Kolokwium z TCiWdTD, dn. 26.11.2012

Zad. 1. (za 3 pkt.)
Wyrazić całkę

$$I(r) = \int\limits_0^r x\sqrt{rx - x^2}dx$$

za pomocą funkcji B Eulera. Wyznaczyć $I(4)$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \pi - x & \text{dla } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle \end{cases}$$

rozwinąć na szereg Fouriera sinusów w przedziale$\langle 0, \pi \rangle$. Niech $S(x)$ oznacza sumę tego szeregu. Wyznaczyć $S\left(\frac{5}{2}\pi\right)$.

Zad. 3. (za 3 pkt.)
Pokazać, że $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ixy-x}dx = \frac{1}{1+iy}$ oraz $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ixy+x}dx = \frac{1}{1-iy}$. Następnie, korzystając z powyższych równości, wyznaczyć $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\left\{\frac{1}{1+y^2}\right\}(x)$ oraz $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-(2n+1)}\left\{\frac{1}{1+y^2}\right\}(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-k}$ oznacza k-krotne złożenie odwrotnej transformaty Fouriera ze sobą.

Zad. 4. (za 3 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego:

$$y''' + 3y'' = te^{2t}, \quad y\left(0^+\right) = 0, \; y'\left(0^+\right) = 0, \; y''\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 5. (za 3 pkt.)
Pokazać, że dla $m \geq n$ prawdziwy jest wzór dla transformaty Laplace'a

$$\mathcal{L}\left[t^m \frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](s) = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\left[s^n F(s)\right],$$

gdzie $\mathcal{L}[f] = F$, $f \in C^n$.

Kolokwium z TCiWdTD, dn. 26.11.2012

Zad. 1. (za 3 pkt.)
Wyrazić całkę

$$I(r) = \int_0^r (r-x)\sqrt{rx - x^2}\,dx$$

za pomocą funkcji B Eulera. Wyznaczyć $I(4)$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \pi - x & \text{dla } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle \end{cases}$$

rozwinąć na szereg Fouriera sinusów w przedziale$\langle 0, \pi \rangle$. Niech $S(x)$ oznacza sumę tego szeregu. Wyznaczyć $S\left(\frac{5}{2}\pi\right)$.

Zad. 3. (za 3 pkt.)
Pokazać, że $\int_0^{+\infty} e^{-ixy-x}dx = \frac{1}{1+iy}$ oraz $\int_{-\infty}^{0} e^{-ixy+x}dx = \frac{1}{1-iy}$. Następnie, korzystając z powyższych równości, wyznaczyć $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\left\{\frac{1}{1+y^2}\right\}(x)$ oraz $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-2n}\left\{\frac{1}{1+y^2}\right\}(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-k}$ oznacza k-krotne złożenie odwrotnej transformaty Fouriera ze sobą.

Zad. 4. (za 3 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego:

$$y''' - 5y'' = te^{2t}, \quad y\left(0^+\right) = 0, \; y'\left(0^+\right) = 0, \; y''\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 5. (za 3 pkt.)
Pokazać, że dla $m \geq n$ prawdziwy jest wzór dla transformaty Laplace'a

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}\left(t^m f(t)\right)\right](s) = (-1)^m s^n \frac{d^m F(s)}{ds^m},$$

gdzie $\mathcal{L}[f] = F$, $f \in C^n$.