Rozwiązania zadań z kolokwium TCiWdTD dn. 26.11.2009

Zad. 1. (grupa I)
Korzystając z własności funkcji Γ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\ldots=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)= \\ &= \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\ldots\cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

■

Zad. 1. (grupa II)
Ze wzoru Weierstrassa (wzór 1.2.2) wynika, że

$$(\ln\Gamma(x))' = -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(x+n)},$$

więc

$$(\ln\Gamma(x))'' = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx+n^2-nx}{n^2(x+n)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2}$$

co kończy dowód. ■

Zad. 2. (grupa I)
Niech $Y(s) = L\{y(t)\}(s)$. Wówczas stosując transformatę Laplace'a do obu stron równania i uwzględniając warunki początkowe otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(s^3+3s^2+3s+1\right)Y(s) &= \frac{6}{s+1} \\ Y(s) &= \frac{6}{(s+1)^4}\end{aligned}$$

zatem $y(t) = t^3e^{-t}1_+(t)$. ■

Zad. 2. (grupa II)
Niech $Y(s) = L\{y(t)\}(s)$. Wówczas stosując transformatę Laplace'a do obu stron równania i uwzględniając warunki początkowe otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(s^3-3s^2+3s-1\right)Y(s) &= \frac{6}{s-1} \\ Y(s) &= \frac{6}{(s-1)^4}\end{aligned}$$

zatem $y(t) = t^3e^{t}1_+(t)$. ■

Zad. 3. (wspólne)
Niech $F(s) = L\{f\}(s)$. Stosując twierdzenie Borela o splocie i transformując obie strony równania otrzymujemy co następuje:

$$\begin{aligned}s^2F(s)-s-1-F(s)\frac{1}{s^2-1}+F(s)(sF(s)-1)\frac{s}{s^2-1} &= \frac{s}{s^2-1} \\ F(s) &= \frac{s^3+s^2+s-1}{s^2(s^2-1)}\end{aligned}$$

zatem

$$f(x) = (-1+x+2\cosh x)\,1_+(x).$$

■

Zad. 4. (wspólne)

We wzorze $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int\limits_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$ należy przyjąć $f(t) = \sin(kt)$ oraz $s \in \mathbb{R}_+$. Wynika stąd, że

$$L\left\{\frac{\sin(kt)}{t}\right\} = \int\limits_s^\infty \frac{k}{\sigma^2 + k^2}d\sigma = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{k}.$$

W takim razie na mocy jednej z własności transformaty Laplace'a

$$L\{\mathrm{Si}(kt)\}(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{k}\right).$$

$\blacksquare$

Zad. 5.* (wspólne)

Ponieważ $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, więc $\Gamma'(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\ln t dt$, zatem:

$$\begin{aligned} C &= -\Gamma'(1) = -\int\limits_0^\infty e^{-t}\ln t dt = -\int\limits_0^1 e^{-t}\ln t dt - \int\limits_1^\infty e^{-t}\ln t dt = \int\limits_0^1 \left(e^{-t}-1\right)'\ln t dt + \int\limits_1^\infty \left(e^{-t}\right)'\ln t dt = \\ &= \underbrace{\left(e^{-t}-1\right)\ln t\Big|_0^1}_{0} + \underbrace{e^{-t}\ln t\Big|_1^\infty}_{0} + \int\limits_0^1 \left(1-e^{-t}\right)\frac{1}{t}dt - \int\limits_1^\infty e^{-t}\frac{1}{t}dt. \end{aligned}$$

Podstawiając w ostatniej całce $t = \frac{1}{\tau}$ otrzymujemy

$$\int\limits_1^\infty e^{-t}\frac{1}{t}dt = -\int\limits_1^0 e^{-\frac{1}{\tau}}\frac{1}{\tau}d\tau = \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{t}}\frac{1}{t}dt$$

co kończy dowód wzoru

$$\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}}{t}dt = C.$$

$\blacksquare$