Rozwiązania - kolokwium TCiWdTD 23.01.2012

Zad. 1a. Z nierówności

$$|\varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0)| \leq \frac{1}{2}t^2 \sup_{x\in[0;t]} |\varphi''(x)|$$

wynika ciągłość T. Liniowość T jest oczywista.

Zad. 1b. Ponieważ $\left\langle D^2\left(t^{-\frac{1}{2}}1_+(t)\right), \varphi\right\rangle = -\left\langle D\left(t^{-\frac{1}{2}}1_+(t)\right), \varphi'\right\rangle$, więc na mocy zadania przerabianego na ćwiczeniach otrzymujemy wynik.

Zad. 2. Ze wzoru przerabianego na ćwiczeniach

$$\int_0^a rJ_\nu^2\left(x\frac{r}{a}\right)dr = \frac{a^2}{2}\left(J_v'(x)\right)^2$$

wynika, że $J_\nu'(x) \neq 0$. Ze wzorów rekurencyjnych dla funkcji Bessela (po prostych przekształceniach) wynika, że $J_{\nu+1} = -J_\nu'(x)$, więc także $J_{\nu+1}(x) \neq 0$.

Zad. 3. Warunkiem koniecznym na to, aby funkcja $K(x)$ była jądrem fourierowskim jest by zachodziła równość $\mathbb{K}(s)\,\mathbb{K}(1-s) = 1$, gdzie $\mathbb{K}$ jest transformatą Mellina funkcji $K(x)$.
Obliczając transformatę Mellina funkcji $K(x)$ otrzymujemy

$$\mathbb{K}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x^{\frac{2}{3}}}dx = \left| \begin{array}{rl} x^{\frac{2}{3}} & = t \\ x & = t^{\frac{3}{2}} \\ dx & = \frac{3}{2}\sqrt{t}dt \end{array} \right| = \ldots = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}s\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{2}s\right) = \frac{3\pi}{2\sin\left(\frac{3\pi s}{2}\right)}.$$

W takim razie łatwo sprawdzić, że warunek konieczny nie jest spełniony.

Zad. 4a. Niech $\mathcal{Z}(x_n)(z) = F(z)$. Wtedy

$$\begin{aligned} F(z)\left(z^3 - 6z^2 + 11z - 6\right) &= \frac{z}{z-2} \\ F(z) &= \frac{z}{(z-1)(z-2)^2(z-3)} \quad \text{itd...} \end{aligned}$$

Zad. 4b. Niech $\mathcal{Z}(x_n)(z) = F(z)$. Wtedy

$$\begin{aligned} F(z)\left(z^3 + 6z^2 + 11z + 6\right) &= \frac{z}{z+1} \\ F(z) &= \frac{z}{(z+1)^2(z+2)(z+3)} \quad \text{itd...} \end{aligned}$$