Kolokwium z TCiWdTD, dn. 23.11.2015

Zad. 1. (za 3 pkt.)
Korzystając z własności funkcji B Eulera, obliczyć wartość całki

$$I(t) = \int_0^{2t} \sqrt{\frac{2t}{x} - 1}\, dx$$

dla $t > 0$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in (-\pi; 0) \\ x & \text{dla} \quad x \in (0; \pi) \end{cases}$$

rozwinąć na szereg Fouriera w przedziale $[-\pi, \pi]$. Dookreślić wartości funkcji f w punktach $x = 0$, $\pm\pi$ tak, aby spełnione były warunki Dirichleta w przedziale $[-\pi; \pi]$. Niech $S(x)$ oznacza sumę tego szeregu. Obliczyć $\lim\limits_{x \to 113\pi^-} S(x)$.

Zad. 3. (za 3 pkt.)
Wykazać, że dla $m \geq n$ prawdziwy jest wzór dla transformaty Laplace'a:

$$\mathcal{L}\left[t^m \frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](s) = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\left[s^n F(s)\right],$$

gdzie $\mathcal{L}[f] = F$, $f \in C^{(n)}$.

Zad. 4. (za 3 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a, rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego:

$$y''' + 3y'' = te^{2t}, \quad y\left(0^+\right) = 0, \; y'\left(0^+\right) = 0, \; y''\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 5. (za 3 pkt.)
Wykazać, że transformatą Laplace'a funkcji $f(t) = 1_+(t) \cdot \ln t$ jest $F(s) = -\frac{1}{s}(\ln s + c)$, gdzie c oznacza stałą Eulera.

Kolokwium z TCiWdTD, dn. 23.11.2015

Zad. 1. (za 3 pkt.)
Korzystając z własności funkcji B Eulera, obliczyć wartość całki

$$I(t) = \int_0^{2t} \sqrt{\frac{2t}{2t-x} - 1}\, dx$$

dla $t > 0$.

Zad. 2. (za 3 pkt.)
Funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in (-\pi; 0) \\ -x & \text{dla} \quad x \in (0; \pi) \end{cases}$$

rozwinąć na szereg Fouriera w przedziale $[-\pi, \pi]$. Dookreślić wartości funkcji f w punktach $x = 0, \pm\pi$ tak, aby spełnione były warunki Dirichleta w przedziałe $[-\pi; \pi]$. Niech $S(x)$ oznacza sumę tego szeregu. Obliczyć $\lim\limits_{x \to 113\pi^+} S(x)$.

Zad. 3. (za 3 pkt.)
Wykazać, że dla $m \geq n$ prawdziwy jest wzór dla transformaty Laplace'a:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}\left(t^m f(t)\right)\right](s) = (-1)^m s^n \frac{d^m F(s)}{ds^m},$$

gdzie $\mathcal{L}[f] = F$, $f \in C^{(n)}$.

Zad. 4. (za 3 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a, rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego:

$$y''' - 5y'' = te^{2t}, \quad y\left(0^+\right) = 0, \ y'\left(0^+\right) = 0, \ y''\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 5. (za 3 pkt.)
Wykazać, że transformatą Laplace'a funkcji $f(t) = 1_+(t) \cdot \ln t$ jest $F(s) = -\frac{1}{s}(\ln s + c)$, gdzie c oznacza stałą Eulera.