Egzamin z TCiWdTD dn. 2.02.2016

....
Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Znaleźć rozwiązanie zagadnienia: $y'' + 2y' + 2y = f(t)$, $y(0^+) = y'(0^+) = 0$, gdzie f oznacza funkcję daną posiadającą transformatę Laplace'a.

b) (za 5 pkt.)
Znaleźć rozwiązanie zagadnienia: $y''' + 3y'' = te^{2t}$, $y(0^+) = 0$, $y'(0^+) = 0$, $y''(0^+) = 0$.

Zad. 2. a) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o zachowaniu się transformaty Laplace'a w nieskończoności.

b) (za 5 pkt.)
Wiedząc, że $L\{J_0(t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s) = \sqrt{s^2+\alpha^2}$.

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Pokazać, że $J_0'(z) = -J_1(z)$ dla każdej liczby zespolonej z.

b) (za 5 pkt.)
Pokazać, że jeśli $J_\nu(z_0) = 0$, to $J_\nu'(z_0) \neq 0$ dla dowolnego $\nu \in \mathbb{C}$.

Zad. 4. a) (za 7 pkt.)
Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji D_0' równanie różniczkowe

$$t^2D^2y + 4tDy + 2y = \delta.$$

b) (za 3 pkt.)
Sformułować definicję równości dystrybucji na zbiorze otwartym i definicję nośnika dystrybucji.

Zad. 5. a) (za 7 pkt.)
Wiedząc, że dla $p \in \mathbb{C}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}x^{s-1}dx = \frac{\Gamma(s)}{p^s}$$

wyznaczyć transformatę Mellina funkcji $f(x) = \cos 3x$.

b) (za 3 pkt.)
Czy istnieje transformata Mellina funkcji $\cos^2 3x$? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 6. a) (za 7 pkt.)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+3} + x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 1$$

z warunkami początkowymi $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = 0$.

b) (za 3 pkt.)
Sformułować twierdzenia o przesunięciu dla $\mathcal{Z}$-transformaty.