regularnym:
   1.1 $1 + (10)^{+}(01)^{*}$,
   1.2 $(\epsilon + 0)(10)^{*}(1100)(10)^{*}(\epsilon + 1)$
2. Zaprojektuj DAS rozpoznający nastepujące języki
   2.1 Język nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$ zawierający słowa z przynajmniej dwoma jedynkami po parze sąsiadujących zer i przed następną parą zer lub końcem słowa. Sekwencja trzech zer rozważana jest jako pojedyncza para.
   2.2 Język nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$ słów bez sekwencji 010.
3. Zaprojektuj minimalny DAS dla przykładów z zadań 1 i 2.