Rozwiązania zadań z kolokwium z TCiWdTD dn. 28.01.2008

Zad. 1. Oznaczmy $g(x) = |x|$. Wówczas

$$\begin{aligned}\langle Dg, \varphi\rangle &= -\langle g, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)\,dx = |\text{całk. przez części}| = \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \langle -1_+(-x) + 1_+(x), \varphi\rangle = \langle \operatorname{sgn}(x), \varphi\rangle .\end{aligned}$$

Analogicznie dla $h(x) = x|x|$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\langle Dh, \varphi\rangle &= -\langle h, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} x\,|x|\,\varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} x^2\varphi'(x)\,dx = |\text{całk. przez części}| = \\ &= -2\int_{-\infty}^{0} x\varphi(x)\,dx + 2\int_{0}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = \langle -2x\cdot 1_+(-x) + 2x\cdot 1_+(x), \varphi\rangle = \langle 2\,|x|, \varphi\rangle .\end{aligned}$$

W takim razie w grupie I: $Df = |x| + \operatorname{sgn}(x-1)$, $D^2 f = \operatorname{sgn}(x) + 2\delta(x-1)$,
zaś w grupie II $Df = |x-1| + \operatorname{sgn}(x)$, $D^2 f = \operatorname{sgn}(x-1) + 2\delta(x)$.

Zad. 2. (grupa I)
Obliczając transformatę Laplace'a lewej i prawej strony otrzymujemy:

$$L\left\{t^k \delta^{(k)}\right\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} L\left\{\delta^{(k)}\right\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} s^k = (-1)^k k! = L\left\{(-1)^k k!\delta\right\}(s),$$

co na mocy twierdzenia o jednoznaczności transformaty Laplace'a kończy dowód. ■

Zad. 2. (grupa II)
Na podstawie definicji, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left\langle \sin(\alpha t)\,\delta^{(1)}, \varphi\right\rangle &= \left\langle \delta^{(1)}, \sin(\alpha t)\,\varphi(t)\right\rangle = -\left\langle \delta, (\sin(\alpha t)\,\varphi(t))'\right\rangle = -\left.\frac{d}{dt}\left(\sin(\alpha t)\,\varphi(t)\right)\right|_{t=0} = \\ &= -\alpha\varphi(0) = \langle -\alpha\delta, \varphi\rangle ,\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Zad. 3. (grupa I)
Z definicji transformaty Mellina obliczamy

$$\begin{aligned}K(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x\sqrt{x}} x^{s-1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s+1}}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx = \left|\; x^{\frac{3}{2}} = t, \quad dx = \tfrac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}dt \;\right| = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}s+\frac{1}{3}}}{1+t}dt = \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\left(\frac{2}{3}s+\frac{4}{3}\right)-1}}{(1+t)^{\left(\frac{2}{3}s+\frac{4}{3}\right)+\left[1-\left(\frac{2}{3}s+\frac{4}{3}\right)\right]}}dt = \frac{2}{3}B\left(\frac{2}{3}s+\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}s\right) = \frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}s+\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}s\right) = \\ &= \frac{2}{3}\frac{\pi}{\sin\pi\left(\frac{2}{3}s+\frac{4}{3}\right)}.\end{aligned}$$

Zad. 3. (grupa II)
Z definicji transformaty Mellina obliczamy

$$\begin{aligned}K(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}} x^{s-1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^s}{1+x^{\frac{1}{3}}}dx = \left|\; x^{\frac{1}{3}} = t, \quad dx = 3t^2dt \;\right| = 3\int_0^{+\infty} \frac{t^{3s+2}}{1+t}dt = \\ &= 3\int_0^{+\infty} \frac{t^{(3s+3)-1}}{(1+t)^{(3s+3)+[1-(3s+3)]}}dt = 3B(3s+3, -2-3s) = 3\Gamma(3s+3)\,\Gamma(-2-3s) = \frac{3\pi}{\sin\pi(3s+3)}.\end{aligned}$$

Zad. 4. (wspólne)

Niech $F(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}(z)$. Transformując obie strony równania otrzymujemy kolejno

$$z^3\left(F(z) - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2}\right) - 2z^2\left(F(z) - \frac{1}{z}\right) - 4zF(z) + 8F(z) = \frac{z}{z-3}$$

$$F(z)\left(z^3 - 2z^2 - 4z + 8\right) = \frac{z^3 - 3z^2 + z}{z-3}$$

$$F(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + z}{(z-2)^2(z+2)(z-3)}$$

zatem

$$x_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} F(z)\, z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} \frac{z^{n+2} - 3z^{n+1} + z^n}{(z-2)^2(z+2)(z-3)} dz = \sum_{i=1}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_i} \frac{z^{n+2} - 3z^{n+1} + z^n}{(z-2)^2(z+2)(z-3)}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}
\operatorname*{res}_{z=3} \frac{z^{n+2} - 3z^{n+1} + z^n}{(z-2)^2(z+2)(z-3)} &= \frac{1}{5}\cdot 3^n, \\
\operatorname*{res}_{z=-2} \frac{z^{n+2} - 3z^{n+1} + z^n}{(z-2)^2(z+2)(z-3)} &= (-2)^{n-4}\cdot\frac{11}{5}, \\
\operatorname*{res}_{z=2} \frac{z^{n+2} - 3z^{n+1} + z^n}{(z-2)^2(z+2)(z-3)} &= 2^{n-4}\cdot(2n-1),
\end{aligned}$$

więc rozwiązaniem jest ciąg $\{x_n\}$ określony wzorem

$$x_n = \frac{1}{5}\cdot 3^n + (-2)^{n-4}\cdot\frac{11}{5} + 2^{n-4}\cdot(2n-1).$$

Zad. 5. (grupa I)

Do obu stron równania zastosujmy transformatę Laplace'a względem t. Niech $U(x,s) = L_t\{u(x,t)\}(s)$. Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[sU(x,s) - x\right] &= -\frac{1}{1+s^2},\ \ U(0,s) = \frac{2}{s^3}, \\
\frac{\partial}{\partial x}U(x,s) &= \frac{s}{1+s^2}, \\
U(x,s) &= \frac{sx}{1+s^2} + C(s),\ \text{z warunku wynika, że } C(s) = \frac{2}{s^3},
\end{aligned}$$

zatem rozwiązaniem jest

$$u(x,t) = \left(x\cos t + t^2\right)\cdot 1_+(t).$$

Zad. 5. (grupa II)

Do obu stron równania zastosujmy transformatę Laplace'a względem t. Niech $U(x,s) = L_t\{u(x,t)\}(s)$. Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[sU(x,s) - \frac{1}{2}x^2\right] &= -\frac{s}{1+s^2},\ \ U(0,s) = \frac{1}{s^2}, \\
\frac{\partial}{\partial x}U(x,s) &= \frac{x}{s} - \frac{1}{1+s^2}, \\
U(x,s) &= \frac{x^2}{2s} - \frac{x}{1+s^2} + C(s),\ \text{z warunku wynika, że } C(s) = \frac{1}{s^2},
\end{aligned}$$

zatem rozwiązaniem jest

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\sin t + t\right)\cdot 1_+(t).$$