Kolokwium z TCiWdTD, dn. 27.01.2014

Zad. 1. (za 3 pkt.)

Dla $\varphi \in D$ określamy $\langle T, \varphi \rangle$ jak następuje

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0)}{t^2\sqrt{t}} dt.$$

Udowodnić, że $T \in D'$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)

Wyznaczyć splot $J_0 * J_0 * J_0 * J_0$ traktując J_0 jako funkcję prawostronną.

Zad. 3. (za 3 pkt.)

Funkcję $f(t) = t + t^3$ przedstawić w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ w postaci sumy szeregu Fouriera-Bessela względem układu funkcji $\{J_1(x_n t)\}$, gdzie (x_n) jest ciągiem dodatnich zer funkcji J_1.

Zad. 4. (za 3 pkt.)

Czy istnieje stała A taka, że funkcja $f(x) = \frac{A}{1+x^4}$ wyznacza jądro przekształcenia fourierowskiego? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 5. (za 3 pkt.)

Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+3} + x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 1, \text{ z warunkami początkowymi } x_0 = 1, \ \ x_1 = x_2 = 0.$$

Kolokwium z TCiWdTD, dn. 27.01.2014

Zad. 1. (za 3 pkt.)

Pokazać, że $D^2\left(t^{-\frac{1}{2}}1_+(t)\right) = T$, gdzie

$$\langle T, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(t) - \varphi'(0)}{t\sqrt{t}} dt, \quad \varphi \in D.$$

Zad. 2. (za 3 pkt.)

Wyznaczyć splot $J_0 * J_0 * J_0 * J_0$ traktując J_0 jako funkcję prawostronną.

Zad. 3. (za 3 pkt.)

Funkcję $f(t) = t + t^3$ przedstawić w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ w postaci sumy szeregu Fouriera-Bessela względem układu funkcji $\{J_1(x_n t)\}$, gdzie (x_n) jest ciągiem dodatnich zer funkcji J_1.

Zad. 4. (za 3 pkt.)

Niech $\widetilde{f_\nu}(p)$ oznacza nieskończoną transformatę Hankela funkcji $f(x)$, zaś $\widetilde{g_\nu}(p)$ oznacza nieskończoną transformatę Hankela funkcji $g(x)$. Pokazać, że:

$$\int_0^{+\infty} x f(x) g(x) dx = \int_0^{+\infty} p \widetilde{f_\nu}(p) \widetilde{g_\nu}(p) dp.$$

Zad. 5. (za 3 pkt.)

Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+3} + x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 1, \text{ z warunkami początkowymi } x_0 = 1, \ \ x_1 = x_2 = 0.$$