Kolokwium z TCiWdTD, dn. 17.11.2014

Zad. 1. (za 3 pkt.)
Obliczyć całkę

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x\left(1+\sqrt{\ln x}\right)^4} dx.$$

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\pi; 0) \\ x & \text{dla } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

rozwinąć na szereg Fouriera w przedziale $[-\pi, \pi]$. Dookreślić wartości funkcji f w punktach $x = \pm\pi$ tak, aby spełnione były warunki Dirichleta w przedziałe $[-\pi; \pi]$. Niech $S(x)$ oznacza sumę tego szeregu. Wyznaczyć $S\left(17\pi - \sqrt{2}\right)$.

Zad. 3. (za 3 pkt.)
Wykazać, że jeśli $\mathbb{F}$ oznacza transformatę Fouriera, $t^k f(t)$ jest bezwzględnie całkowalna na $\mathbb{R}$ oraz $F = \mathbb{F}[f]$, to zachodzi wzór:

$$\frac{d^k F(\omega)}{d\omega^k} = (-i)^k \, \mathbb{F}\left[t^k f(t)\right](\omega).$$

Zad. 4. (za 3 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać układ równań całkowych:

$$\begin{cases} f_1(x) &= e^x - \int_0^x f_1(t)\,dt + 4\int_0^x f_2(t)\, e^{x-t} dt \\ f_2(x) &= 1 - \int_0^x f_1(t)\, e^{t-x} dt + \int_0^x f_2(t)\,dt \end{cases}.$$

Zad. 5. (za 3 pkt.)
Pokazać, że dla $m \geq n$ prawdziwy jest wzór dla transformaty Laplace'a:

$$\mathcal{L}\left[t^m \frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](s) = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\left[s^n F(s)\right],$$

gdzie $\mathcal{L}[f] = F$, $f \in C^{(n)}$.