Kolokwium z TCiWdTD, dn. 2.12.2013

Zad. 1. (za 1 pkt.)
Wyprowadzić wzór na $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ x-\pi & \text{dla } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases}$$

rozwinąć w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$ na szereg cosinusów. Dookreślić wartość funkcji w punktach $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ w ten sposób, aby spełnione były warunki Dirichleta.
Ile wynosi wartość sumy tego szeregu w punkcie $x = \frac{317}{2}\pi$?

Zad. 3. (za 2 pkt.)
Wyznaczyć transformatę Laplace'a splotu funkcji $f_1 * f_2$, gdzie $f_1(t) = t^{\frac{3}{2}} \cdot 1_+(t)$, $f_2(t) = t^{\frac{1}{2}} \cdot 1_+(t)$ bezpośrednio (obliczając splot) oraz za pomocą twierdzenia Borela.

Zad. 4. (za 3 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego:

$$y''' + y' = e^{2t}, \quad y\left(0^+\right) = 0,\ y'\left(0^+\right) = 0,\ y''\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 5. (za 2 pkt.)
Pokazać, że

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma,$$

gdzie $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, a droga całkowania jest taka, że $\operatorname{Re} s \to +\infty$.

Zad. 6. (za 2 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle \pi; +\infty) \\ x & \text{dla } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ x-\pi & \text{dla } x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right) . \end{cases}$$

Zad. 7. (za 2 pkt.)
Pokazać, że w przestrzeni D' prawdziwa jest równość

$$\sin(at) \cdot \delta^{(1)} = -a \cdot \delta,$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Kolokwium z TCiWdTD, dn. 2.12.2013

Zad. 1. (za 1 pkt.)
Wyprowadzić wzór na $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Funkcję

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ x-\pi & \text{dla } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases}$$

rozwinąć w przedziale $\langle 0; \pi\rangle$ na szereg sinusów. Dookreślić wartość funkcji w punktach $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$ w ten sposób, aby spełnione były warunki Dirichleta.
Ile wynosi wartość sumy tego szeregu w punkcie $x=\frac{317}{2}\pi$?

Zad. 3. (za 2 pkt.)
Wyznaczyć transformatę Laplace'a splotu funkcji $f_1 * f_2$, gdzie $f_1(t)=t^{\frac{3}{2}} \cdot 1_+(t)$, $f_2(t)=t^{\frac{1}{2}} \cdot 1_+(t)$ bezpośrednio (obliczając splot) oraz za pomocą twierdzenia Borela.

Zad. 4. (za 3 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego:

$$y'''+y'=e^{2t}, \;\; y\left(0^+\right)=0, \; y'\left(0^+\right)=0, \; y''\left(0^+\right)=0.$$

Zad. 5. (za 2 pkt.)
Pokazać, że

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s)=\int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma,$$

gdzie $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=F(s)$, a droga całkowania jest taka, że $\operatorname{Re} s \to +\infty$.

Zad. 6. (za 2 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle \pi; +\infty) \\ -x & \text{dla } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x & \text{dla } x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right) . \end{cases}$$

Zad. 7. (za 2 pkt.)
Pokazać, że w przestrzeni D' prawdziwa jest równość

$$te^{at} \cdot \delta^{(1)} = -\delta,$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.