Wybrane rozwiązania - egz. TCiWdTD 7.02.2012

Zad. 1b. Ponieważ

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}} = \left| \begin{array}{c} \tau = tr \\ d\tau = tdr \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{r}\sqrt{1-r}} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi,$$

więc $(f_1 * f_2)'(t) = 0$.

Zad. 2. Niech $L\{f(t)\} = F(s)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma &= \int_s^\infty d\sigma \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \int_s^\infty e^{-\sigma t} d\sigma = \int_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{t}e^{-\sigma t}\right]_{\sigma=s}^{\sigma=\infty} f(t)\, dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{f(t)}{t} dt = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) \text{ co dowodzi prawdziwości wzoru a).}\end{aligned}$$

Ponieważ $L\{\sin kt\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}$, więc z powyższego wzoru wynika, że

$$L\left\{\frac{\sin kt}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty \frac{k}{\sigma^2+k^2} d\sigma = \left| \begin{array}{c} \sigma = kr \\ d\sigma = kdr \end{array} \right| = \int_{\frac{s}{k}}^\infty \frac{dr}{r^2+1} = \operatorname{arctg} r|_{\frac{s}{k}}^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{k}.$$

Podstawiając $s = 0$ otrzymujemy, że

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin kt}{t} dt = L\left\{\frac{\sin kt}{t}\right\}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Zad. 3a. Z definicji transformaty Fouriera i wzoru na transformatę odwrotną wynika, że

$$\begin{aligned}\left\langle F\left[e^{it}\right], \varphi\right\rangle &= \left\langle e^{it}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}\varphi(\tau)\, d\tau \right\rangle = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\cdot 1} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}\varphi(\tau)\, d\tau = 2\pi\varphi(1) = \\ &= \left\langle 2\pi\delta(\omega-1), \varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

Analogicznie łatwo pokazać, że

$$\left\langle F\left[e^{-it}\right], \varphi\right\rangle = \left\langle 2\pi\delta(\omega+1), \varphi\right\rangle.$$

Zatem $F[\cos t] = \pi[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)]$.

Zad. 4a. Niech $\mathcal{Z}(x_n)(z) = F(z)$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^3\left(F(z) - \frac{1}{z^2}\right) + 3z^2F(z) + 3zF(z) + F(z) &= \frac{z}{z-1} \\ F(z)(z+1)^3 &= \frac{z^2}{z-1} \\ F(z) &= \frac{z^2}{(z+1)^3(z-1)}.\end{aligned}$$

Odwracając transformatę za pomoca tw. o residuach otrzymujemy

$$x_n = \operatorname*{res}_{z=-1} \frac{z^{n+1}}{(z+1)^3 (z-1)} + \operatorname*{res}_{z=1} \frac{z^{n+1}}{(z+1)^3 (z-1)} = \frac{(-1)^n}{8} \left(2n^2 - 1\right) + \frac{1}{8}.$$

Zad. 5a. Niech (x_n) będzie ciągiem dodatnich zer funkcji J_0. Wtedy współczynniki szeregu Fouriera-Bessela wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{J_1^2(x_n)} \int_0^1 r\left(1+r^2\right) J_0(x_n r)\, dr = \left| \begin{array}{c} x_n r = t \\ dr = \frac{1}{x_n} dt \end{array} \right| = \frac{2}{x_n^2 J_1^2(x_n)} \int_0^{x_n} t \left(1 + \left(\frac{t}{x_n}\right)^2\right) J_0(t)\, dt = \\ &= \frac{2}{x_n^2 J_1^2(x_n)} \int_0^{x_n} t J_0(t)\, dt + \frac{2}{x_n^4 J_1^2(x_n)} \int_0^{x_n} t^3 J_0(t)\, dt. \end{aligned}$$

Obliczając każdą z tych całek osobno otrzymujemy na mocy odpowiedniego wzoru rekurencyjnego

$$\int_0^{x_n} t J_0(t)\, dt = \int_0^{x_n} [t J_1(t)]'\, dt = x_n J_1(x_n)$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} t^3 J_0(t)\, dt &= \int_0^{x_n} t^2 [t J_1(t)]'\, dt = x_n^3 J_1(x_n) - 2 \int_0^{x_n} \left[t^2 J_2(t)\right]'\, dt = \\ &= x_n^3 J_1(x_n) - 2 x_n^2 J_2(x_n). \end{aligned}$$

W takim razie

$$a_n = \frac{4}{x_n J_1(x_n)} - \frac{4 J_2(x_n)}{x_n^2 J_1^2(x_n)} = \frac{4}{x_n J_1(x_n)} \left(1 - \frac{J_2(x_n)}{x_n J_1(x_n)}\right).$$