Egzamin „zerowy” z TCiWdTD dn. 29.01.2015

....

Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Pokazać, że jeśli $J_\nu(z) = 0$, to $J'_\nu(z) \neq 0$.

b) (za 5 pkt.)
Pokazać, że

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zad. 2. a) (za 7 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie

$$y'''(t) - 6y''(t) + 12y'(t) - 8y(t) = 2e^{2t} \text{ z warunkami } y\left(0^+\right) = 0,\ y'\left(0^+\right) = 0,\ y''\left(0^+\right) = 1.$$

b) (za 3 pkt.)
Niech $f_1(t) = \sqrt{t}$, $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Wyznaczyć $(f_1 * f_2)'(t)$.

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Niech $\widetilde{f}_\nu(p)$ będzie nieskończoną transformatą Hankela funkcji $f(x)$, zaś $\widetilde{g}_\nu(p)$ nieskończoną transformatą Hankela funkcji $g(x)$. Pokazać, że

$$\int_0^{+\infty} x f(x) g(x)\, dx = \int_0^{+\infty} p \widetilde{f}_\nu(p) \widetilde{g}_\nu(p)\, dp.$$

b) (za 5 pkt)
Niech $\mathcal{H}_\nu\{f(r)\}(p) = \widetilde{f}_\nu(p)$ oznacza nieskończoną transformatę Hankela funkcji $f(r)$ w punkcie p. Pokazać, że dla $a > 0$ zachodzi wzór

$$\mathcal{H}_\nu\{f(ar)\}(p) = \frac{1}{a^2}\widetilde{f}_\nu\left(\frac{p}{a}\right) \text{ (twierdzenie o podobieństwie).}$$

Zad. 4. a) (za 7 pkt.)
Rozwiązać w przestrzeni D'_0 równanie

$$D^2 y + 2Dy + y = \delta^{(4)}$$

b) (za 3 pkt)
Czy funkcja $\frac{(2+\sin s)\cos s}{s^2}$ należy do przestrzeni obrazów klasycznej transformaty Laplace'a? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 5. (za 10 pkt.)
Podać definicję przekształcenia całkowego z jądrem fourierowskim. Podać przykłady takich przekształceń wraz z uzasadnieniem. Czy transformata Mellina jest takim przekształceniem?

Zad. 6. a) (za 7 pkt)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+3} - 6x_{n+2} + 12x_{n+1} - 8x_n = 2^{n+1}, \text{ gdzie } x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1.$$

b) (za 3 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o splocie ciągów dla $Z-$transformaty.