Kolokwium z TCiWdTD, dn. 03.12.2007

Zad. 1. (za 4 pkt.)
Wiedząc, że:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)\,2^{\nu+2k}} \quad \text{dla } z \in \mathbb{C},\ \nu \in \mathbb{C},$$

udowodnić tożsamość: $\frac{d}{dz}\left[z^\nu J_\nu(z)\right] = z^\nu J_{\nu-1}(z)$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Znaleźć rozwiązanie równania: $y'' + 2y' + 2y = f(t)$ z warunkami początkowymi $y(0^+) = y'(0^+) = 0$, gdzie f oznacza funkcję daną posiadającą transformatę Laplace'a.

Zad. 3. (za 4 pkt.)

Znaleźć rozwiązanie równania: $y(t) = \cos t - 2\int_0^t \cos(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau$.

Zad. 4. (za 4 pkt.)
Korzystając ze wzoru

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma,$$

obliczyć $L[\mathrm{Si}(kt)](s)$, gdzie $\mathrm{Si}(kt) = \int_0^t \frac{\sin(k\tau)}{\tau} d\tau$ (tzw. sinus całkowy).

Zad. 5.* (zastępuje dowolne inne zadanie)

Korzystając z tego, że $C = -\Gamma'(1)$ pokazać, że $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt = C$.

Kolokwium z TCiWdTD, dn. 03.12.2007

Zad. 1. (za 4 pkt.)
Wiedząc, że:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)\,2^{\nu+2k}} \quad \text{dla } z \in \mathbb{C},\ \nu \in \mathbb{C},$$

udowodnić tożsamość: $\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} J_\nu(z)\right] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Znaleźć rozwiązanie równania: $y'' + 4y' + 8y = f(t)$ z warunkami początkowymi $y(0^+) = y'(0^+) = 0$, gdzie f oznacza funkcję daną posiadającą transformatę Laplace'a.

Zad. 3. (za 4 pkt.)

Znaleźć rozwiązanie równania: $y(t) = 2t + \int_0^t \sin(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau$.

Zad. 4. (za 4 pkt.)
Korzystając ze wzoru

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma,$$

obliczyć $L[\mathrm{Si}(kt)](s)$, gdzie $\mathrm{Si}(kt) = \int_0^t \frac{\sin(k\tau)}{\tau} d\tau$ (tzw. sinus całkowy).

Zad. 5.* (zastępuje dowolne inne zadanie)

Korzystając z tego, że $C = -\Gamma'(1)$ pokazać, że $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt = C$.