

# Kolokwium z TCiWdTD, dn. 17.11.2014

Zad. 1. (za 3 pkt.)  
Obliczyć całkę

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x (1 + \sqrt{\ln x})^4} dx.$$

Zad. 2. (za 3 pkt.)  
Funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\pi; 0) \\ x & \text{dla } x \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

rozwinąć na szereg Fouriera w przedziale  $[-\pi, \pi]$ . Dookreślić wartości funkcji  $f$  w punktach  $x = \pm\pi$  tak, aby spełnione były warunki Dirichleta w przedziale  $[-\pi, \pi]$ . Niech  $S(x)$  oznacza sumę tego szeregu. Wyznaczyć  $S(17\pi - \sqrt{2})$ .

Zad. 3. (za 3 pkt.)  
Wykazać, że jeśli  $\mathbb{F}$  oznacza transformatę Fouriera,  $t^n f(t)$  jest bezwzględnie całkowalna na  $\mathbb{R}$  oraz  $F = \mathbb{F}[f]$ , to zachodzi wzór:

$$\frac{d^k F(\omega)}{\omega^k} = (-i)^k \mathbb{F}[t^k f(t)](\omega).$$

Zad. 4. (za 3 pkt.)  
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać układ równań całkowych:

$$\begin{cases} f_1(x) = e^x - \int_0^x f_1(t) dt + 4 \int_0^x f_2(t) e^{x-t} dt \\ f_2(x) = 1 - \int_0^x f_1(t) e^{t-x} dt + \int_0^x f_2(t) dt \end{cases}.$$

Zad. 5. (za 3 pkt.)  
Pokazać, że dla  $m \geq n$  prawdziwy jest wzór dla transformaty Laplace'a:

$$\mathcal{L}\left[t^m \frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](s) = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} [s^n F(s)],$$

gdzie  $\mathcal{L}[f] = F$ ,  $f \in C^{(n)}$ .