Wybrane rozwiązania - egz. TCiWdTD 31.01.2012

Zad. 1a. Ze wzoru rekurencyjnego $J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}J_\nu(z)$ dla $\nu=-\frac{1}{2}$ wynika, że

$$J_{-\frac{3}{2}}(z)=-\frac{1}{z}J_{-\frac{1}{2}}(z)-J_{\frac{1}{2}}(z).$$

Z zadań przerabianych na ćwiczeniach wiadomo, że $J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\ J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$, zatem

$$J_{-\frac{3}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{1}{z}\cos z+\sin z\right).$$

Zad. 4a. Niech $Y(s)=L\{y\}(s)$. Wtedy

$$\begin{aligned}Y(s)\left(s^2+2s+1\right)&=s^4,\\ Y(s)&=\frac{s^4}{(s+1)^2}=s^2-2s+3-\frac{4}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}.\end{aligned}$$

Zatem

$$y=\delta^{(2)}-2\delta^{(1)}+3\delta-\left(4e^{-t}-te^{-t}\right)\cdot 1_+(t).$$

Zad. 5a. Ponieważ $\mathcal{Z}\{n\}(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$, to na mocy jednej z własności $\mathcal{Z}$-transformaty wynika, że

$$\mathcal{Z}\left\{n^2\right\}(z)=\mathcal{Z}\{n\cdot n\}(z)=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)=-\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Zatem

$$\mathcal{Z}\{x_n\}(z)=-\frac{z}{(z-1)^3(z+1)}\text{ itd. z twierdzenia o residuach...}$$

Zad. 6. Niech $v_c(p,t)=\int\limits_0^\pi v(x,t)\cos px dx$. Wtedy:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\pi\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\cos px dx&=\underbrace{\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\cos px\Big|_0^\pi}_{0}+p\int\limits_0^\pi\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\sin px dx=\\ &=\underbrace{pv(x,t)\sin px|_0^\pi}_{0}-p^2\int\limits_0^\pi v(x,t)\cos px dx=-p^2v_c(p,t).\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$\begin{aligned}\frac{dv_c(p,t)}{dt}&=-kp^2v_c(p,t)\ \text{ z warunkiem początkowym}\\ v_c(p,0)&=\int\limits_0^\pi f(s)\cos psds.\end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest funkcja

$$v_c(p,t) = e^{-kp^2 t} \int_0^{\pi} f(s) \cos psds, \text{ dla } p = 0, 1, 2, \ldots$$

Odwracając transformatę cosinusową ostatecznie otrzymujemy

$$v(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(s)\, ds + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} e^{-kp^2 t} \int_0^{\pi} f(s) \cos psds.$$