Kolokwium z TCiWdTD, dn. 23.11.2010

Zad. 1. (za 4 pkt.)
Wiedząc, że:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

wyznaczyć wartość $\Gamma''(1)$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Wykazać, że jeśli $f,\ f', \ldots, f^{(n)}$ są bezwzględnie całkowalne na $\mathbb{R}$, to

$$\mathbb{F}\left[f^{(n)}(t)\right](\omega) = (i\omega)^n F(\omega),$$

gdzie $\mathbb{F}$ oznacza transformatę Fouriera, $F = \mathbb{F}[f]$.

Zad. 3. (za 4 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} f_1(x) &= \exp(x) - \int\limits_0^x f_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x f_2(t)\exp(x-t)\,dt \\ f_2(x) &= 1 - \int\limits_0^x f_1(t)\exp(t-x)\,dt + \int\limits_0^x f_2(t)\,dt \end{cases}.$$

Zad. 4. (za 4 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego:

$$y'' + 9y = 30\cosh t, \quad y\left(0^+\right) = 3, y'\left(0^+\right) = 0$$

Zad. 5.* (zastępuje dowolne inne zadanie)
Wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$