Rozwiązania zadań z kolokwium TCiWdTD dn. 3.12.2007

Zad. 1. (grupa I)

Ponieważ $z^{\nu}J_{\nu}(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}}$ oraz $\Gamma(k+\nu+1)=(k+\nu)\Gamma(k+\nu)$, więc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left[z^{\nu}J_{\nu}(z)\right] &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(\nu+k)(-1)^k z^{2\nu+2k-1}}{\Gamma(k+1)(k+\nu)\Gamma(k+\nu)2^{\nu+2k}}=z^{\nu}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+(\nu-1)}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(\nu-1)+1)2^{2k+(\nu-1)}}=\\ &= z^{\nu}J_{\nu-1}(z)\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Zad. 1. (grupa II)

Ponieważ $z^{-\nu}J_{\nu}(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}}$ oraz $\Gamma(k+1)=k\Gamma(k)$, więc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu}J_{\nu}(z)\right] &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2k(-1)^k z^{2k-1}}{k\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}}=\\ &= -z^{-\nu}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1} z^{2(k-1)+(\nu+1)}}{\Gamma((k-1)+1)\Gamma((k-1)+(\nu+1)+1)2^{(\nu+1)+2(k-1)}}=-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Zad. 2. (grupa I)

Niech $Y(s)=L\{y(t)\}(s)$ oraz $F(s)=L\{f(t)\}(s)$. Wówczas stosując transformatę Laplace'a do obu stron równania i uwględniając warunki początkowe otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(s^2+2s+2\right)Y(s) &= F(s)\\ Y(s) &= \frac{1}{(s+1)^2+1}F(s).\end{aligned}$$

Ponieważ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}(t)=e^{-t}\sin t$, więc z twierdzenia Borela o splocie wynika, że rozwiązanie zagadnienia jest postaci

$$y(t)=\int\limits_0^t e^{-\tau}\sin\tau f(t-\tau)\,d\tau.$$

■

Zad. 2. (grupa II)

Niech $Y(s)=L\{y(t)\}(s)$ oraz $F(s)=L\{f(t)\}(s)$. Wówczas stosując transformatę Laplace'a do obu stron równania i uwględniając warunki początkowe otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(s^2+4s+8\right)Y(s) &= F(s)\\ Y(s) &= \frac{1}{(s+2)^2+4}F(s).\end{aligned}$$

Ponieważ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+4}\right\}(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t$, więc z twierdzenia Borela o splocie wynika, że rozwiązanie zagadnienia jest postaci

$$y(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{-2\tau}\sin 2\tau f(t-\tau)\,d\tau.$$

■

Zad. 3. (grupa I)

Niech $Y(s)=L\{y(t)\}(s)$. Stosując twierdzenie Borela o splocie i transformując obie strony równania, otrzymujemy

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{s}{s^2+1}-2\frac{s}{s^2+1}Y(s)\\ Y(s) &= \frac{s}{(s+1)^2}=\frac{s+1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

zatem $y(t)=e^{-t}-te^{-t}$. ■

Zad. 3. (grupa II)

Niech $Y(s) = L\{y(t)\}(s)$. Stosując twierdzenie Borela o splocie i transformując obie strony równania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}Y(s) \\ Y(s) &= 2\frac{s^2+1}{s^4} = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^4} \end{aligned}$$

zatem $y(t) = 2t + \frac{1}{3}t^3$. ■

Zad. 4. (wspólne)

We wzorze $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int\limits_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$ należy przyjąć $f(t) = \sin(kt)$ oraz $s \in \mathbb{R}_+$. Wynika stąd, że

$$L\left\{\frac{\sin(kt)}{t}\right\} = \int\limits_s^\infty \frac{k}{\sigma^2+k^2}d\sigma = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{k}.$$

W takim razie na mocy jednej z własności transformaty Laplace'a

$$L\{\mathrm{Si}(kt)\}(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{k}\right).$$

■

Zad. 5.* (wspólne)

Ponieważ $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, więc $\Gamma'(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\ln t dt$, zatem:

$$\begin{aligned} C &= -\Gamma'(1) = -\int\limits_0^\infty e^{-t}\ln t dt = -\int\limits_0^1 e^{-t}\ln t dt - \int\limits_1^\infty e^{-t}\ln t dt = \int\limits_0^1 \left(e^{-t}-1\right)'\ln t dt + \int\limits_1^\infty \left(e^{-t}\right)'\ln t dt = \\ &= \underbrace{\left(e^{-t}-1\right)\ln t\Big|_0^1}_{0} + \underbrace{e^{-t}\ln t\Big|_1^\infty}_{0} + \int\limits_0^1 \left(1-e^{-t}\right)\frac{1}{t}dt - \int\limits_1^\infty e^{-t}\frac{1}{t}dt. \end{aligned}$$

Podstawiając w ostatniej całce $t = \frac{1}{\tau}$ otrzymujemy

$$\int\limits_1^\infty e^{-t}\frac{1}{t}dt = -\int\limits_1^0 e^{-\frac{1}{\tau}}\frac{1}{\tau}d\tau = \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{t}}\frac{1}{t}dt$$

co kończy dowód wzoru

$$\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}}{t}dt = C.$$

■